

高等数学讲义

下册

东北林学院数学教研组

1958. 11.

目 录

第九章 数项级数

§52. 无穷级数的概念 1

1. 定义
2. 级数的收敛性与发散性
3. 级数的余项

§53. 级数的基本性质 3

1. 收敛级数
2. 收敛级数的和与差仍为收敛
3. 在级数内增加或减少有限项后, 级数的收敛性和发散性不变
4. 级数收敛的必要条件

§54. 正项级数的收敛性 4

1. 级数的充分条件
2. 级数的比较定理
3. 达郎伯尔判别法
4. 柯西判别法
5. 柯西积分判别法

§55. 任意项级数 10

1. 交错级数的收敛, 莱伯尼兹判别法
2. 任意项级数收敛性的判别法
3. 绝对收敛级数与条件收敛级的特性
4. 级数收敛性判别法的总结

第十章 函数项级数

§56. 函数项级数 11

1. 定义
2. 收敛性
3. 均匀收敛
4. 均匀收敛级数的基本性质

§57. 幂级数 17

1. 定义
2. 亚伯尔定理
3. 幂级数的收敛区间与收敛半径
4. 幂级数的性质

§58. 函数的幂级数展开式 22

1. 概念

2. 多项式的台劳公式

3. 任意函数的台劳公式与马克劳林公式

4. 台劳级数与马克劳林级数

5. 简单函数的幂级数展开式

6. 利用级数计算定积分

§58. 尤拉公式 30

1. 尤拉公式
2. 德马佛公式

第十一章 福利哀级数

§60. 三角级数 32

1. 三角级数
2. 三角函数正交性

§61. 福利哀级数 33

1. 尤拉——福利哀公式
2. $f(x)$ 的福利哀级数
3. 狄里希来条件及定理
4. 偶、奇函数的福利哀级数
5. 函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上的三角级数展开式

