高等数学講义

下册

东北林学院数学教研組

1958. 11.

目　　录

第九章　数项級数

§52．无窮級数的概念

1．定义

設已給数列：u_1，u_2，u_3，…，則

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

称为**无穷級数**，或簡称**級数**。

其中 u_1，u_2，u_3，…，u_n，称为級数的**項**。表示級数組成規律的項，称为**公項**或**一般項**，而数列：

$$S_1=u_1,$$
$$S_2=u_1+u_2,$$
$$S_3=u_1+u_2+u_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

称为級数的**部分和**。

例：
$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \cdots\frac{1}{3^{n-1}},\ \frac{1}{3^n}\cdots$$

可組成无穷級数

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots,\ \text{或}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n},$$

它的公項是：$\frac{1}{3^n}$；

它的部分和是：$S_1=\frac{1}{3}$，$S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$，…，

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n},$$

2．級数的收斂性与發散性

一个級数的部分和 S_n，当 n 无限增加时，趋向于有限的极限 S，則称此級数为**收斂級数**，而称 S 为它的和，即：

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

显然，級数各項都是正号时，則 $S \geqslant S_n$。

当 $n \to \infty$ 时，若 S_n 沒有什么极限，或是趋向于 ∞，則称此級数为**發散級数**，这样級数，当然沒有什么和。

例 1. 几何級数:

$$a+aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

它的 n 項和为

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$$

当 $|q|<1$ 时，則这个級数均为收斂。

因为:
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-q},$$

当 $|q|=1$ 时，則这个級数发散。

因为这时級数变成：$a+a+\cdots$，或 $a-a+a-a\cdots$，它們都沒有极限。

当 $|q|>1$ 时，这个級数发散。

因为：这时 $q^n \to \infty$，因之 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$。

例 2. 調和級数的 n 項和:

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

令 $n=2^k$

則
$$S_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right]+\cdots$$

$$+\underbrace{\left[\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right]}_{2^{k-1}\text{个項}}>1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right]+$$

$$\left[\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right]=1+$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{ 个項}}=1+\frac{k}{2}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，故此級数为发散。

例 3. 試証 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$为收斂。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

解：∵
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

∴
$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}，\text{因此} \lim_{n\to\infty}S_n=1。$$

3. 級数的余項

一个收斂級数的和 S 与它前 n 項的部分和 S_n 的差，称为此級数的**余項**（或剩余，或第 n 剩余），記为 R_n，即：

$$R_n=S-S_n.$$

显然，$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}+\cdots$，而它是一个无穷小量；当然，发散級数就沒有余項。

§ 53. 級数的基本性質

1. 收斂級数：

$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$的各項乘以常数 c，仍为收斂級数，其和为 cs。

〔証〕設 $\sigma_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n=cs_n$

∴
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cs_n=c\lim_{n\to\infty}s_n=cs。$$

2. 收斂級数各对应項的代数和所成級数仍为收斂。設二收斂級数：

$$S'=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$
$$S''=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,$$

則級数

$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$仍为收斂，且其和为 $S'\pm S''$。

〔証〕令二級数 n 項和分別为 S_n'，S_n''，

而
$$\sum_{n\to1}^{n}(u_n\pm v_n)=\sigma_n$$

則
$$\sigma_n=S_n'\pm S_n'' \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}\sigma_n=S'\pm S''$$

3. 若在級数內除去或增添有限个項，或是將其中有限个項，由另外有限个項来代替，則級数的收斂或发散性不变。

〔証〕設 $S_{k+n}=u_1+u_2+\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}=A+u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}$,

$$\sigma_{m+n}=v_1+v_2+\cdots+v_m+v_{m+1}+\cdots+v_{m+n}=B+v_{m+1}+v_{m+2}+\cdots+v_{m+n},$$

其中
$$A=u_1+u_2+\cdots+u_k;\ B=v_1+v_2+\cdots+v_m,$$

而 $$u_{k+1}=v_{m+1},\ u_{k+2}=v_{m+2},\ \cdots u_{k+n}=v_{m+n}。$$

因此，若 $n\to\infty$ 时，$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}$ 的极限等于 S，

