

民國二十五年十二月教育部審定

復興高級中學
教科書
三角學

李蕃編著 段子燮校訂
商務印書館發行

314
A061
227

中華民國政府教育部審定
 領到教字第一〇七號執照
 於二十五年十二月

中華民國二十五年十二月審定本第一版
 中華民國二十七年十月審定本第三版

版權所有
 翻印必究

(57014)

高級中學用
 復興教科書
 三角學 一冊

每冊實價國幣伍角貳分

外埠酌加運費匯費

編者	李	段	王	王	發行所
校訂者	李	子	長沙	長沙	商務印書館
主編兼	王	雲	長沙	長沙	商務印書館
發行人	王	雲	長沙	長沙	商務印書館
印刷所	王	雲	長沙	長沙	商務印書館

中 F 三六三八

(本書校對者楊靜宜)

序

我國向所通行之三角學教科書，大多逡譯東隣，材料既感不足，條理亦欠顯明，求一適合於高中程度者，渺不可得；教授者每以是採用英文原本，但東西各國之學制不同，詳略取捨，自難苟且，而國人講學，仰藉他國文字，尤屬不便。李君銳夫，有鑒於斯，當其肄業於中央大學時，以其研究高深學理之餘，具改進中等教育之志，以事纂述，欲謀中學與大學程度之溝通。卒業後，任教中學，成績昭然。近以所著高中平面三角學一稿見示，屬爲校閱；余觀其內函富麗，程序井然，深合國內高級中學之用，且第九，第十兩章，尤可供大學一年級之參考。故疾促其付梓，以應國人。并望李君本斯志，更從事於幾何代數等之纂述，庶乎國人講學，不必仰藉外國文字，而讀者亦易收指臂之效也。是爲序。

段子燮序於中大算學系。

目 錄

第一章 角之量法	1
§ 1. 三角學	1
§ 2. 角之單位	1
§ 3. 各單位之關係	2
§ 4. 弧之長	3
第二章 三角函數及其基本性質	6
§ 1. 銳角之三角函數	6
§ 2. 坐標	8
§ 3. 任意角之三角函數	9
§ 4. 餘角函數	13
§ 5. 特別角函數	15
§ 6. 三角函數之線表示法	17
§ 7. 函數之變值	19
§ 8. 負角之函數	22
§ 9. 化第二象限之函數爲第一象限之函 數	23

§ 10 化第三象限之函數爲第一象限之函數 25

§ 11. 化第四象限之函數爲第一象限之函數 26

§ 12. 函數之基本關係 29

第三章 直角三角形之解法 對數..... 33

§ 1. 直角三角形之不用對數解法..... 33

§ 2. 對數 35

§ 3. 直角三角形之對數解法 37

第四章 三角分析 44

v§ 1. 二角之和之函數 44

•§ 2. 二角之差之函數 46

•§ 3. 倍角之函數..... 48

§ 4. 半角之函數..... 51

§ 5. 函數之和與積 52

第五章 三角形邊與角之函數之關係
..... 57

•§ 1. 正弦定律..... 57

•§ 2. 餘弦定律..... 59

§ 3. 正切定律..... 60

§ 4. 半角定律..... 61

第六章 斜三角形之解法	67
§ 1. 已知三角形之一邊及二角	67
§ 2. 已知三角形之二邊及一對角	69
§ 3. 已知三角形之二邊及其夾角	73
§ 4. 已知三角形之三邊	76
§ 5. 高及距離	81
§ 6. 航海	84
第七章 三角形之性質	89
§ 1. 三角形之面積	89
§ 2. 三角形內切圓之半徑	91
§ 3. 三角形旁切圓之半徑	92
§ 4. 四邊形面積及圓之內切四邊形面積	93
§ 5. 正多邊形之面積	95
§ 6. 圓之面積	96
第八章 反三角函數三角方程式	100
§ 1. 反三角函數	100
§ 2. 同函數值之角	100
§ 3. 反三角恆等式	105
§ 4. 三角方程式	108
§ 5. 聯立三角方程式	116
第九章 三角函數之圖解	119

