

马 地 泰 编著

铁路缓和曲线 理论和类型

中 国 铁 道 出 版 社

铁路缓和曲线理论和类型

马地泰 编著

中国铁道出版社

1982年·北京

铁路缓和曲线理论和类型

马地泰编著

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{4}$ 印张：11 字数：264 千

1982年2月第1版 1982年2月第1次印刷

印数：0001—2,000册 定价：1.70元

内 容 简 介

本书对缓和曲线基本理论作了简要阐明。对直线型外轨超高和曲线型中心对称外轨超高的20多种类型缓和曲线,加以分类综述,对计算公式加以推演。对五次方缓和曲线的坐标和偏角的计算式加以准确推导,并把计算和测设缓和曲线所需的数据列成数表。对目前我国规定采用的放射螺形线的坐标和偏角的准确计算式作了详细介绍。此外,还讨论了缓和曲线长度对行车平稳和安全的影响,以及如何确定缓和曲线长度。

前 言

缓和曲线是铁路线路的一个组成部分，其形状类型对于行车平稳、钢轨寿命和线路稳定的影响很大。列车的行驶速度愈高，这些影响愈大。随着行车速度的提高，为了改善行车条件，国内外的铁道工程学者发表许多文章，提出许多种缓和曲线。然而这些文章都散载于各种书刊杂志，未见汇集成书。本书参考了有关文献，去粗取精，删繁补缺，把二十多种不同类型的中心对称缓和曲线分类综述，比较讨论，供研究参考。为便于一般读者阅读，书中所有曲线的计算公式均加推演。

本书对缓和曲线的基本理论作简要的阐明，其中，有关缓和曲线中心角（亦即倾斜角或交切角）变动图形的一般形状和特点、缓和曲线的不同倾斜角之间和不同纵坐标近似值之间的关系、缓和曲线近似式所引起的误差以及缓和曲线的共同特点等，均未曾见于他书。

缓和曲线可以分为直线形外轨超高顺坡的和曲线形外轨超高顺坡的两大类。曲线形外轨超高顺坡的缓和曲线又可分为非中心对称的和中心对称的两类。曲线形外轨超高顺坡的中心对称缓和曲线有三类：第一类，在曲线始、终点的 $\frac{dk}{dl}=0$ ，而 $\frac{d^2k}{dl^2}\neq 0$ ；第二类，在曲线始、终点的 $\frac{dk}{dl}=0$ ， $\frac{d^2k}{dl^2}=0$ ，而 $\frac{d^3k}{dl^3}\neq 0$ ；第三类，在曲线始、终点的 $\frac{dk}{dl}=0$ ， $\frac{d^2k}{dl^2}=0$ ， $\frac{d^3k}{dl^3}=0$ ；每类又有统一式和组合式之分。本书只论述直线形外轨超高顺坡的缓和曲线和曲线形外轨超高顺坡的中心对称缓和曲线，按上述分类加以综述。

直线形外轨超高顺坡的缓和曲线有许多缺点，已为长期的实践所证实；行车速度愈高，这些缺点愈显著。现在许多国家的铁路，为了改善行车条件、保证旅客舒适、保持线路稳定，已用曲线形外轨超高顺坡的缓和曲线代替直线形外轨超高顺坡的缓和曲线。采用曲线形外轨超高顺坡的缓和曲线是使我国铁路现代化所应采取的措施之一。

根据日本和欧洲国家的铁路的经验，本书建议我国铁路试用“五次方缓和曲线”。为了避免由于近似式所引起的误差，本书对这种曲线的坐标和偏角的计算式加以准确推导，并把计算和测设缓和曲线所需的曲线的总中心角以及坐标和偏角用电子计算机算出，列成数表，以供应用。按圆曲线的不同半径和缓和曲线的不同长度，可从表中查得曲线的总中心角以及曲线各十分点的坐标和偏角，进行计算和测设。

因为放射螺形线是我国现行铁路工程技术规范规定采用的缓和曲线，所以本书对这种曲线的坐标和偏角的准确计算式，作了详细介绍。又因三次抛物线也常被用作缓和曲线，为了消除它的误差，本书介绍了修正办法，并把修正系数算出。

