上海市师范教研室编

数学竞赛辅导

上海交通大学出版社

数学竞赛辅导

上海市师范教研室　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

数学竞赛活动，常被人们喻为思维的体操。它能巩固学生所学的知识，拓宽学生的知识面，发展学生的抽象思维，培养学生的学习兴趣；它也是促进数学教学，提高学生数学水平的重要途径。本书共分为二十三个专题，以专题辅导形式，详尽阐述青少年数学竞赛的有关基础知识；精选、评析一些典型例题；布置一定数量的练习题，并附有全部答案或提示。全书溶知识性、技巧性、趣味性和竞技性于一体，是一册青少年参加数学竞赛、提高数学学习水平的良好读物。

本书可供中等师范学校师生学习使用，也可供广大小学、中学师生及家长辅导子女参考。

(沪)新登字20[illegible]号

数学竞赛辅导

出版：上海交通大学出版社

(上海市华山路1954号，2000[illegible])

印刷：江苏常熟文化印刷厂

开本：787×1092（毫米） 1/32

印张：11.75

字数：263000

版饮：1994年3月 第1版

印次：1994年4月 第1次

印数：1—14000

ISBN 7-313-01328-0/O·1

定价：7.10 元

前　　言

国家教委颁布的三年制师范学校教学方案指出：选修课是师范学校教学活动的重要组成部分，它可以使师范学校教学主动适应当地经济、文化发展的需要；可以拓宽学生的知识，发展学生广泛的兴趣和特长；可以进一步培养学生从事小学教育教学工作的能力，特别是担任多学科教学的能力。开展小学数学竞赛的指导，正是数学选修课的课题之一。

数学竞赛活动，常被人们喻为思维的体操，它能巩固学生所学的知识、拓宽学生的知识面、发展学生的思维、培养学生的兴趣，它也是促进数学教学、提高学生数学水平的重要途径。

本书以广大的中师生、小学数学教师以及中小学生为对象，以专题讲座的形式，介绍在青少年数学竞赛中经常遇到的一些问题。每个专题首先阐述有关的基础知识，然后介绍一些典型的例题，最后再布置一定数量的习题，便于教师的辅导及学生的自学，它既可以作为师范学校选修课教材，又能作为青少年数学爱好者的课外读物。

本书由邵之泉、叶箐主编；王新六撰写第一章，俞孝武撰写第二、六章，王之骏撰写第三章，吴德钧撰写第四章，邵清泉撰写第五章，顾志刚撰写第七、二十三章，朱明刚撰写第八章，孙惠琴撰写第九章，王文林撰写第十章，尤濑卿撰写第十一章，林治忠撰写第十二章，潘华敏撰写第十三章，陈培恩撰写第十四、十六章，费青云撰写第十五、二十一章，陈龙撰写第十

七、十八章，叶箐撰写第十九章，朱瑄撰写第二十、二十二章；叶箐、费青云、陈培恩、顾志刚校稿。由于成书时间仓促，书中错误之处，恳请广大读者批评指正。

上海市师范教研室

1993.7

目　　录

一、数的整除性

与整数有关的问题所涉及到的数学概念有整数的整除性、奇数与偶数、质数与合数、最大公约数与最小公倍数、有余数除法等。它在小学教材中所占的比重虽然不是很多，但是它的应用却很广泛。无论在小学算术中，还是在中学代数中，甚至在高等数学中都常用到它。同时在国内外各种数学竞赛中有许多试题与整数性质有关，所以与整数有关的问题是数学中很重要的基础知识，这节主要是介绍数的整除性及有余数除法。

1．基础知识

(1) 整除

若一个整数 a 除以自然数 b 所得到的商是整数 q 而没有余数(即余数为零)时，则称 a 能被 b 整除，或 b 整除 a，记作 $b|a$。这时我们称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数。例如，$21\div7=3$，就说21能被7整除，或7整除21，可记作 $7|21$。这时称21是7的倍数，7是21的约数。从上可知，0是任何数的倍数，1是任何数的约数。