§ 1. 應用單位圓119
 § 2. 應用分析法122

第十章 棣美弗定理及三角級數124

§ 1. 複數124
 § 2. 複數之三角表示法125
 § 3. 棣美弗定理126
 § 4. 棣美弗定理之擴充129
 § 5. $\sin x \rightarrow x, \tan x \rightarrow x$ 131
 § 6. $\sin n\phi$ 與 $\cos n\phi$ 之展開131
 § 7. 三角級數133

第十一章 三角函數造表法 表之精

確度137

§ 1. 緒論137
 § 2. 應用三角級數造表138
 § 3. 小角之函數之值139
 § 4. 求相差 $10''$ 之角之數函之值140
 § 5. 求大於 30° 之角之函數之值141
 § 6. 表之精確度142

附錄

附錄一

附錄二

三角函數及對數表

漢英及英漢名詞對照表

三角學

第一章

角之量法

§1. 三角學 三角學英文爲 Trigonometry 源於希臘文 $\tau\rho\iota\gamma\alpha\nu\omicron\nu$ (三角形) 及 $\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ (量) 二字, 蓋量三角形之意也; 換言之, 即在研究三角形之邊與角之關係耳. 但時在今日, 其範圍大加擴充, 所有關係於角之代數研究亦所屬焉.

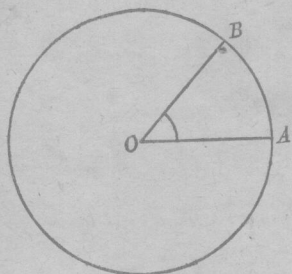
§2. 角之單位 三角學之研究既在角, 故量角不能不有單位. 量角之單位有三: 卽六十分制 (sexagesimal system), 百分制 (centesimal system) 及強制 (circular system). 茲分述之如次:

I. 六十分制 六十分制以度 (degree) 爲單位, 一度等於圓周三百六十分之一之弧所張之圓心角, 一度六十分, 一分六十秒. 此蓋昔日巴比倫 (Babylon) 之天文學家取一年爲三百六十日之意也. 表度, 分, 秒之符

號爲 $^{\circ}, ', ''$; 例如三度十五分十七秒書爲 $3^{\circ} 15' 17''$.

II. 百分制 百分制一名爲法國制 (French system), 分一直角爲一百級 (grade), 每級一百分, 每分一百秒, 級, 分, 秒之符號爲 $g, ', ''$; 例如二十五級十八分五秒書爲 $25^g 18' 5''$. 百分制爲用未廣.

III. 徑制 徑制一名弧度法 (circular measure), 以



徑 (radian) 爲單位, 一徑等於與半徑等長之弧或此弧所函之圓心角. 如圖設 AB 弧之長等於半徑 AO , 則

$$\angle AOB = 1 \text{ 徑}$$

徑制雖實行未久, 然今日之高等

數學中, 類皆用之.

§ 3. 各單位之關係 設 R 爲圓之半徑, π 爲圓周率, 卽 $3.14159265\dots$ 則由幾何學圓周 $= 2\pi R$, 復依徑之定義, 圓周之長爲 2π 徑, 但圓周又爲三百六十度, 故

$$2\pi \text{ 徑} = 360^{\circ}$$

$$\text{卽} \quad 1 \text{ 徑} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{180^{\circ}}{3.1416} = 57^{\circ} 29' 57'',$$

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi \text{ 徑}}{180} = \frac{3.1416 \text{ 徑}}{180} = 0.01745329 \text{ 徑}$$

由此得下列之關係:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ 弧} = 57.2957 \text{ 度} \\ 1 \text{ 度} = 0.01745329 \text{ 弧} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

讀者尚須明下列之記法：

$$360^\circ = 2\pi \text{ 弧}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ 弧},$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ 弧}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ 弧},$$

$$180^\circ = \pi \text{ 弧}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ 弧},$$

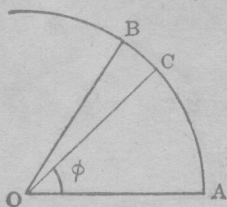
$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ 弧}, \quad 15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ 弧}.$$

茲更進而求以上三種單位之關係，以便互相推算。設有一角，以度計之為 D ，以級計之為 G ，以弧計之為 R 。因一直角為 90° ，則 $\frac{D}{90}$ 表此角與直角之比；一直角又為 100^g ，則 $\frac{G}{100}$ 亦表此角與直角之比；但 $\frac{\pi}{2}$ 表直角以弧為單位，故此角與直角之比為 $\frac{R}{\frac{\pi}{2}}$ ，即 $\frac{2R}{\pi}$ 。