则 $$\lim_{n\to\infty} S_{k+n}=A+S;$$

因之 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{m+n}=B+S$，而二級数同时收歛。

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n})$ 不存在，

則 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{k+n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{m+n}$ 均不存在，二級数均为发散。

4. 級数收歛的必要条件：

若級数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 收歛，則級数的第 n 項趋向于零：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

［証］ 設 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，

則 $$u_n=S_n-S_{n-1}$$

因此： $$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

由此可知，当一級数的 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在，則該級数为发散； 但一級数的 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，級数不一定收歛。

例 1：級数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots,$$

$$2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}+\cdots,$$

均为发散。因为 $\lim n$；$\lim\dfrac{n}{n+1}$； $\lim\dfrac{n+1}{n}$，当 $n\to\infty$ 时，均不为零。

例 2. 級数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 的 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但此級数为发散（前証）。

§ 54. 正項級数的收歛性

1. 收歛的充分条件

正項級数（或同号級数）收歛性的必要且充分条件是它的部分和有界。

因为每一个正項級数

$$\sum_{n=1}^{n}u_n=S_n$$

的 $$u_n \geqslant 0,\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

显然: $$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}\geqslant S_n,$$

即数列 S_n 为单調增加，因此若保持有界。即它由某項起，以后都小于某数，則由极限存在的准則，和 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，所以那时級数为收斂。反之級数收斂 即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在所以 S_n 有界。

例：級数 $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}+\cdots$ 是收斂的。因为这級数S_n的表达式是比較复杂的，就难以作出当 $n\to\infty$ 时，S_n 是否有极限的决定。然而，由于

$$\frac{1}{2^k+1}<\frac{1}{2^k},\ (k=1,\ 2,\ \cdots n)$$

所以，对于任何的 $n\geqslant 1$，都有

$$S_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2_n}<1$$

这样可知应是有界的。从而級数也就是收斂的。

2．級数的比較定理

若正項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (u)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v_2+v_2+\cdots+v_n+\cdots \qquad (v)$$

从某項起，以后的各項，都有 $u_n\leqslant v_n$，若級数 (v) 收斂，則級数 (u) 也收斂；反之若級数(u)发散，則級数(v)也发散。

〔証〕二級数的部分和分别为 S_n，σ_n。

則 $$S_n\leqslant\sigma_n \quad 但 \quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma,\ 而\ \sigma\geqslant\sigma_n$$

$$\therefore \quad S_n\leqslant\sigma_n\leqslant\sigma，即\ S_n\ 为有介。$$

所以級数(u)也收斂：$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S\leqslant\sigma$。

又因为級数(u)发散，假如級数(v)为收斂，則級数(u)也必收斂，与所給条件相反，因此級数(v)也必发散。

例 1．研究P級数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots 的收斂性。$$

解：若 $p>1$ 时，則級数 $$=1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right]+\underbrace{\left[\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right]}_{4\ 項}+$$

$$+\underbrace{\left[\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right]}_{8\text{ 項}}+\cdots$$其各項不大于下例級数的对应項:

$$1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right]+\left[\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right]+\left[\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right]+\cdots=$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots,$$

而它是收斂的（因为是逐項減小的等比級数），故此时 p 級数为收斂。

若 $p\leqslant 1$ 时，則 $n^p\leqslant n$，$\therefore\ \frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$。

但級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为发散，故 p 級数此时为发散。

例 2. 級数 $1+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\frac{1}{n^n}+\cdots$ 为收斂。

因为它从第四項起，各項都小于一个減少等比級数（收斂的）

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

的对应項。

級数的比較定理不仅可以用来研究具体的級数，而且可以导出来一系列具有一定程度的一般性而且在应用上非常方便的收斂判別法。

3. 达郎伯尔判別法

I. 比值法：如果有一个正数 $r<1$ 存在，使得对于所有充分大的 n 都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant r,$$

則級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收斂；如果对于一切充分大的 n 都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant r,$$