除了缓和曲线的类型外，缓和曲线的长度对于行车的平稳和安全也很有影响。如何确定缓和曲线长度，本书也作了充分的说明。

本书承洪建华同志校订原稿并绘制附图，谨此表示感谢！

本书虽只是本小册子，可是我却费了很多时间克服很大困难才把它写成。因我右眼失明，困于目力，又限于水平，错误难免，希读者教正！

马地泰

1979年10月于上海同济大学

目 录

一、引 言.....	1
1—1 圆曲线.....	1
1—2 外轨超高度.....	2
1—3 缓和曲线.....	3
二、缓和曲线的基本理论.....	7
2—1 缓和曲线必须符合的四个最基本条件.....	7
2—2 缓和曲线应当符合的第五、第六条件.....	8
2—3 缓和曲线应当符合的第七、第八条件.....	10
2—4 缓和曲线应当符合的第九、第十条件.....	12
2—5 缓和曲线的中心角.....	14
2—6 缓和曲线的纵坐标.....	20
2—7 缓和曲线与圆曲线的相互位置关系.....	22
2—8 缓和曲线的共同特点.....	23
2—9 缓和曲线的方程式.....	23
2—10 缓和曲线近似式的误差.....	25
2—11 三点假设.....	26
三、直线型外轨超高顺坡的缓和曲线.....	27
3—1 放射螺形线.....	27
放射螺形线的曲率变动函数式——放射螺形线的中心角——放射螺形线的参变方程式——放射螺形线的直角坐标方程式——放射螺形线的坐标——放射螺形线的偏角——放射螺形线的长弦支距——圆曲线的内移距——等弦螺形线——连接两圆弧的螺形线——例	
3—2 三次抛物线.....	40
三次抛物线的方程式——三次抛物线的曲率——三次抛物线的弧长——三次抛物线用作缓和曲线的误差——修正三次抛物线	
3—3 双纽线.....	48
双纽线形缓和曲线的方程式——双纽线的曲率变动规律——双纽线的倾斜角——双纽线的弧长——双纽线的测设	
3—4 三次螺形线.....	54
3—5 多重复曲线.....	55
四、曲线型外轨超高顺坡的缓和曲线 (一).....	57
(在曲线始、终点的 $\frac{dh}{dt} = 0$ 的缓和曲线)	
4—1 四次两段组合式缓和曲线.....	57
4—2 4-3-4 次三段组合式缓和曲线.....	60
4—3 六次两段组合式缓和曲线.....	64
4—4 四次半两段组合式缓和曲线.....	66

4—5	半波正弦型缓和曲线	67
	缓和曲线的曲率变动函数式——缓和曲线的中心角——缓和曲线的坐标——缓和曲线的近似方程式——缓和曲线的偏角——圆曲线的内移距	
4—6	五次方缓和曲线	70
	缓和曲线的曲率变动函数式——缓和曲线的中心角——缓和曲线的坐标——缓和曲线的偏角——缓和曲线的近似方程式——圆曲线的内移距——几种缓和曲线的比较——例	
五、	曲线型外轨超高顺坡的缓和曲线 (二)	117
	(在曲线始、终点的 $\frac{d^2k}{dl^2} = 0$ 的缓和曲线)	
5—1	五次三段组合式缓和曲线	117
5—2	六次两段组合式缓和曲线	120
5—3	6—3—6次三段组合式缓和曲线	122
5—4	正弦型缓和曲线	124
5—5	七次方缓和曲线	125
5—6	缓和曲线的一般式	129
5—7	符合十个条件的缓和曲线	133
六、	曲线型外轨超高顺坡的缓和曲线 (三)	137
	(在曲线始、终点的 $\frac{d^3k}{dl^3} = 0$ 的缓和曲线)	
6—1	叠加正弦型缓和曲线	137
6—2	叠加余弦型缓和曲线	138
6—3	九次方缓和曲线	140
6—4	六次四段组合式缓和曲线	142
6—5	七次三段组合式缓和曲线	144
七、	缓和曲线设计的梁比拟法	146
7—1	符合六个条件的缓和曲线的梁比拟	146
7—2	符合八个条件的缓和曲线的梁比拟	147
7—3	组合式缓和曲线的一般式	149
八、	缓和曲线长度	156
8—1	缓和曲线长度与外轨纵断面的坡度	156
8—2	缓和曲线长度与外轨超高度的变动速度	157
8—3	缓和曲线长度与横向加速度的变动速度	158
8—4	缓和曲线长度与车辆的回转角加速度	160
8—5	缓和曲线长度与车轮对钢轨的冲击作用	161
九、	车辆重心轨迹缓和曲线	163
十、	结束语	166

一、引 言

连接两地的铁路线不可能是条直线。在路线方向改变之处，不应成折角，必须用曲线转弯（图1.1），使机车车辆顺利通过。铁路曲线包括圆曲线和缓和曲线。

1—1 圆 曲 线

铁路曲线的主要部分是圆曲线。圆曲线的曲率有两种表示方法：一是用曲度表示，一是用半径表示。曲度为圆曲线上一定长度的弦所对的中心角。曲度（ D ）与弦长（ C ）和半径（ R ）的关系（图1.2）为：