以上三比之值應相等，故得公式

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi} \dots\dots\dots (2)$$

§4. 弧之長 設 ϕ 為一角，以 AO 為半徑作一圓，



作 $\angle AOB$ 使等於一徑. r 表半徑之長, R 表 AC 弧之長; 則因圓心角之大小與其所對之弧成正比. 故

$$\frac{\phi}{\angle AOB} = \frac{R}{r}$$

若 ϕ 以徑為單位, 則 AOB 為單位角, 故

$$\phi^{\circ} = \frac{R}{r}$$

故 $R = r\phi$(3)

故任何弧之長等於其半徑乘其所張之角, 但此角係以徑為單位.

習 題

1. 試化 12° , 56° , $43^{\circ} 15' 8''$, $22^{\circ}.9$ 為徑及級.

2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{18}$, $2n\pi$, 各為若干度.

3. 試化徑 2.588, 1.85, 0.4 為度及級.

4. 設有一圓, 其半徑為 4 英尺, 問其圓心角為 80° 所對之弧之長為若干? 答: 5.6 英尺.

5. 已知地球與太陽之距離為 92,897,000 英里, 太陽之視直徑為 $32' 4''$, 求太陽之直徑. 答: 866,500 英里.

[註] 日月星辰, 總稱天體 (celestial body), 我人觀察天體時, 若恰

有二視線與天體相切，且與天體中心共一平面，則此二視線所成之角曰天體之視直徑 (apparent diameter).

6. 已知月球公轉地球一次所需之時間為 27.4 日，問月球每日之角速度為若干徑？

答：約 0.22685 徑。

7. 設有三角 A, B, C . 已知 A 超過於 B 者 $\frac{\pi}{10}$ 徑， B 與 C 之和為 30 級， A 與 B 之和為 36 度，問 A, B, C 三角各若干度？

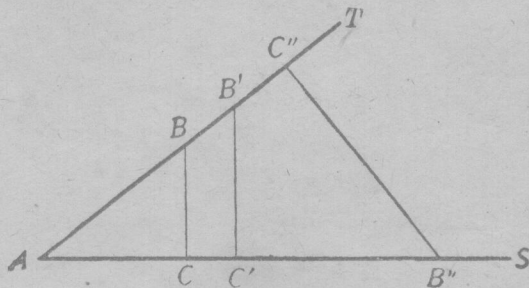
答： $27^\circ, 9^\circ, 18^\circ$ 。

8. 試證等於半徑之弧所張之圓心角為常數。

第二章

三角函數及其基本性質

§1. 銳角之三角函數 設 SAT 爲一銳角, 在 AT 上取任意點 B, B' , 作 AS 上之垂線 $BC, B'C'$; 再在 AS 上取任意點 B'' , 作 AT 上之垂線 $B''C''$. 於是三角形 $ABC, AB'C', AB''C''$ 爲相似, 蓋 A 角爲公共且各有一角爲直角也. 相似三角形之邊之比爲相等, 即



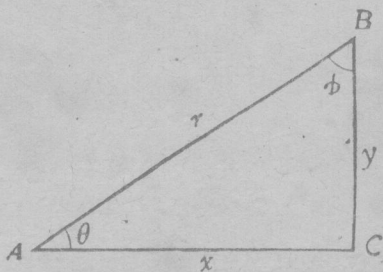
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC''}{AB''}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''}$$

此三式之分子分母各相易，其比亦等。

由此得知一角之二邊任意延長，其所成直角三角形之邊之比為不變；反之，若角變動，則各邊之比亦隨之以變，故各邊之比為角之函數 (function) 也。因比之數有六，故一角之函數為數有六。



設 ABC 為一直角三角形，其三邊之長為 r, y, x ，則我人命

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ \dots\dots\dots(A) \\ \cot \theta &= \frac{x}{y} \\ \sec \theta &= \frac{r}{x} \\ \csc \theta &= \frac{r}{y} \end{aligned} \right\}$$

此六比之值謂之三角函數 (trigonometric functions).

