民國二十五年十二月教育部審定

復興高級中學教科書

三角學

李蕃編著　段子燮校訂

商務印書館發行

本書於二十五年十二月經
國民政府教育部審定
領到教字第一〇七號執照

中華民國二十五年十二月審定本第一版
中華民國二十七年十月審定本第十三版

(57014)

高級中學用
復興教科書 三角學 一冊
每冊實價國幣伍角貳分
外埠酌加運費匯費

編著者 李蕃
校訂者 段子燮
主編兼發行人 王雲五 長沙南正路
印刷所 商務印書館 長沙南正路
發行所 商務印書館 各埠

(本書校對者楊靜盦)

F三六三八

序

我國向所通行之三角學教科書,大多迻譯東隣,材料旣感不足,條理亦欠顯明.求一適合於高中程度者,渺不可得;教授者每以是採用英文原本.但東西各國之學制不同,詳略取捨,自難苟且,而國人講學,仰藉他國文字,尤屬不便.李君銳夫,有鑒於斯,當其肄業於中央大學時,以其研究高深學理之餘,具改進中等教育之志,以事纂述,欲謀中學與大學程度之溝通.卒業後,任教中學,成績昭然.近以所著高中平面三角學一稿見示,屬爲校閱;余觀其內函富麗,程序井然,深合國內高級中學之用,且第九,第十兩章,尤可供大學一年級之參考.故亟促其付梓,以應國人.并望李君本斯志,更從事於幾何代數等之纂述,庶乎國人講學,不必仰藉外國文字,而讀者亦易收指臂之效也.是爲序.

段子燮序於中大算學系.

目 錄

三角學

第一章

角之量法

§1. 三角學 三角學英文爲 Trigonometry 源於希臘文 τριγανον(三角形)及 μετρον(量)二字,蓋量三角形之意也;換言之,卽在研究三角形之邊與角之關係耳.但時在今日,其範圍大加擴充,所有關係於角之代數研究亦所屬焉.

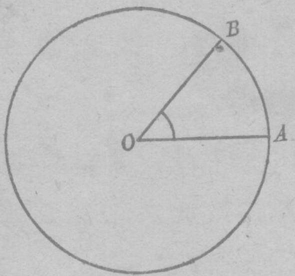
§2. 角之單位 三角學之研究既在角,故量角不能不有單位.量角之單位有三:卽六十分制 (sexagesimal system),百分制 (centesimal system) 及弳制 (circular system).玆分述之如次:

I. 六十分制 六十分制以度 (degree) 爲單位,一度等於圓周三百六十分之一之弧所張之圓心角,一度六十分,一分六十秒.此蓋昔日巴比侖 (Babylon) 之天文學家取一年爲三百六十日之意也.表度,分,秒之符

號爲°,′,″;例如三度十五分十七秒書爲$3°15'17''$.

II. 百分制 百分制一名爲法國制(French system),分一直角爲一百級(grade),每級一百分,每分一百秒.級,分,秒之符號爲 g,\`,\`\`;例如二十五級十八分五秒書爲$25^g 18\` 5\`\`$.百分制爲用未廣.

III. 弳制 弳制一名弧度法 (circular measure),以弳(radian)爲單位,一弳等於與半徑等長之弧或此弧所函之圓心角.如圖設AB弧之長等於半徑AO,則



$$\angle AOB=1\text{弳}$$

弳制雖實行未久,然今日之高等數學中,類皆用之.

§3. 各單位之關係 設R爲圓之半徑,π爲圓周率,即3.14159265……則由幾何學圓周$=2\pi R$,復依弳之定義,圓周之長爲2π弳,但圓周又爲三百六十度,故

$$2\pi\text{弳}=360°$$

即

$$1\text{弳}=\frac{180°}{\pi}=\frac{180°}{3.1416}=57°2957,$$

$$1\text{度}=\frac{\pi\text{弳}}{180}=\frac{3.1416\text{弳}}{180}=0.01745329\text{弳}$$

由此得下列之關係:

$$\left.\begin{aligned}1\text{ 弳} &= 57.2957\text{ 度}\\ 1\text{ 度} &= 0.01745329\text{ 弳}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

讀者尙須明下列之記法:

$$360^\circ = 2\pi\text{ 弳},\qquad 60^\circ = \frac{\pi}{3}\text{ 弳},$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2}\text{ 弳},\qquad 45^\circ = \frac{\pi}{4}\text{ 弳},$$

$$180^\circ = \pi\text{ 弳},\qquad 30^\circ = \frac{\pi}{6}\text{ 弳},$$

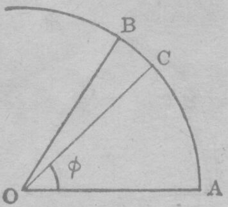
$$90^\circ = \frac{\pi}{2}\text{ 弳},\qquad 15^\circ = \frac{\pi}{12}\text{ 弳}.$$