第十二章 偏导数及其应用

§62. 多元函数 40

1. 概念
2. 几何意义
3. 定义域及点的 δ 邻域
4. 极限与连续

§63. 偏导数 42

1. 一阶, 偏导数的概念
2. 高阶偏导数

§64. 全增量与全微分 44

1. 全增量
2. 全微分

§65. 复合函数的微分法 48

1. 复合函数的微分法

2. 一阶微分形式的不变性

§66. 隐函数的微分法 51

1. $f(x, y, z) = 0$

2. $F(x, y, z) = 0$ 或 $z = \varphi(x, y)$ 时

§67. 多元函数的中值定理 52

1. 二元函数的拉格郎日中值定理

2. 二元函数的台劳中值定理

3. 二元函数的台劳级数

§68. 二元函数的极值 54

1. 定义

2. 多元函数存在的必要条件

3. 二元函数极值存在的充分条件

§69. 用最小二乘法建立经验公式 59

§70. 空间曲线的切线作法平面 61

1. 定义

2. 曲线 $x = f(t), y = \varphi(t), z = \psi(t)$ 的切线作法平面

3. 曲线 $F(x, y, z) = 0$ 时的切线作法平面

$\Phi(x, y, z) = 0$

§71. 曲面的切平面作法线 63

1. 曲面 $F(x, y, z)$ 的切平面作法线

2. 曲面 $z = f(x, y)$ 的切平面作法线

第十三章 常微分方程

§72. 微分方程的意义 66

1. 概念

2. 定义

3. 微分方程的阶与次

4. 微分方程解 (积分), 通解、特解。

§73. 一阶微分方程

1. 一阶微分方程的解的存在定理

2. 一解微分方程的解法, 可分离变量的, 齐次式的, 线性的, 可化为线性的, 恰当方程。

3. 一阶微分方程应用举例

§74. 二阶微分方程特殊型的解法 77

1. $y'' = f(x)$

2. $y'' = f(y)$

3. 可用降一阶的办法求解,

§75. 高阶线性微分方程 82

1. 二阶线性微分方程的性质

2. 常系数二阶线性微分方程的解法

3. 微分方程组

§76. 级数能法 96

1. 一阶微分方程

2. 二阶线性微分方程 $y'' + py' + Qy = 0$ 的 P, Q 为多项式或展为 x 的幂级数

3. 二阶线性方程 $y'' + py' + Qy = 0$ 的 XP 和 X^2Q 可展为幂级数

第十四章 重积分

§77. 二重积分 100

1. 二重积分的概念

2. 二重积分的意义

3. " " " 几何意义

§78. 二重积分的性质 102

§79. 二重积分的计算 103

1. 积分域为矩形时

2. " " " 任意时

3. 二重积分的极坐标计算

§80. 三重积分 111

1. 概念

2. 定义

3. 几何和物理意义

4. 三重积分的计算

5. 三重积分的柱面坐标和球面坐标

§81. 重积分的应用 118

1. 力矩

2. 重心

3. 转动惯量

第十五章 曲线积分与曲面积分

§82. 曲线积分的概念 122

1. 概念

2. 曲线积分的定义

§83. 曲线积分的计算 124

§84. " " " 性质 125

§85. 曲面积分及其计算 128

1. 曲面积分的概念

2. 计算公式

3. 奥斯特洛格拉斯基公式

4. 斯托克斯公式

第九章 数项级数

§ 52. 无穷级数的概念

1. 定义

设已给数列: u_1, u_2, u_3, \dots , 则

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

称为**无穷级数**, 或简称**级数**。

其中 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, 称为级数的**项**。表示级数组成规律的项, 称为**公项**或**一般项**, 而数列:

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

称为级数的**部分和**。

例:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^{n-1}}, \frac{1}{3}, \dots$$

可组成无穷级数

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots, \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

它的公项是: $\frac{1}{3^n}$;

它的部分和是: $S_1 = \frac{1}{3}, S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}, \dots$

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n},$$

2. 级数的收敛性与发散性

一个级数的部分和 S_n , 当 n 无限增加时, 趋向于有限的极限 S , 则称此级数为**收敛级数**, 而称 S 为它的和, 即:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

显然，级数各项都是正号时，则 $S \geq S_n$ 。

当 $n \rightarrow \infty$ 时，若 S_n 没有什么极限，或是趋向于 ∞ ，则称此级数为发散级数，这样级数，当然没有什么和。

例 1. 几何级数：

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

它的 n 项和为

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

当 $|q| < 1$ 时，则这个级数均为收敛。

因为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

当 $|q| = 1$ 时，则这个级数发散。

因为这时级数变成： $a + a + \dots$ ，或 $a - a + a - a \dots$ ，它们都没有极限。

当 $|q| > 1$ 时，这个级数发散。

因为：这时 $q^n \rightarrow \infty$ ，因之 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ 。

例 2. 调和级数的 n 项和：

$$S_n = \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

令 $n = 2^k$

$$\text{则 } S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right] + \left[\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right] + \dots$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} \right]}_{2^{k-1} \text{ 个项}} > 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} \right] +$$

2^{k-1} 个项

$$\left[\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} \right] + \dots + \left[\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} \right] = 1 +$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k \text{ 个项}} = 1 + \frac{k}{2}$$

k 个项

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在，故此级数为发散。

例 3. 试证 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ 为收敛。

解: $\therefore \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ 因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1. \end{aligned}$$

3. 級数的余项

一个收敛级数的和 S 与它前 n 项的部分和 S_n 的差, 称为此级数的余项 (或剩余, 或第 n 项剩余), 记为 R_n , 即:

$$R_n = S - S_n.$$

显然, $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} + \cdots$, 而它是一个无穷小量; 当然, 发散级数就没有余项。

§ 53. 级数的基本性质

1. 收敛级数:

$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 的各项乘以常数 c , 仍为收敛级数, 其和为 cs 。

[证] 设 $\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = cs_n$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = cs.$$

2. 收敛级数各对应项的代数和所成级数仍为收敛。设二收敛级数:

$$S' = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$S'' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots,$$

则级数

$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$ 仍为收敛, 且其和为 $S' \pm S''$ 。