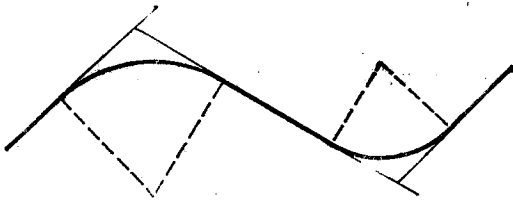


图 1.1

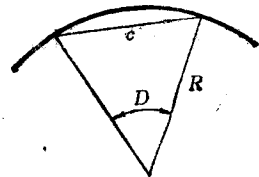


图 1.2

$$\sin \frac{D}{2} = \frac{\frac{C}{2}}{R} \quad (1.1)$$

我国铁路现在用半径表示曲线的曲率，解放前，曾用曲度表示，弦长规定为 20 米。所以，曲度与半径的关系为：

$$\sin \frac{D}{2} = \frac{10}{R} \quad (1.2)$$

曲线的半径和曲度的对应数值如表 1.1。

最初的铁路，在路线方向改变之处，只用圆曲线，其两端与直线相切（图 1.3）。曲线的中心角等于两直线的交角（ I ），切线 AV 的长度（ T ）、长弦 AB 的长度（ C ）、中纵距 GF 的长度（ M ）和外距 FV 的长度（ E ）各为：

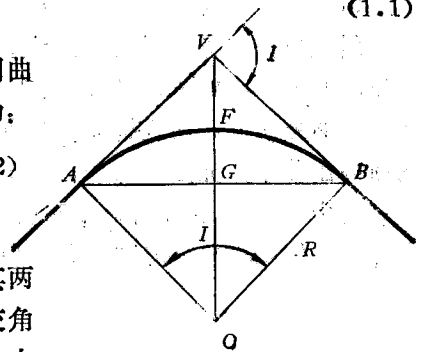


图 1.3

$$T = R \operatorname{tg} \frac{1}{2} I \quad (1.3)$$

$$C = 2R \sin \frac{1}{2} I \quad (1.4)$$

$$M = R \left(1 - \cos \frac{1}{2} I \right) = R \operatorname{vers} \frac{1}{2} I \quad (1.5)$$

$$E = R \left(\sec \frac{1}{2} I - 1 \right) = R \operatorname{exsec} \frac{1}{2} I \quad (1.6)$$

圆曲线的半径与曲度

表1.1

R (米)	D	D	R (米)	R (米)	D	D	R (米)
200	5°43'56"	0°20'	3437.752	800	1°25'56"	2°0'	572.987
250	4°35'06"	0°30'	2291.839	900	1°16'24"	2°10'	528.916
300	3°49'14"	0°40'	1718.883	1000	1°08'46"	2°20'	491.141
350	3°16'28"	0°50'	1375.111	1200	0°57'18"	2°30'	458.403
400	2°51'54"	1°0'	1145.930	1500	0°45'50"	2°40'	429.757
450	2°32'48"	1°10'	982.230	1800	0°38'12"	2°50'	404.482
500	2°17'32"	1°20'	859.456	2000	0°34'22"	3°0'	382.016
550	2°05'00"	1°30'	763.966	2500	0°27'30"	3°20'	343.823
600	1°54'36"	1°40'	687.574	3000	0°22'56"	3°40'	312.576
700	1°38'14"	1°50'	625.072	4000	0°17'12"	4°0'	286.537

1—2 外轨超高度

机车车辆在曲线上运行时，出现在直线上运行时所没有的离心力。在圆曲线上，离心力（公斤）为：

$$J = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R}$$

式中 G 为车辆重量（公斤）， g 为重力加速度（米/秒²），
 v 为行车速度（米/秒）， R 为曲线半径（米）。

由于离心力的作用，车中旅客不得不用力向曲线中心方向倾斜，以保持身体正直，很易感觉疲劳。离心力并使曲线外轨的磨损大于内轨，促使轨距易生变动。为了平衡离心力，在曲线的外轨上，设置超高，即使曲线外轨的轨面水平比内轨高出若干，如图1.4。图中， h 为外轨超高度， S_1 为内外两轨的中线间距。由于外轨超高度，产生车辆重量的横向分力 $G \frac{h}{S_1}$ 。使此横向分力与离心力相等，适足以平衡离心力。外轨超高度为：