(2) 整除的一些性质

1) 如果 $a|b$，$b|c$，那么 $a|c$。

2) 如果 $a|b$，$a|c$，那么 $a|(b\pm c)$。

3) $a|(b+c)$，$a|b$，那么 $a|c$。

4) 如果 $a|b$，$c\neq0$，那么 $ac|bc$。

5) 如果 c 是质数,并且 $c|a\cdot b$, 那么 $c|a$ 或 $c|b$。

6) 如果 a 和 b 互质,并且 $a|bc$, 那么 $a|c$。

(3) 能被某些数整除的数的特征

1) 末位数字是2(或5)的倍数的整数能被2(或5)整除,如788能被2整除;1235能被5整除。

2) 末两位数字是4(或25) 的倍数的整数能被4(或25)整除,如5728能被4整除;1275能被25整除。

3) 末三位数字是8(或125) 的倍数的整数能被8(或125)整除,如21336能被8整除;7250能被125整除。

4) 各位上数字之和能被3(或9) 整除的整数能被3(或9)整除,如315能被3、9整除($3+1+5=9$)。

5) 一个自然数奇数位上数字之和与偶数位上数字之和的差(大数减去小数)是11的倍数(包括0),那么这个数能被11整除,如71940($(7+9+0-(1+4)=11)$。

6) 一个自然数的末三位数与末三位前的数之差能被7(或11或13) 整除的整数能够被7(或11或13) 整除,如728518能被7整除($728-518=210$)。

(4) 带余除法

一个整数 a 除以一个不等于零的自然数 b, 商为 q, 而余数为 r 时,可写成 $a=b\cdot q+r(r<b)$。例如 $23\div4=5$ 余3,这个结果我们可以写成 $23=4\times5+3$。其中3就是23除以4所得的余数。

(5) 带余除法中余数的特征

一个整数 a 被自然数 b 除时,所得的余数有0、1、2…$b-1$, 共 b 种可能。例如一个整数 a 被2除时,余数只可能是0或1两种;一个整数被3除时,余数只可能是0、1、2三种。

2. 例题

(1) 求出能被12整除的形如$9A4B$的四位数

解：因为$12=4\times3$，所以这个四位数$9A4B$一定能分别被3和4整除．根据能被4整除的数的特征，所以这个数的末二位数$4B$应该是4的倍数，所以个位上的数字B只能取0、4、8．又根据能被3整除的数的特征，当个位上数字B取0时，则$9+A+4+B=9+A+4+0=13+A$，$13+A$应该是3的倍数，所以A只能取2、5、8．同理可知，当个位上数字B取4时，百位上数字A只能取1、4、7；当个位上数字B取8时，百位上数字A只能取0、3、6、9．由上可知所求的四位数是9240、9540、9840；9144、9444、9744；9348、9648、9948、9048．

(2) 已知六位数$7C36D5$是1375的倍数，求这个六位数．

解：因为$1375=11\times125$，这个六位数是1375的倍数，所以它能分别被11和125整除．根据能被125整除的数的特征，所以这个数末三位$6D5$一定是125的倍数，故可推知$D=2$．因此这个六位数应该是$7C3625$．根据能被11整除的数的特征，可知道$(7+3+2)-(C+6+5)=1-C$应是11的倍数，所以$C=1$，由上可知所求的六位数是713625．

(3) 有一个六位数能被5整除，首位是6，其余各位上的数字互不相同，这个六位数最小是多少？这个六位数最大又是多少？

解：要使这个六位数最小，必须把0、1、2、3、4依次排列在6的后面，这样可以得到各数位上数字互不相同的最小六位数601234，但是这个数不能被5整除，为了求得能被5整

除的最小六位数，应该修改个位上数字“4”为“5”。所以这个六位数是601235。同理，要使这个六位数最大，应把数9、8、7、5、4依次排在6的后面(去掉6因为与首位是相同数字)，这样可以得到各数位上数字互不相同的最大六位数698754。为了求得能被5整除的最大六位数，应该修改个位上数字“4”为“0”。所以这个六位数是698750。

(4) 求证一个前三位与后三位顺次相等的六位数一定是7、11和13的倍数。

证：设这个六位数为$abcabc$，因为$abcabc = abc \times 1000 + abc = abc(1000+1) = abc \times 1001$，而$1001 = 7 \times 11 \times 13$，所以这样的六位数一定是7、11、13的倍数。