[证] 令二级数 n 项和分别为 S'_n, S''_n ,

而

$$\sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = \sigma_n$$

则

$$\sigma_n = S'_n \pm S''_n \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S' \pm S''$$

3. 若在级数内除去或增添有限个项, 或是将其中有限个项, 由另外有限个项来代替, 则级数的收敛或发散性不变。

[证] 设 $S_{k+n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} = A + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n}$,

$$\sigma_{m+n} = v_1 + v_2 + \cdots + v_m + v_{m+1} + \cdots + v_{m+n} = B + v_{m+1} + v_{m+2} + \cdots + v_{m+n},$$

其中

$$A = u_1 + u_2 + \cdots + u_k; \quad B = v_1 + v_2 + \cdots + v_m,$$

而 $u_{m+1} = v_{m+1}, u_{m+2} = v_{m+2}, \dots, u_{k+n} = v_{m+n}。$

因此, 若 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+n}$ 的极限等于 S ,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{k+n} = A + S;$

因之 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{m+n} = B + S$, 而二級数同时收敛。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+n})$ 不存在,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{k+n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{m+n}$ 均不存在, 二級数均为发散。

4. 級数收敛的必要条件:

若級数 $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ 收敛, 則級数的第 n 項趋向于零: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$

[証] 設 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$

則 $u_n = S_n - S_{n-1}$

因此: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$

由此可知, 当一級数的 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 不存在, 則該級数为发散; 但一級数的

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 級数不一定收敛。

例 1: 級数

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots, \\ & \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots, \\ & 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} + \dots, \end{aligned}$$

均为发散。因为 $\lim n; \lim \frac{n}{n+1}; \lim \frac{n+1}{n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 均不为零。

例 2. 級数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 的 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 但此級数为发散 (前証)。

§ 54. 正項級数的收敛性

1. 收敛的充分条件

正項級数 (或同号級数) 收敛性的必要且充分条件是它的部分和有界。

因为每一个正項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_n$$

的 $u \geq 0, (n=1, 2, 3, \dots)$

显然: $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n,$

即数列 S_n 为单调增加, 因此若保持有界。即它由某项起, 以后都小于某数, 则由极限存在的准则, 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 所以那时级数为收敛。反之级数收敛即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在所以 S_n 有界。

例: 级数 $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} + \dots$ 是收敛的。因为这级数 S_n 的表达式是比较复杂的, 就难以作出当 $n \rightarrow \infty$ 时, S_n 是否有极限的决定。然而, 由于

$$\frac{1}{2^k+1} < \frac{1}{2^k}, (k=1, 2, \dots, n)$$

所以, 对于任何的 $n \geq 1$, 都有

$$S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

这样可知应是有界的。从而级数也就是收敛的。

2. 级数的比较定理

若正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (v)$$

从某项起, 以后的各项, 都有 $u_n \leq v_n$, 若级数 (v) 收敛, 则级数 (u) 也收敛; 反之若级数 (u) 发散, 则级数 (v) 也发散。

[证] 二级数的部分和分别为 S_n, σ_n 。

则 $S_n \leq \sigma_n$ 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, 而 $\sigma \geq \sigma_n$

$\therefore S_n \leq \sigma_n \leq \sigma$, 即 S_n 为有界。

所以级数 (u) 也收敛: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq \sigma$ 。

又因为级数 (u) 发散, 假如级数 (v) 为收敛, 则级数 (u) 也必收敛, 与所给条件相反, 因此级数 (v) 也必发散。

例 1. 研究 P 级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \text{的收敛性。}$$

解: 若 $p > 1$ 时, 则级数 $= 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right] + \underbrace{\left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right]}_{\dots \dots 4 \text{ 项}}$

+ $\underbrace{\left[\frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{15^p} \right]}_{8 \text{ 項}} + \dots$ 其各項不大于下列級数的对应項:

$$1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right] + \left[\frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{4^p} \right] + \left[\frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} \right] + \dots = \\ = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^3 + \dots,$$