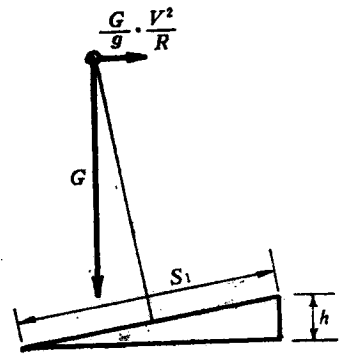


图 1.4

$$h = \frac{S_1 \cdot v^2}{g \cdot R} \tag{1.7}$$

可设 $S_1 = 1500$ 毫米， $g = 9.80$ 米/秒²，并使曲线半径 R 以米为单位，行车速度 V 以公里/小时为单位，得与 V 相适应的外轨超高度

$$h = 11.8 \frac{V^2}{R} \text{ (毫米)}$$

通过曲线的列车速度快慢不一，外轨超高度则按平均速度 V 计算设置。所以，曲线外轨超高度的计算式为：

$$h = 11.8 \frac{V^2}{R} \tag{1.8}$$

这是外轨超高度的理论计算式。根据这个理论计算式，各国铁路规定不同的实际计算

式。这个问题，因非本书的主要内容，不加论述。各国铁路所用的最大外轨超高度为 140~165 毫米。

通过曲线的列车速度有高有低，外轨超高度却不能随之调整。因此，曲线外轨超高度往往与通过列车的速度不相适应。当列车以低于计算外轨超高度所用平均速度的速度通过曲线时，由于外轨超高度所产生的车辆重量的向内分力大于离心力，使曲线内轨所受的车轮压力大于外轨，内轨的磨损大于外轨。当列车以高于计算外轨超高度所用平均速度的速度通过曲线时，由于外轨超高度所产生的车辆重量的向内分力小于离心力，使曲线外轨所受的车轮压力大于内轨，外轨的磨损大于内轨。所以，总的说来，按列车平均速度计算外轨超高度可使曲线外轨和内轨的磨损大致相等。但就每一列车而论，外轨超高度不能恰好平衡离心力，对于旅客的作用，不可不考虑外轨超高度与列车通过速度不相适应的影响。

如果旅客列车以高于平均速度 V_c 的速度 V 通过曲线，则外轨超高度 h 便显得不够，不能完全平衡离心力。不够的超高度一般称为欠超高，其值为：

$$\text{欠超高 } e = 11.8 - \frac{V^2 - V_c^2}{R} \text{ 毫米} \quad (1.9)$$

未被外轨超高度所平衡的剩余离心加速度为：

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{v^2 - v_c^2}{R} = \frac{V^2 - V_c^2}{3.6^2 R} \text{ 米/秒}^2 \\ &= \left(\frac{V^2}{3.6^2 R} - 9.80 \times \frac{h}{1500} \right) \text{ 米/秒}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

未被平衡离心加速度与欠超高的关系为：

$$\alpha = 9.80 \times \frac{e}{1500} \quad (1.11)$$

为使旅客不至于感觉不适，未被平衡离心加速度或欠超高不应超过一定的容许值。这些最大容许值，各国铁路有不同的规定。

如果 $V < V_c$ ，则由式 (1.9) 所得的 e 为负，称之为余超高，由式 (1.10) 所得的 α 亦为负，称不平衡向心加速度。

1—3 缓和曲线

在曲线上，外轨应有超高度，在直线上，两股钢轨的轨面水平应当相等。圆曲线与直线相切之点，既在曲线上又在直线上。曲线外轨的顶面，不能在这两点突然升高或降落，必须有适当长度的顺坡，外轨超高度在这顺坡的范围内渐渐增大或减小。这种顺坡，如果全部设在直线上，则在顺坡的范围内，两股钢轨一高一低，产生不应有的重量的向心分力，如果全部设在圆曲线上，则在顺坡的范围内，外轨超高度与曲线半径不相适应，不足以平衡离心力，如果一半设在直线上，一半设在圆曲线上，则上述两种缺点兼而有之。而且，在直线与圆曲线直接相切的情况下，当车辆从直线进入曲线或从曲线进入直线时，由于车体转向架与挂钩之间相互位置的突然改变，会发生突然的震动。为了消除这些不良现象，在 1828~1829 年，有人首先建议采用缓和曲线，大约在 1890 年以后，各国铁路比较普遍地采用缓和曲线，用缓和曲线连接直线和圆曲线以及连接两半径不同的圆曲线。

最早的缓和曲线是格莱凡脱所用的正弦曲线，直接相接，中间无圆曲线。其后，大约在

$$p = A_1A' = A_1F - A'F = Y - R(1 - \cos\phi) = Y - R \text{vers}\phi \quad (1.12)$$

$$q = AA_1 = AQ - FB = X - R \sin\phi \quad (1.13)$$

缓和曲线的切线长度 T_1 和 T_2 (图1.7) 为:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= AV_1 = X - Y/\text{tg}\phi \\ T_2 &= V_1B = Y/\sin\phi \end{aligned} \right\} (1.14)$$