(5) 在568后面补上三个数字，组成一个六位数，使它能被3、4、5整除，并且数值尽可能的小。

解：设所求的六位数为$568abc$，(a、b、c分别表示百位、十位、个位上的数字)。

因为$568abc$能被5整除，所以c只能是0或5；因为$568abc$能被4整除，所以bc是4的倍数，于是c只能取0。要使$568abc$的数值尽可能小，故先考虑取$a=0$。由于$568abc$被3整除，所以$5+6+8+0+b+0=19+b$应该是3的倍数，那么b只可取2, 5, 8，再考虑bc是4的倍数及$568abc$尽可能小，故b只能取2，所以这个六位数是568020。

(6) 1993年6月1日是星期二，问10月1日是星期几：

解：从六月一日算起到十月一日，一共有

$$30+31+31+30=122(\text{天})。$$

因为$122 \div 7 = 17$余3，6月1日这天是星期二，而$2+3=5$，所以10月1日是星期五。

(7) 在下列括号内填入适当的数字，使适合所给条件：

1) $71\div(\quad)=(\quad)$余4;

2) $189\div(\quad)=(\quad)$余2.

解: 1) 这题是已知被除数，余数求除数与商数的问题，根据有余数除法概念可知：商数×除数＝被除数－余数.所以 $(\quad)\times(\quad)=71-4=67$, 而 $67=67\times1$、又因为余数应该小于除数。所以知道除数是67, 商为1. 即 $71\div(67)=(1)$ 余4.

同理可知第2) 题中 $(\quad)\times(\quad)=189-2=187$, 因为 $187=11\times17=187\times1$, 所以可推知,

$$189\div(11)=(17)\text{ 余 }2;$$
$$189\div(17)=(11)\text{ 余 }2;$$
$$189\div(187)=(1)\text{ 余 }2.$$

共有三种可能.

(8) 哪些数除以7、能使商与余数相同?

分析: 1) 一个数被7除,余数只能是0、1、2、3 4、5、6七种情况，所以要使商与余数相同，商只能是0到6的七个数字.

2) 由题意,被除数＝商数×7＋余数，因为余数＝商数，所以被除数＝商数×7＋商数＝商数×8，所以由1)、2)可知所求的被除数,就是0到6各数乘以8的积.

解: $0\times8=0$, $1\times8=8$, $2\times8=16$, $3\times8=24$, $4\times8=32$, $5\times8=40$, $6\times8=48$, 所以所求的数是0、8、16、24、32、40、48.

3. 习题

(1) 填充:

1) 在三位数中能被3和5整除的最小偶数是____,最小

奇数是____。

2) 从 0、3、5、7 四个数字中任选三个，排成能同时被 2、3、5 整除的三位数，有____________。

3) 要使五位数 $A6543$ 成为 9 的倍数，则 $A=$________。

4) 要使七位数 $9352634D$ 成为 11 的倍数，则 $D=$__________。

5) 能被 3 整除，并且被 4 除余 3 的最大三位数是__________。

(2) 求出能被 2、3、5 整除的形如 $8A3B$ 的四位数。

(3) 已知五位数 $x679y$ 能被 72 整除，求这个五位数。

(4) 从 0～9 这十个数字中选出五个不同数字组成一个五位数，使它能被 3、5、7、13 整除，这个数最大是多少？

(5) 求能被 33 整除的形如 $19xy87$ 的六位数。

(6) 已知四位数 $A=6{*}{*}8$ 能被 236 整除，求 A 除以 236 所得的商。

(7) 用 1、2、3、4、5、6 组成一个六位数 $abcdef$，要求 ab 是 2 的倍数，abc 是 3 的倍数，$abcd$ 是 4 的倍数，$abcde$ 是 5 的倍数，$abcdef$ 是 6 的倍数。