而它是收斂的 (因为它是逐項減小的等比級数), 故此时 p 級数为收斂。

若 $p \leq 1$ 时, 則 $n^p \leq n$, $\therefore \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ 。

但級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为发散, 故 p 級数此时为发散。

例 2. 級数 $1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$ 为收斂。

因为它从第四項起, 各項都小于一个減少等比級数 (收斂的)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

的对应項。

級数的比較定理不仅可以用来研究具体的級数, 而且可以导出来一系列具有一定程度的一般性而且在应用上非常方便的收斂判別法。

3. 达郎伯尔判別法

I. 比值法: 如果有一个正数 $r < 1$ 存在, 使得对于所有充分大的 n 都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r,$$

則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂; 如果对于一切充分大的 n 都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq r,$$

則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

[証] 在第一种情形, 对于充分大的 n , 有:

$$u_{n+1} \leq r u_n$$

$$u_{n+2} \leq r u_{n+1} \leq r^2 u_n$$

$$u_{n+3} \leq r u_{n+2} \leq r^3 u_n$$

.....

$$u_{n+k} \leq r^k u_n$$

.....

則級數 $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} \dots$ 的各項小於級數:

$$u_n r + u_n r^2 + \dots + u_n r^k + \dots$$

的對應項。

而後者由於 $r < 1$, 是收斂級數,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也是收斂級數。

在第二種情形, 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 由某項起, 顯然構成一個不減的正數數列, 而 $\lim u_n \neq 0$, 所以級數是發散的。

II. 比值的極限法: 如果級數 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 則當 $\rho < 1$ 時, 級數收斂; 當 $\rho > 1$ 時, 級數發散; 當 $\rho = 1$ 時, 不能判定。

[証] $\rho < 1$, 可取 $r = \rho + \varepsilon < 1$, ($\varepsilon > 0$)

當 n 足夠大時, 恆有:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r < 1, \quad \left(\rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon \right)$$

由判別法 1 可知: 已給級數為收斂。

$\rho > 1$ 時, 可取 $r = \rho - \varepsilon > 1$, ($\varepsilon > 0$)

當 n 足夠大時, 恆有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon = r > 1,$$

故已給級數為發散。

例 1. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 為收斂,

因為: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.

例 2. 級數 $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$ 為收斂。

因為: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} = \rho < 1$

例 3. 級數

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 的 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, 而級數發散。

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ 的 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, 而级数收敛。

4. 柯西判别法

I. 根值判别法: 如果能够找到这样一个正数 $r < 1$, 使得对于所有充分大的 n 都有

$$\sqrt[n]{u_n} \leq r$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 如果对任意大的 n 都有:

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

[证] 在第一种情形, 对所有充分大的 n 都有

$$u_n \leq r^n$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛 ($r < 1$), 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

若对于任意大的 n 恒有

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

II. 根值的极限法

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ 存在, 则

当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛; 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散;

当 $\rho = 1$ 时, 不能判定。

[证] \because 当 n 足够大时恒有 $\rho - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)

若 $\rho < 1$, 则取 $\rho + \varepsilon = r < 1$

因此: $\sqrt[n]{u_n} < r < 1$ 或 $u_n < r^n$,

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 小于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ (收敛的等比级数) 的对应项,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛;

同样, 当 $\rho > 1$ 时, 则取 $\rho - \varepsilon = r > 1$,

由此: $\sqrt[n]{u_n} > r > 1$ 或 $\sqrt[n]{u_n} > 1$, 故级数为发散。

例 1. 级数 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ 为收敛。

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$.

例 2. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ 为收敛,

因为 $\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 < 1$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, 可用罗必达法则证出).

例 3. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的 $\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{n}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[n]{n}} = \frac{x}{1} = x$, ($\because \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 可用罗必达法则证出)

故此級数当 $0 \leq x < 1$ 时, 为收敛.

例 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ ($\because \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$) 而級数为发散.