缓和曲线的长弦 AB 的长度为:

$$\left. \begin{aligned} C &= Y/\sin\angle_1 = X/\cos\angle_1 \\ &= T_1 \times \frac{\sin\phi}{\sin\angle_2} = T_2 \times \frac{\sin\phi}{\sin\angle_1} \end{aligned} \right\} (1.15)$$

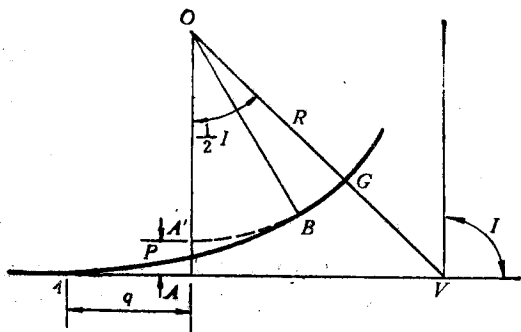


图 1.8

圆曲线连同其两端两等长缓和曲线的全曲线的切线长度和外距 (图1.8) 为:

$$T_s = AV = AA_1 + A_1V = q + (R + p) \text{tg} \frac{1}{2} I \quad (1.16)$$

$$E_s = GV = OV - OG = (R + p) / \cos \frac{1}{2} I - R \quad (1.17)$$

如果因地形关系, 不得不在圆曲线的两端采用不等长度的缓和曲线, 则切线长度亦不相等。设在—端, 缓和曲线的长度为 L_1 , 移动后的圆曲线始点的坐标为 q_1 和 p_1 , 切线长度为 T_{s1} ; 在另一端的各为 L_2 、 q_2 、 p_2 和 T_{s2} ; $L_1 > L_2$, $p_1 > p_2$ 。由图1.9

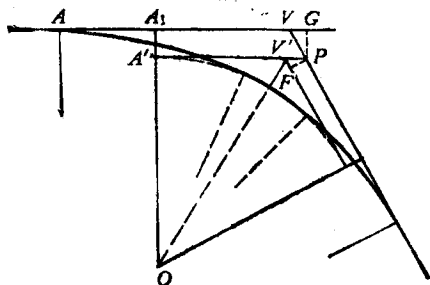


图 1.9



图 1.10

$$\left. \begin{aligned} T_{s1} &= AA_1 + A_1V = AA_1 + A'V' + V'P - VG \\ &= q_1 + R \cdot \text{tg} \frac{1}{2} I + p_2 \text{cosec} I - p_1 \text{ctg} I \\ T_{s2} &= q_2 + R \cdot \text{tg} \frac{1}{2} I + p_1 \text{cosec} I - p_2 \text{ctg} I \end{aligned} \right\} (1.18)$$

或如图1.10, 以 O 为圆心, 以 $OA_1 = (R + p_1)$ 为半径, 作圆弧 A_1B_1 , 则

$$T_{s1} = AV = AA_1 + A_1V' - VF$$

$$\left. \begin{aligned} &= q_1 + (R + p_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2} I - (p_1 - p_2) \operatorname{cosec} I \\ T_{s_2} &= q_2 + (R + p_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2} I + (p_1 - p_2) \operatorname{ctg} I \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

以上四式实际相同, 因为 $\operatorname{cosec} I = \operatorname{tg} \frac{1}{2} I + \operatorname{ctg} I$

上述的计算式适用于任何类型的缓和曲线。

参 考 文 献

1. Proc of American Railway Engineering & Maintenance of Way Association, Vol.5(1904), p.525.
2. J.C.Nagle, A Field Manual for Railroad Engineers, 1917, p.115
3. L.Vuagnat, Transition Curves, Bull.I.R.C.A.Sept.1948.
4. Proc of American Railway Engineering & Maintenance of Way Association, Vol.2 (1901) p.p.255—262.