則級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

［証］在第一种情形，对于充分大的 n，有：

$$u_{n+1}\leqslant ru_n$$

$$u_{n+2}\leqslant ru_{n+1}\leqslant r^2u_n$$

$$u_{n+3}\leqslant ru_{n+2}\leqslant r^3u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n+k}\leqslant r^k u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则級数 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}\cdots$的各項小于級数:

$$u_n r+u_n r^2+\cdots+u_n r^k+\cdots$$

的对应項。

而后者由于 $r<1$，是收歛級数，

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也是收歛級数。

在第二种情形，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 由某項起，显然构成一个不減的正数数列，而 $\lim u_n \neq 0$，所以級数是发散的。

II. 比值的极限法：如果級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，則当 $\rho<1$ 时，級数收歛；当 $\rho>1$ 时，級数发散；当 $\rho=1$ 时，不能判定。

［証］ $\rho<1$，可取 $r=\rho+\varepsilon<1$，$(\varepsilon>0)$

当 n 足够大时，恆有：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r<1,\ \left(\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon\right)$$

由判别法 1 可知：已給級数为收歛。

$\rho>1$时，可取 $r=\rho-\varepsilon>1$，$(\varepsilon>0)$

当 n 足够大时，恆有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon=r>1,$$

故已給級数为发散。

例 1. 級数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 为收歛，

因为：$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\dfrac{1}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$。

例 2. 級数$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}+\cdots$为收歛。

因为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}=\rho<1$$

例 3. 級数

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 的 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$，而級数发散。

$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$的 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，而級数收斂。

4. 柯西判别法

I. 根值判别法：如果能够找到这样一个正数 $r<1$，使得对于所有充分大的 n 都有

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant r$$

則級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收斂；如果对任意大的 n 都有：

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$$

則級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

〔証〕在第一种情形，对所有充分大的 n 都有

$$u_n\leqslant r^n$$

而級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 收斂 $(r<1)$，从而級数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收斂。

若对于任意大的 n 恆有

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$$

則 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$， 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

II. 根值的极限法

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ 存在，則

当 $\rho<1$ 时，級数收斂；当 $\rho>1$ 时，級数发散；

当 $\rho=1$ 时，不能判定。

〔証〕$\because$当n足够大时恆有 $\rho-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon\quad(\varepsilon>0)$

若 $\rho<1$，則取 $\rho+\varepsilon=r<1$

因此： $\sqrt[n]{u_n}<r<1$ 或 $u_n<r^n$，

由于級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 小于級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$（收斂的等比級数）的对应項，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为收斂；

同样，当 $\rho>1$ 时，則取 $\rho-\varepsilon=r>1$，

由此： $\sqrt[n]{u_n}>r>1$ 或 $\sqrt[n]{u_n}>1$，故級数为发散。

例 1. 級数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$为收斂。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

因为 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1。$$

例 2. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ 为收歛，

因为 $\sqrt[n]{u_n}=\frac{x}{\sqrt[n]{n!}}\to 0<1$（$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$，可用罗必达法則証出）。

例 3. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的 $\sqrt[n]{u_n}=\frac{x}{\sqrt[n]{n}}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\sqrt[n]{n}}=\frac{x}{1}=x$，（$\because\ \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{n}=1$，可用罗必达法則証出）

故此級数当 $0\leqslant x<1$ 时，为收歛。

例 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$（$\because\ \lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$）而級数为发散。

5. 柯西积分判别法

級数 $$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

的各項，是在区間 $[1,\infty]$ 上的正減連續函数 $f(x)$ 的对应于 $n=1, 2, 3, \cdots, n$ 的，各个値；即：

$$u_1=f(1),\ u_2=f(2),\ u_3=f(3),\ \cdots,\ u_n=f(n),$$

則广义积分

$$\mathrm{I}=\int_1^{\infty}f(x)dx$$

收歛或发散时，則級数 $\sum_{n\to 1}^{\infty}u_n$ 也收歛或发散。

［証］設由曲綫 $y=f(x)$，$x=1$，$x=n$ 所圍成的面积为 I_n，

則 $$I_n=\int_1^n f(x)dx$$

取 $$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

則 $$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}>I_n$$

图 158

$$u_2+u_3+u_4+\cdots+u_n<I_n$$

或 $$S_n-u_1<\int_1^n f(x)dx<S_n-u_n,$$

即 $$S_n<\int_1^n f(x)dx+u_1,\quad S_n>\int_1^n f(x)dx+u_n,$$

若： $$I=\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx\ 存在（收歛）,$$

則 $S_n<I+u_1$ 是有介的，因之它必具有极限而級数收歛。

若：$I=\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{l}f(x)dx=\infty$（或沒有极限）时。