5. 柯西积分判别法

級数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

的各项, 是在区间 $[1, \infty]$ 上的正减连续函数 $f(x)$ 的对应于 $n=1, 2, 3, \dots, n$ 的, 各个值; 即:

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), u_3 = f(3), \dots, u_n = f(n),$$

则广义积分

$$I = \int_1^{\infty} f(x) dx$$

收敛或发散时, 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛或发散.

[证] 設由曲线 $y=f(x)$, $x=1$, $x=n$ 所围成的

面积为 I_n ,

則
$$I_n = \int_1^n f(x) dx$$

取
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

則
$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} > I_n$$

$$u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n < I_n$$

图 158

或

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x) dx < S_n - u_n,$$

即

$$S_n < \int_1^n f(x) dx + u_1, S_n > \int_1^n f(x) dx + u_n,$$

若:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx \text{ 存在 (收敛),}$$

則 $S_n < I + u_1$ 是有界的, 因之它必具有极限而級数收敛.

若: $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \infty$ (或没有极限) 时。

则因 $S_n > I_n + u_n$, 今 $I_n \rightarrow \infty$, 故 S_n 亦为无界, 所以级数发散。

例 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b}$ 为发散,

因为:
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln x]_1^n = \infty.$$

例 2. 用积分判别法检查级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的收敛性。

解
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{1-p} [x^{1-p}]_1^b, & \text{当 } p \neq 1 \\ [\ln x]_1^b, & \text{当 } p = 1 \end{cases}$$

因此当 $p > 1$ 时, 极限为零, 故已给级数为收敛;

当 $p \leq 1$ 时, 极限为 ∞ , 故已给级数为发散。

§ 54. 任意项级数

1. 交错级数的收敛性, 来伯尼兹定理

交错级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

的各项的绝对值不增加, 并 u_n 的极限等于零, 则此级数为收敛。即:

1) $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq u_1, \quad |R_n| \leq u_{n+1}$$

[证] $\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$
 $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n},$

由于式中每个括号中的差, 均为正, 由前式可知 S_{2n} 是随 n 的增加而单调增加。

后式, 可知 S_{2n} 又始终小于 (或等于) u_1 ,

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \leq u_1$

又 $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1},$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = S$

于是已给函数的前偶数项和与奇数项和, 趋近于同一个极限 S , 这就是说, 级数收敛于 S 。

最后, 不难看出剩余 R_n 可以写为:

$$R_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \dots)$$

其绝对值 $|R_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \dots$

也是个交错级数。

故

$$|R_n| \leq u_{n+1}$$

例 1. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} + \dots$ 为收敛,

$$\therefore \frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!}, \text{ 并 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

例 2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ 为收敛,

$$\therefore 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots; \text{ 并 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. 任意项级数收敛性的判别法

I. 任意项级数 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$

随级数: $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$ 的收敛, 而收敛。

[证] 级数 $(|u_1| + u_1) + (|u_2| + u_2) + \dots + (|u_n| + u_n) + \dots$

的各项都不是负的, 即:

$$|u_n| + u_n \geq 0$$

若

$$u_n \leq 0, \quad \text{则 } |u_n| + u_n = 0;$$

$$u_n > 0, \quad \text{则 } |u_n| + u_n = 2u_n;$$

但

$$|u_n| + u_n \leq |u_n| + |u_n| = 2|u_n|,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + u_n)$ 的各项不大于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ 的各对应项而后者为收敛(题设),

故 $(|u_1| + u_1) + (|u_2| + u_2) + \dots + (|u_n| + u_n) + \dots$ 为收敛。

若由此级数减去收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, 则剩余级数 $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 也收敛。

定义: 若收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的绝对值所组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 仍为收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛级数。

当然正项收敛级数都是绝对收敛级数。

若收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 为发散级数, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛级数。

例 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ 为绝对收敛级数。

而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛级数。

II. 若任意项级数:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

各项的绝对值不大于非负项的收敛级数的各对应项: $|u_n| \leq v_n$, 则原级数绝对收敛。

[证] $\because |u_n| \leq v_n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为收敛,

从而也知道 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 为收敛。

由前可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 并为绝对收敛。

例 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 为绝对收敛级数。

因为 $|\sin nx| \leq 1, \therefore \left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 为收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{2^n} \right|$ 为收敛,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 为绝对收敛级数。