二、缓和曲线的基本理论

缓和曲线是用来连接直线和圆曲线的变曲率曲线，使机车车辆能顺利、平稳而安全地从直线进入曲线。设置缓和曲线的目的有二：（1）使路线的方向渐渐改变，消除由于车体转向架与挂钩的相互位置的突然改变所引起的震动；（2）使曲线的外轨超高度渐渐增大，能与曲线的曲率相适应。为了使外轨超高度得以渐渐增加，从缓和曲线始点至缓和曲线终点，外轨超高度自 0 渐渐增加至等于圆曲线的外轨超高度，成一顺坡；因为曲线的半径或曲率应与曲线的外轨超高度相适应，而曲线的外轨超高度正比于曲线的曲率，所以缓和曲线的曲率也应从其始点至其终点，自 0 渐渐增加至等于圆曲线的曲率 $1/R$ 。由于缓和曲线的曲率是随处不同的，其外轨超高度也是随处不同的，机车车辆在缓和曲线上的运动是不稳态运动。机车车辆在缓和曲线上运行时，受到在直线上和在圆曲线上运行时所没有的力的作用，如增添的转向力和钢轨反力等等的作用。这些增添力的大小可以其所产生的加速度表示之，这些增添力的冲击作用可以其所产生的加速度的变动速度（即加速度对时间的一次导函数）表示之。加速度的变动速度是衡量行车平稳性的一个指标。理想的缓和曲线应使这些增添力不会突然产生、突然消失或变动过快。为此，缓和曲线的曲率变动函数应当符合若干条件。

2—1 缓和曲线必须符合的四个最基本条件

连接直线和圆曲线的缓和曲线，在其始点与直线相切，在其终点与圆曲线相切。如果以缓和曲线始点作为坐标原点，以直线的延长方向作为横坐标轴（图 2.1），则很显然

1. 在缓和曲线始点，曲线的纵坐标 $y = 0$ ；
2. 在缓和曲线始点，曲线的倾斜角 $\varphi = 0$ ；
3. 在缓和曲线始点，曲线的曲率 $k = 0$ 或曲率半径 $\rho = \infty$ ；
4. 在缓和曲线终点，曲线的曲率 $k = 1/R$ 或曲率半径 $\rho = R$ ， R 为缓和曲线所连接的圆曲线的半径。

这是缓和曲线必须符合的四个最基本条件。

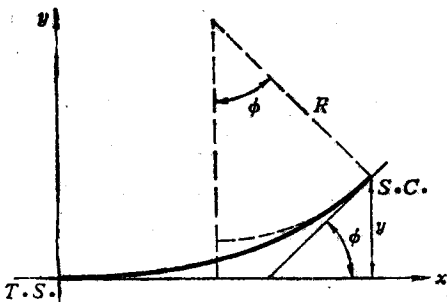


图 2.1



图 2.2

目前各国铁路常用的缓和曲线就只符合这四个条件；缓和曲线的曲率 k ，在其始点等于 0，照直线变动图形增大（与曲线的弧长 l 或弧长的横向投影 x 或曲线的弦长 s 成一次正比

关系增大)，至终点等于 $1/R$ (图2.2)。由式 (1.7)，缓和曲线的外轨超高度为：

$$h = \frac{S_1 v_c^2}{g\rho} = \frac{S_1 \cdot v_c^2}{g} k \quad (2.1)$$

由于曲线的外轨超高度 h 正比于曲线的曲率 k ，缓和曲线的外轨超高度的变动图形（外轨超高度顺坡的形状）与缓和曲线的曲率的变动图形完全相似。故如缓和曲线的曲率的变动图形为一直线，缓和曲线的外轨超高度的顺坡亦为一直线(图2.3，该图系将内轨顶面和外轨顶面沿着线路中线展开于垂直面上而成，图中的 $h_0 = \frac{S_1 v_c^2}{gR}$ 为缓和曲线在其终点的亦即圆曲线的外轨超高度)。所以，只符合四个最基本条件的缓和曲线统称为直线型外轨超高顺坡的缓和曲线。例如放射螺旋形线、三次抛物线和双纽线都是直线型外轨超高顺坡的缓和曲线。

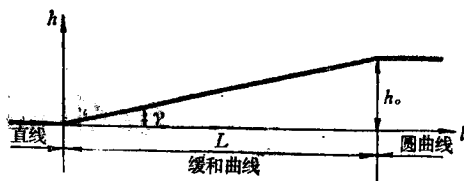


图 2.3

2—2 缓和曲线应当符合的第五、第六条件

由于行车速度的提高，缓和曲线除必须符合前述的四个最基本条件以外，还应当符合下列第五、第六两条件：

5. 在缓和曲线始点，曲线的 $\frac{dk}{dl} = 0$ ；

6. 在缓和曲线终点，曲线的 $\frac{dk}{dl} = 0$ 。

以下说明为什么缓和曲线应当符合这两个条件。

1) 如果缓和曲线上外轨超高度的顺坡为一与水平线成倾角 γ 的直线(图2.3)，则在缓和曲线的始点和终点，外轨顶面各成 $(180^\circ - \gamma)$ 的凹角和凸角，车轮经过这两点，给钢轨以很大的垂直撞击，造成外轨偏磨严重、车辆震荡剧烈。要消除这种弊害，外轨超高度的顺坡应当成为曲线形，使外轨顶面在缓和曲线始点与直线的钢轨顶面相切，在缓和曲线终点与圆曲线的外轨顶面相切。这样，在缓和曲线的始点和终点， $\gamma = 0$ ， $\text{tg}\gamma = \frac{dh}{dl} = 0$ 。因由式 (2.1)