则因 $S_n>I_n+u_n$，今 $I_n\to\infty$，故 S_n 亦为无介，所以級数发散。

例 1. 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为发散，

因为：
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\ [lnx]=\infty。$$

例 2. 用积分判别法檢查級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的收斂性。

解
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\begin{cases}\frac{1}{1-p}\left[x^{1-p}\right]_1^b, & \text{当 } p\neq1\\ \left[lnx\right]_1^b & \text{当 } p=1\end{cases}$$

因此当 $p>1$ 时，极限为零，故已給級数为收斂；

当 $p\leqslant1$ 时，极限为 ∞，故已給級数为发散。

§ 54. 任意項級数

1. 交錯級数的收斂性，来伯尼兹定理

交錯級数
$$u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

的各項的絕对值不增加，并u_n的极限等于零，则此級数为收斂。即：

1）$u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant\cdots$，2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则
$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\leqslant u_1,\ |R_n|\leqslant u_{n+1}$$

［証］∵
$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$
$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n},$$

由于式中每个括号中的差，均为正，由前式可知 S_{2n} 是随 n 的增加而单調增加。后式，可知 S_{2n} 又始終小于（或等于）u_1，

∴
$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S\leqslant u_1$$

又
$$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1},$$

∴
$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=S$$

于是已給函数的前偶数項和与奇数項和，趋近于同一个极限 S，这就是說，級数收斂于 S。

最后，不难看出剩余 R_n 可以写为：

$$R_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$$

其絕对值 $|R_n|=u_{n+1}-u_{n+2}\cdots$

也是个交錯級数。

故
$$|R_n|\leqslant u_{n+1}$$

例 1. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$为收歛，

$\because$
$$\frac{1}{n!}>\frac{1}{(n+1)!}，\text{并}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$$

例 2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$为收歛，

$\because$
$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\cdots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\cdots;\ \text{并}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

2. 任意項級数收歛性的判别法

I. 任意項級数 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$

随級数：$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$的收歛，而收歛。

〔証〕級数
$$(|u_1|+u_1)+(|u_2|+u_2)+\cdots+(|u_n|+u_n)+\cdots$$

的各項都不是負的，即：

$$|u_n|+u_n\geqslant 0$$

若
$$u_n\leqslant 0,\quad \text{则}\ |u_n|+u_n=0;$$
$$u_n>0,\quad \text{则}\ |u_n|+u_n=2u_n;$$

但
$$|u_n|+u_n\leqslant|u_n|+|u_n|=2|u_n|,$$

故級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+u_n)$ 的各項不大于級数$2\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$的各对应項而后者为收歛(題設)，

故
$$(|u_1|+u_1)+(|u_2|+u_2)+\cdots+(|u_n|+u_n)+\cdots\text{为收歛。}$$

若由此級数减去收歛級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$，則剩余級数 $u_1+u_2+\cdots+u_n$ 也收歛。

定义：若收歛級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的絕对值所組成的級数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$仍为收歛，則称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**絕对收歛級数**。当然正項收歛級数都是絕对收歛級数。

若收歛級数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$为发散級数，則称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为**条件收歛級数**。

例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 为絕对收歛級数。

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 为条件收歛級数。

II．若任意項級数：

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

各項的絶对値不大于非負項的收歛級数的各对应項：$|u_n|\leqslant u_n$，則原級数絶对收歛。

〔証〕∵ $|u_n|\leqslant v_n$， 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为收歛，