(8) 在 1576 的左右各添写一个数字，使得这个六位数能被 45 整除。

(9) 1～1000 以内是 3 的倍数而不是 2 的倍数的数共有几个？

(10) 下面这个四十一位数：

55…5□99…9 (其中 5 和 9 各有 20 个) 能被 7 整除，那么中间方格内的数字应该是几？

(11) 求一个能被 11 整除，首位是 7，其余各位数各不相同的最小六位数。

(12) 今天是星期三，从明天算起到第200天是星期几？

(13) 元旦是星期一，那么同年的国庆节是星期几？

(14) 一个两位数除310，余数是37，求这样的两位数。

(15) 求被2、3、4、5、6除、余数都是1并且能被7整除的最小的数。

(16) 求被2、3、4、5、6除时余数分别是1、2、3、4、5的最小数。

(17) 有一个数，除以3的余数是2，除以4的余数是1。问这个数除以12的余数是几？

(18) 求71427和19的积除以7所得余数。

二、同 余 问 题

同余问题也称余数问题。在我们日常生活中，有时并不要求知道某些整数被一个自然数去除，所得的商是多少，而注意的是所得余数是多少。例如从上海开往A地，火车19点30分开，全程行驶36小时45分，当我们问什么时候到A地，答案不是56点15分，而是8点15分。这里我们注意的是用24去除时间所得的余数。又如，我们知道1993年元旦是星期五，问1994年元旦是星期几？因为1993年是平年，有365天，而$365=7\times52+1$，所以1994年元旦是星期六。这里我们注意的是用7去除1993年总天数所得的余数。这就是我们所说的同余问题。

中国古代的剩余定理（孙子定理）就是一个同余问题。《孙子算经》有这样一个问题："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？"

解同余问题可以提高我们的解题技巧，又可提高学习数学的兴趣。还可结合中国剩余定理或孙子定理的介绍进行爱国主义教育。

1. 基础知识

(1) 数的整除概念、数的整除性定理

(2) 同余的概念和性质

1) **定义**：对于整数a、b及自然数n，如果有

$$a=n\cdot q_1+r_1 \qquad (0\leqslant r_1<n),$$

$$b=n\cdot q_2+r_2 \qquad (0\leqslant r_2<n),$$

且

$$r_1=r_2.$$

我们就说 a 与 b 对于模 n 同余，记作 $a\equiv b \pmod n$

2) **定理**：a、b 对于模 n 同余的充要条件是：a 与 b 的差能被 n 整除，即 $n\mid(a-b)$。

3) **性质 1**：具有同一模的两个同余式，两边分别相加，仍得同一模的另一个同余式，即若

$$a\equiv b \pmod n,\ c\equiv d \pmod n,$$

则

$$a+c\equiv b+d \pmod n.$$

推论：若 $a\equiv b \pmod n$，$c\equiv d \pmod n$，

则 $a-c\equiv b-d \pmod n$。

性质 2：具有同一模的两个余式，两边分别相乘，仍得同一模的另一个同余式，即 若 $a\equiv b \pmod n$，$c\equiv d \pmod n$，则 $ac\equiv bd \pmod n$。

2. 例题

(1) 一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 2，求适合条件的最小的数。

解：本题即前面讲的中国剩余定理中的问题。在明朝程大位的《算法统宗》里有一首歌，就是它的解法："三人同行七十稀，五树梅花二十一支，七子团圆正半月，除百零五便得知。"即 $70\times2+21\times3+15\times2=233$，然后从 233 中减去 3、5、7 的最小公倍数 105 的 2 倍，得 23，这是适合条件的最小的数。

本题用同余式组解：已知

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7, \end{cases}$$

求适合条件的最小自然数x。

1) $[5, 7]=35$, $35 \equiv 2 \pmod 3$。

2) $[3, 7]=21$, $21 \equiv 1 \pmod 5$,

又 $3 \equiv 3 \pmod 5$, $\therefore$ $63 \equiv 3 \pmod 5$。

3) $[3, 5]=15$, $15 \equiv 1 \pmod 7$,

又 $2 \equiv 2 \pmod 7$, $\therefore$ $30 \equiv 2 \pmod 7$,

$$35+63+30=128。$$

$$又\quad [3, 5, 7]=105,$$

$$128-105=23, 且 23<105,$$

$\therefore$ 适合条件的最小自然数x是23。

(2) 求13^{50}被3除所得的余数。

解：$\because$ $13 \equiv 1 \pmod 3$,

$\therefore$ $13^{50} \equiv 1^{50} \pmod 3$，即$13^{50} \equiv 1 \pmod 3$,

$\therefore$ 13^{50}被3除所得的余数是1。

(3) 一箱弹子有若干颗(不多于1000颗)，如果分别按2颗一次、3颗一次、4颗一次、5颗一次、6颗一次取出时，最后箱子里总还剩下一颗；如果按7颗一次取出时，箱子里就一颗也不剩。箱子里原来最多有弹子几颗？

解：$\because$ $2|4$, $2\times3=6$,

$\therefore$ 只要考虑3、4、5、7的情况就能满足题目的要求。

用同余式组解答如下：

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3, \\ x \equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$