玆更進而求以上三種單位之關係,以便互相推算.設有一角,以度計之爲 D, 以級計之爲 G, 以弳計之爲 R. 因一直角爲 90°, 則 $\frac{D}{90}$ 表此角與直角之比;一直角又爲 100^g, 則 $\frac{G}{100}$ 亦表此角與直角之比;但 $\frac{\pi}{2}$ 表直角以弳爲單位,故此角與直角之比爲 $\frac{R}{\frac{\pi}{2}}$, 即 $\frac{2R}{\pi}$,

以上三比之值應相等,故得公式

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

§4. **弧之長** 設 ϕ 爲一角,以 AO 爲半徑作一圓,



作 $\angle AOB$ 使等於一弳. r 表半徑之長, R 表 AC 弧之長; 則因圓心角之大小與其所對之弧成正比,故

$$\frac{\phi}{\angle AOB}=\frac{R}{r}.$$

若 ϕ 以弳爲單位, 則 AOB 爲單位角, 故

$$\phi=\frac{R}{r}$$

故 $$R=r\phi \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

故任何弧之長等於其半徑乘其所張之角,但此角係以弳爲單位.

習 題

1. 試化 12°, 56°, $43^\circ\ 15'\ 8''$, $22^\circ.9$ 爲弳及級.

2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{18}$, $2n\pi$, 各爲若干度.

3. 試化弳 2.588, 1.85, 0.4 爲度及級.

4. 設有一圓, 其半徑爲 4 英尺, 問其圓心角爲 80° 所對之弧之長爲若干? 答: 5.6 英尺.

5. 已知地球與太陽之距離爲 92,897,000 英里, 太陽之視直徑爲 $32'\ 4''$, 求太陽之直徑. 答: 866, 500 英里.

〔註〕 日月星辰, 總稱天體 (celestial body), 我人觀察天體時, 若恰

有二視線與天體相切,且與天體中心共一平面,則此二視線所成之角曰天體之視直徑(apparent diameter).

6. 已知月球公轉地球一次所需之時間為27.4日,問月球每日之角速度為若干弳?

答: 約0.22685弳.

7. 設有三角 A, B, C. 已知 A 超過於 B 者 $\frac{\pi}{10}$ 弳, B 與 C 之和為30級, A 與 B 之和為36度, 問 A, B, C 三角各若干度?

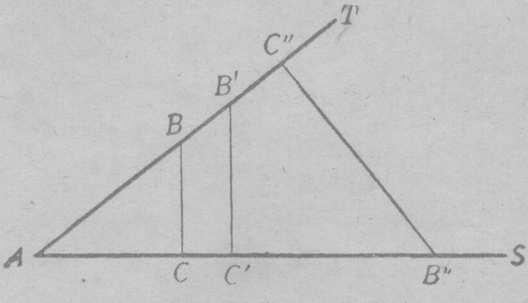
答: $27°, 9°, 18°$.

8. 試證等於半徑之弧所張之圓心角為常數.

第二章

三角函數及其基本性質

§1. 銳角之三角函數 設 SAT 爲一銳角,在 AT 上取任意點 B, B', 作 AS 上之垂線 $BC, B'C'$; 再在 AS 上取任意點 B'', 作 AT 上之垂線 $B''C''$. 於是三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$ 爲相似,蓋 A 角爲公共且各有一角爲直角也.相似三角形之邊之比爲相等,即



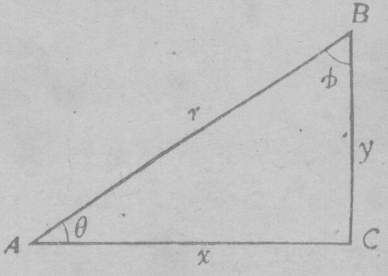
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B''C''}{AC''}$$

此三式之分子分母各相易,其比亦等.

由此得知一角之二邊任意延長,其所成直角三角形之邊之比爲不變;反之,若角變動,則各邊之比亦隨之以變,故各邊之比爲角之函數(function)也.因比之數有六,故一角之函數爲數有六.