从而也知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为收歛。

由前可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收歛，并为絶对收歛。

例 1．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$ 为絶对收歛級数。

因为 $|\sin nx|\leqslant 1$，∴ $\left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$，

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 为收歛， 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right|$ 为收歛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$ 为絶对收歛級数。

例 2．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 为絶对收歛級数。

因为：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0<1$$

故已給級数为絶对收歛級数。

3．絶对收歛級数与条件收歛級数的特性

I．在一个絶对收歛級数中，可以随意变动它們各項的排列順序，而其和不变。

II．絶对收歛級数的和，差仍为絶对收歛級数。

III．絶对收歛級数，

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=S$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=\sigma$$

它們的乘积 $u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1)+\cdots$

仍为絶对收歛級数，并其积为 $S\sigma$。

IV．条件收歛級数的項，加以适当的重編便可以使它的和等于一任意給定的数，或

者使它变为发散級数（梨曼定理）。

以上可知，一切有限和的性质都可以搬到絕对收歛級数，即这种級数可以按有限和的运算法則进行。在条件收歛級数来說，就不能完全这样。

4. 級数收歛性判別法的总結。 由以上所述种种**数項級数收歛性的判別法，可总結如下**

I. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正項級数，欲判定其收歛性

第一步：先求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$，如不为零，級数发散，問題已解決；如为零，即轉：

第二步：求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，如 $\rho<1$，級数收歛；如 $\rho>1$ 或为 ∞，級数发散；問題已解決。如 $\rho=1$，再轉：

第三步：应用比較原理，如各項递減应用积分法。

II. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意項級数，可：

第一步：同上第一步；

第二步：先檢查級数是否是交錯級数，如为交錯級数，适合，

$$|u_1|\geqslant|u_2|\geqslant|u_3|\geqslant\cdots,\ 并\ \lim_{n\to\infty} u_n=0,$$

則級数收歛，問題解決；如不适合，即轉：

第三步：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$，如 $\rho<1$，級数絕对收歛；如 $\rho>1$ 或为 ∞，級数发散；如 $\rho=1$，再轉：

第四步：如各項絕对值递減，用积分法，若 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 收歛，則級数絕对收歛。如积分发散，則級数收歛性不能断定。但不能为絕对收歛。

第十章 函数項級数

§55. 函数項級数

1. 定义:

已給級数 $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 中的各項，为定义于自变量的某个区間上的函数，称此級数为**函数項級数**。它的公項 $u_n(x)$ 是两个宗标n，x的函数。

2. 收斂性

使函数項級数收斂的 $x=x_0$ 的点，称为**收斂点**，級数的一切收斂点的集合称为**收斂域**，它通常是 ox——軸上的一段（区間）或全部。級数的收斂域显然必須是一切函数 $u_n(x)$（級数的一切項）的公共定义域。

假如級数在它的收斂域上有它完全确定的和，則这个和显然是依賴于 x，因此是 x 的函数，以 $f(x)$ 表示:

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

这就是說上式右边級数在某区域（收斂域）上定出或表示出函数 $f(x)$；当然也可以說函数 $f(x)$ 在某区域上展开为右边的无穷級数。

例: $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$，在 $(-1,1)$ 是收斂的，在此区間外是发散的，其和为:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$

函数項級数的 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S_n(x)$ 称为級数的**部分和**（n 項和）它与級数收斂和 $f(x)$ 的差称为級数的**剩余**（余項）。

$$f(x)-S_n(x)=R_n(x)$$

而在收斂域的每一点x都有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

3. 均匀收斂

由前可知級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收斂和为 $f(x)$，則給任一正数 ε，对于 $[a,b]$ 上的每一点 x 就能找到一个正数 N，使得当 $n>N$ 时，有不等式 $|R_n(x)|<\varepsilon$，这个N不独依賴于 ε，一般的它还依賴于 x，就是对于不同的 x，可能要有不同的 N，原因是級数在各个 x 收斂有快有慢。对于一个級数如果我們能找到这样一个数 N 使得它只依賴于 ε 而不依賴于 x 时，則給它一个特殊名字:

I. **定义:** $f(x)$ 所表示的級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收斂，而对于每一个任意小的

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com