$\sin \theta$ 讀爲 θ 之正弦 (sine),

$\cos \theta$ 讀爲 θ 之餘弦 (cosine),

$\tan \theta$ 讀爲 θ 之正切 (tangent),

$\cot \theta$ 讀爲 θ 之餘切 (cotangent),

$\sec \theta$ 讀爲 θ 之正割 (secant),

$\csc \theta$ 讀爲 θ 之餘割 (cosecant).

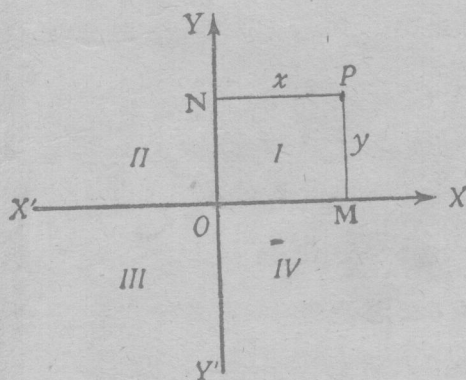
此外尚有二函數, 亦隨角以變, 即

$$\text{vers } \theta = 1 - \cos \theta$$

$$\text{covers } \theta = 1 - \sin \theta$$

前者讀爲 θ 之正矢 (versed sine), 後者讀爲 θ 之餘矢 (coverved sine).

§ 2. 坐標 設 $X'X$ 爲一水平直線, $Y'Y$ 爲在 O 點垂直於 $X'X$ 之直線; 於是在此 $X'X, Y'Y$ 平面上任何點之位置可由其與 $X'X$ 及 $Y'Y$ 二垂線之距離及方向以定之. P 點與 $X'X$ 之距離 $PM(=y)$ 曰此點之縱坐標 (ordinate), P 點與 $Y'Y$ 之距離 $PN(=x)$ 曰此點之橫坐標 (abscissa), 合縱橫二坐標曰 P 點之坐標 (coördinates). $X'X$ 及 $Y'Y$ 二正交直線曰坐標軸 (axes



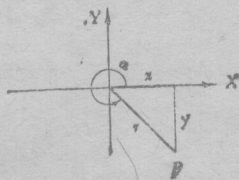
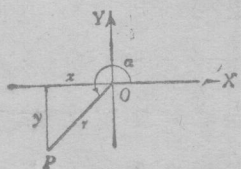
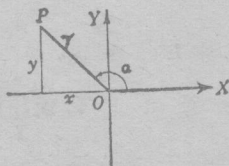
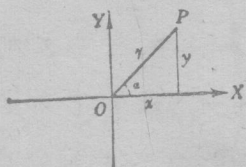
of coördinates), $X'X$ 曰 X 軸, $Y'Y$ 曰 Y 軸. O 點曰原點 (origin).

縱坐標在 $X'X$ 之上爲正, 在 $X'X$ 之下爲負; 橫坐標

在 $Y'Y$ 之右爲正, 在 $Y'Y$ 之左爲負.

坐標軸分全平面爲四象限 (quadrants), 圖中 I 爲第一象限, II 爲第二象限, III 爲第三象限, IV 爲第四象限.

§3. 任意角之三角函數 若 θ 大於一直角, 則其



函數之定義，可應用坐標軸將銳角之三角函數定義擴充而得。

角之形成，可視為由一動線，以其一端為中心，依逆時針或順時針之方向旋轉而成。此動線之最初位置曰始線 (initial line)，其最終位置曰終線 (terminal line)。由是始線及終線為角之兩邊，而動線繞以旋轉之中心點為角頂。如圖，以始線 OX 為 X 軸，過角頂 O 作 X 軸之垂線為 Y 軸。當動線由 OX 之位置旋轉至 OP 之位置時， OP 為 XOP 角之終線。

角之在何象限，視終線在何象限而定。終線在第一象限，此角在第一象限；終線在第二象限，則此角亦在第二象限；餘類推。

設在終線上取任一點 P ，以 y 為 P 點之縱坐標， x 為 P 點之橫坐標；並以 α 表 $\angle XOP$ ， r 表 P 點與原點之距離；則任意角之三角函數定義如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \tan \alpha &= \frac{y}{x} \\ \cot \alpha &= \frac{x}{y} \\ \sec \alpha &= \frac{r}{x} \\ \csc \alpha &= \frac{r}{y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B)$$