設 ABC 爲一直角三角形,其三邊之長爲 r, y, x, 則我人命

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{y}{r}\\ \cos\theta&=\frac{x}{r}\\ \tan\theta&=\frac{y}{x}\\ \cot\theta&=\frac{x}{y}\\ \sec\theta&=\frac{r}{x}\\ \csc\theta&=\frac{r}{y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

此六比之值謂之三角函數 (trigonometric functions).

$\sin\theta$ 讀爲 θ 之正弦 (sine),

$\cos\theta$ 讀爲 θ 之餘弦 (cosine),

$\tan\theta$ 讀爲 θ 之正切 (tangent),

$\cot\theta$ 讀爲 θ 之餘切 (cotangent),

$\sec\theta$ 讀爲 θ 之正割 (secant),

$\csc\theta$ 讀爲 θ 之餘割 (cosecant).

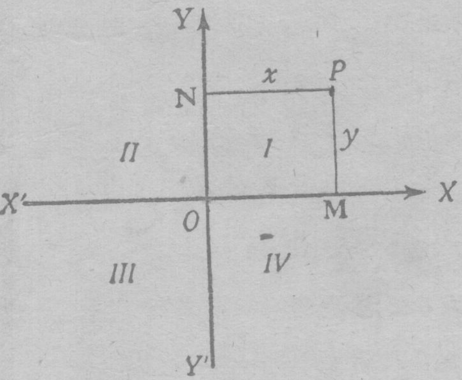
此外尙有二函數,亦隨角以變,卽

$$\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta$$

$$\operatorname{covers}\theta=1-\sin\theta$$

前者讀爲 θ 之正矢 (versed sine), 後者讀爲 θ 之餘矢 (coversed sine).

§2. **坐標**　設 $X'X$ 爲一水平直線, $Y'Y$ 爲在 O 點垂直於 $X'X$ 之直線;於是在此 $X'X$, $Y'Y$ 平面上任何點之位置可由其與 $X'X$ 及 $Y'Y$ 二垂線之距離及方向以定之. P 點與 $X'X$ 之距離 $PM(=y)$ 曰此點之縱坐標 (ordinate), P 點與 $Y'Y$ 之距離 $PN(=x)$ 曰此點之橫坐標 (abscissa), 合縱橫二坐標曰 P 點之坐標 (coördinates). $X'X$ 及 $Y'Y$ 二正交直線曰坐標軸 (axes

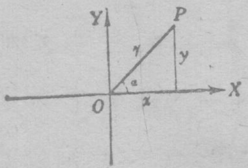


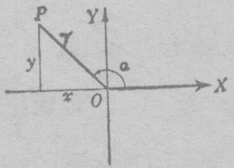
of coördinates), $X'X$ 曰 X 軸, $Y'Y$ 曰 Y 軸. O 點曰原點 (origin).

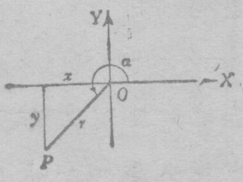
縱坐標在 $X'X$ 之上爲正, 在 $X'X$ 之下爲負; 橫坐標在 $Y'Y$ 之右爲正, 在 $Y'Y$ 之左爲負.

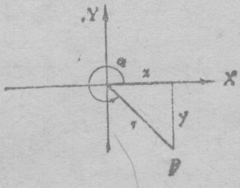
坐標軸分全平面爲四象限 (quadrants), 圖中 I 爲第一象限, II 爲第二象限, III 爲第三象限, IV 爲第四象限.

§3. 任意角之三角函數 若 θ 大於一直角, 則其









函數之定義,可應用坐標軸將銳角之三角函數定義擴充而得.

角之形成,可視爲由一動線,以其一端爲中心,依逆時針或順時針之方向旋轉而成.此動線之最初位置曰始線(initial line),其最終位置曰終線(terminal line).由是始線及終線爲角之兩邊,而動線繞以旋轉之中心點爲角頂.如圖,以始線OX爲X軸,過角頂O作X軸之垂線爲Y軸.當動線由OX之位置旋轉至OP之位置時,OP爲XOP角之終線.

角之在何象限,視終線在何象限而定.終線在第一象限,此角在第一象限;終線在第二象限,則此角亦在第二象限;餘類推.

設在終線上取任一點P,以y爲P點之縱坐標,x爲P點之横坐標;並以a表$\angle XOP$.r表P點與原點之距離;則任意角之三角函數定義如下:

$$\left.\begin{aligned}\sin a&=\frac{y}{r}\\ \cos a&=\frac{x}{r}\\ \tan a&=\frac{y}{x}\\ \cot a&=\frac{x}{y}\\ \sec a&=\frac{r}{x}\\ \csc a&=\frac{r}{y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$