$$\frac{dh}{dl} = \frac{S_1 v_c^2}{g} \frac{dk}{dl} \quad (2.2)$$

所以，要使 $\frac{dh}{dl} = 0$ ，必须 $\frac{dk}{dl} = 0$ 。因此，缓和曲线的曲率 k 的变动图形应是和外轨超高度的顺坡曲线相似的、两端与水平线相切的曲线。

2) 列车通过曲线的速度 v 未必与计算外轨超高度所用的速度 v_c 相等，如果 $v > v_c$ ，外轨超高度便不足以平衡全部离心力，产生未被平衡离心加速度。在圆曲线上，因为它的曲率 $1/R$ 是不变的，未被平衡离心加速度也是不变的。在缓和曲线上，因为曲率 k 是变动的，未被平衡离心加速度也是变动的。由式 (1.10)，未被平衡离心加速度的变动速度为：

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= (v^2 - v_c^2) \frac{dk}{dt} = (v^2 - v_c^2) \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dk}{dl} \\ &= (v^2 - v_c^2) \cdot v \frac{dk}{dl} \end{aligned} \quad (2.3)$$

如果缓和曲线的曲率 k 的变动图形为如图2.2的直线，则 $\frac{d\alpha}{dt}$ 在曲线始点和终点的突然产

生和消失使旅客感到剧烈的摇动。行车速度 v 愈高，这种不良影响愈大。要使在缓和曲线的始点和终点， $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ ，必须 $\frac{dk}{dl} = 0$ 。所以缓和曲线的 k 的变动图形应是两端与水平线相切的曲线。

3) 任何曲线的弧长 l 等于其所对的中心角 φ (以弧度计) 和曲线曲率半径 ρ 的乘积。换句话说，任何曲线的中心角 φ (以弧度计) 等于其所张的弧长 l 和曲线曲率 k 的乘积。圆曲线的曲率是不变的，等长的弧所对的中心角是相等的。车辆在圆曲线上以等速度运行时，一边前进，一边绕着通过车辆回转中心的垂直轴不断回转，回转的角速度是相等的。但在缓和曲线上就不然。

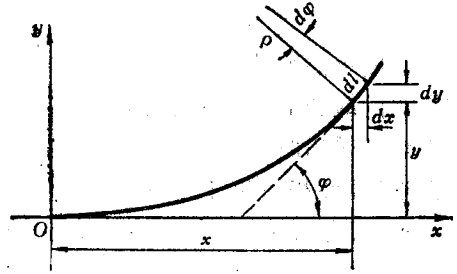


图 2.4

由图 2.4,

$$dl = \rho d\varphi, \text{ 或 } d\varphi = k dl$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k \frac{dl}{dt} = vk$$

由于缓和曲线的曲率 k 是变动的，是随处不同的，车辆虽以等速度 v 在缓和曲线上运行，其回转角速度却是不等的，随着曲率 k 的变动而随时变动，其变动速度就是回转角加速度为

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = v \frac{dk}{dt} = v^2 \frac{dk}{dl} \tag{2.4}$$

如果缓和曲线的曲率变动图形为一条直线，则当车辆在缓和曲线始点从直线进入缓和曲线时，车辆的回转角加速度自 0 突增为 $\frac{v^2}{RL}$ ；在缓和曲线终点，从缓和曲线转入圆曲线时，车辆的回转角加速度自 $\frac{v^2}{RL}$ 突减为 0。车辆的回转角加速度表示转动车辆的转向力的大小。在缓和曲线始点，突然施加很大的转向力，使车辆在瞬间大幅度回转；在缓和曲线终点则反之，使行车极不平稳。还应注意：车辆的回转角加速度与其运行速度的平方成正比。要使在缓和曲线的始点和终点，车辆的回转角加速度 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ ，必须 $\frac{dk}{dl} = 0$ 。所以缓和曲线的曲率变动曲线应是两端与水平线相切的曲线。

综上所述，缓和曲线的曲率变动函数 $k = f_x(l)$ 应使在 $l=0$ 和 $l=L$ 两处的 $\frac{dk}{dl} = 0$ 。也就是说，缓和曲线的曲率 k 的变动图形应是两端与水平线相切的曲线，使在曲线的始点和终点，外轨超高度的顺坡曲线的斜率(也就是外轨纵断面的坡度) $\frac{dh}{dl} = 0$ ，未被平衡横向加速度的变动速度 $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ ，车辆的回转角加速度 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ 。