例 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 为绝对收敛级数。

因为: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$

故已给级数为绝对收敛级数。

3. 绝对收敛级数与条件收敛级数的特性

I. 在一个绝对收敛级数中, 可以随意变动它们各项的排列顺序, 而其和不变。

II. 绝对收敛级数的和, 差仍为绝对收敛级数。

III. 绝对收敛级数,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots = \sigma$$

它们的乘积 $u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots$

仍为绝对收敛级数, 并其积为 $S\sigma$ 。

IV. 条件收敛级数的项, 加以适当的重编便可以使它的和等于一任意给定的数, 或

者使它变为发散级数 (黎曼定理)。

以上可知, 一切有限和的性质都可以搬到绝对收敛级数, 即这种级数可以按有限和的运算法则进行。在条件收敛级数来说, 就不能完全这样。

4. 级数收敛性判别法的总结。由以上所述种种数项级数收敛性的判别法, 可总结如下

I. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 欲判定其收敛性

第一步: 先求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, 如不为零, 级数发散, 问题已解决; 如为零, 即转:

第二步: 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 如 $\rho < 1$, 级数收敛; 如 $\rho > 1$ 或为 ∞ , 级数发散; 问题已解决。如 $\rho = 1$, 再转:

第三步: 应用比较原理, 如各项递减应用积分法。

II. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数, 可:

第一步: 同上第一步;

第二步: 先检查级数是否是交错级数, 如为交错级数, 适合,

$$|u_1| \geq |u_2| \geq |u_3| \geq \dots, \text{ 并 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则级数收敛, 问题解决; 如不适合, 即转:

第三步: 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, 如 $\rho < 1$, 级数绝对收敛; 如 $\rho > 1$ 或为 ∞ , 级数发散; 如 $\rho = 1$, 再转:

第四步: 如各项绝对值递减, 用积分法, 若 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 收敛, 则级数绝对收敛。如积分发散, 则级数收敛性不能断定。但不能为绝对收敛。

第十章 函数项级数

§ 55. 函数项级数

1. 定义:

已给级数 $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ 中的各项, 为定义于自变量的某个区间上的函数, 称此级数为**函数项级数**。它的公项 $u_n(x)$ 是两个宗标 n, x 的函数。

2. 收敛性

使函数项级数收敛的 $x = x_0$ 的点, 称为**收敛点**, 级数的一切收敛点的集合称为**收敛域**, 它通常是 ox ——轴上的一段(区间)或全部。级数的收敛域显然必须是一切函数 $u_n(x)$ (级数的一切项) 的公共定义域。

假如级数在它的收敛域上有它完全确定的和, 则这个和显然是依赖于 x , 因此是 x 的函数, 以 $f(x)$ 表示:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

这就是说上式右边级数在某区域(收敛域)上定出或表示出函数 $f(x)$; 当然也可以说函数 $f(x)$ 在某区域上展开为右边的无穷级数。

例: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$, 在 $(-1, 1)$ 是收敛的, 在此区间外是发散的, 其和为:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

函数项级数的 $\sum_{n=1}^n u_n(x) = S_n(x)$ 称为级数的**部分和** (n 项和) 它与级数收敛和 $f(x)$ 的差称为级数的**剩余** (余项)。

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

而在收敛域的每一点 x 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

3. 均匀收敛

由前可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛和为 $f(x)$, 则给任一正数 ε , 对于 $[a, b]$ 上的每一点 x 就能找到一个正数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有不等式 $|R_n(x)| < \varepsilon$, 这个 N 不依赖于 ε , 一般的它还依赖于 x , 就是对于不同的 x , 可能要有不同的 N , 原因是级数在各个 x 收敛有快有慢。对于一个级数如果我们能找到这样一个数 N 使得它只依赖于 ε 而不依赖于 x 时, 则给它一个特殊名字:

I. **定义:** $f(x)$ 所表示的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收敛, 而对于每一个任意小的