两端与水平线相切的曲线可有很多不同形状。缓和曲线的曲率变动曲线(或外轨超高度的顺坡曲线)又应如何? 最自然和合理的形状如图 2.5 a，极对称于曲线的中点；其斜率 $\frac{dk}{dl}$ (或 $\frac{dh}{dl}$) 在缓和曲线始点为 0，渐渐增大，至曲线中点达最大值 $(\frac{dk}{dl})_{max}$ ，然后按与增大时相同的规律渐渐减小，至缓和曲线终点又等于 0。在曲线中点 $k = \frac{1}{2R}$ 。从 k 曲线的两端与水平线相切又极对称于其中点这两个特点，得 $\frac{dk}{dl}$ 的曲线如图 2.5 b，两端与横坐标轴相交，对称于纵线 $l = \frac{1}{2}L$ 。 $\frac{dk}{dl}$ 曲线与横坐标轴所围成的面积等于 $\frac{1}{R}$ 。

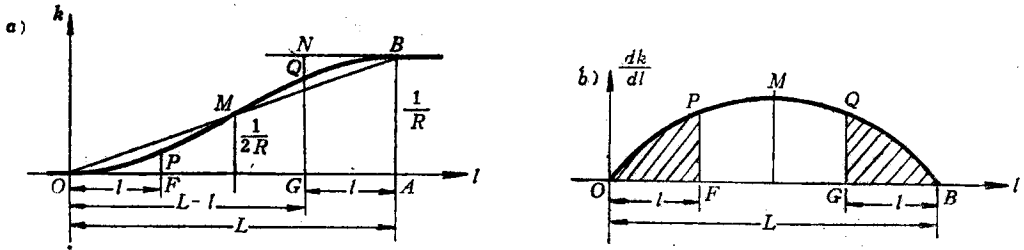


图 2.5

曲线曲率的变动曲线极对称于其中点的缓和曲线可称为“中心对称”缓和曲线。曾经采用和提出的缓和曲线大都是中心对称缓和曲线。本书所说的缓和曲线,除特别指明的以外,都指中心对称缓和曲线。

由于 k 曲线极对称于其中点,在图2.5a中,如果 $OF = BN$,则 $FP = NQ$,设 $OF = l$, $FP = k_l$,则 $k_{L-l} = GQ = AB - QN = \frac{1}{R} - k_l$ 。由于 $\frac{dk}{dl}$ 曲线对称于通过其中点 M 的纵线,在图2.5b中,如果 $OF = BG$,则面积 OPF 与面积 BQG 相等。设 $OF = l$,面积 OPF 便等于 k_l ,则 k_{L-l} 等于面积 $OPMQG$,等于曲线 OMB 与横轴 OB 之间的面积减去面积 BQG 。而 OMB 与 OB 之间的面积等于 $\frac{1}{R}$,由此也可得与上述相同的关系。所以在一切中心对称缓和曲线中

$$k_{L-l} = \frac{1}{R} - k_l \quad (2.5)$$

倘第一段缓和曲线中的曲率的变动函数为

$$k = f_k(l)$$

则对于第二段缓和曲线,若取 $l > \frac{1}{2}L$,

$$k_l = F_k(l) = \frac{1}{R} - f_k(L-l)$$

若取 $l < \frac{1}{2}L$,

$$k_{L-l} = F_k(L-l) = \frac{1}{R} - f_k(l)$$

(2.6)

在统一式缓和曲线中, $F_k(l)$ 和 $f_k(l)$ 两函数式完全相同。

2—3 缓和曲线应当符合的第七、第八条件

车辆以等速度在缓和曲线上运行时,一边前进,一边回转,不但其回转角速度不等,其回转角加速度也是不等的。车辆回转角加速度的变动速度为:

$$\frac{d\alpha}{dt} = v^2 \frac{d}{dt} \frac{dk}{dl} = v^2 \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d^2k}{dl^2} = v^3 \frac{d^2k}{dl^2} \quad (2.7)$$

车辆在缓和曲线上以等速度 v 从曲线始点向曲线终点运行时,由于外轨超高度的不断增大,沿着外轨滚动的车轮不断上升,其上升的速度为:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{S_1 v c^2}{g} \cdot \frac{dk}{dt} = \frac{S_1 \cdot v c^2}{g} \cdot v \cdot \frac{dk}{dl} \quad (2.8)$$

上升的加速度为: