

全国高等职业技术师范院校高等数学配套用书

# 高等数学习题集

数学教研室 主编

河南职业技术师范学院

# 高等数学习题集

数学教研室 主编

河南职业技术师范学院

## 前 言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前:其一是学生课内、外时数的减少;其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾,成为教与学双方共同面临的一个问题。这本《高等数学习题集》正是为解决这一问题而精心编写的。其内容包括:第一章函数的极限与连续性;第二章一元函数微分学;第三章不定积分;第四章定积分;第五章空间解析几何与矢量代数;第六章多元函数微分学;第七章重积分;第八章微分方程;第九章无穷级数;第十章线性代数;第十一章概率论与数理统计。每章的习题分选择题、填空题、计算题、证明题四种题型,在章末给出了部分题目的答案或提示;对八、九两章的习题给出了全部解答,这是出于满足部分学生考研的要求;特别是整理和网上下载了近三年来考研试题解答及评分标准,可供读者参考。每章题目的选取是依据教材中各章内容要点、目的要求和教材所处的地位确定的,题目的编排系统性强,采用由浅入深的方式逐步体现教材中各种思想方法和解题技巧。利用该习题集对所学知识进行全方位的训练和检测,可使读者在教与学的过程中较好地把握教材的重点和难点,牢固掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本运算方法,提高抽象思维能力、逻辑推理能力、以及综合运用高等数学的理论方法去分析和解决实际问题的能力。

在编写过程中,数学教研室全体教师总结多年的教学实践经验,针对教与学中存在的问题,参考了全国《高等数学试题库》指标体系要求,在大量的习题中精心筛选、整理、编写了这本习题集,旨在对读者学习高等数学的过程中起到一定的作用。但由于时间仓促,水平有限,肯定会有疏漏、缺点和错误,敬请广大读者批评、指正。

编 者

# 目 录

<b>第一章 函数 极限 连续性</b> .....	(1)
一、单项选择题 .....	(1)
二、填空题 .....	(6)
三、计算题 .....	(8)
四、证明题 .....	(10)
<b>第一章 习题答案</b> .....	(11)
<b>第二章 一元函数微分学</b> .....	(19)
一、单项选择题 .....	(19)
二、填空题 .....	(24)
三、计算题 .....	(24)
四、证明题 .....	(29)
<b>第二章 习题答案</b> .....	(31)
<b>第三章 不定积分</b> .....	(41)
一、单项选择题 .....	(41)
二、填空题 .....	(43)
三、计算题 .....	(44)
四、证明题 .....	(45)
<b>第三章 习题答案</b> .....	(47)
<b>第四章 定积分</b> .....	(49)
一、单项选择题 .....	(49)
二、填空题 .....	(53)
三、计算题 .....	(54)
四、证明题 .....	(56)
<b>第四章 习题答案</b> .....	(57)
<b>第五章 空间解析几何与向量代数</b> .....	(61)
一、单项选择题 .....	(61)
二、计算题 .....	(64)
三、证明题 .....	(65)
<b>第五章 习题答案</b> .....	(66)
<b>第六章 多元函数微分学</b> .....	(69)
一、单项选择题 .....	(69)
二、填空题 .....	(70)
三、计算题 .....	(72)
四、证明题 .....	(73)

第六章 习题答案 .....	(74)
<b>第七章 重积分</b> .....	(77)
一、单项选择题 .....	(77)
二、计算题 .....	(79)
三、证明题 .....	(80)
第七章 习题答案 .....	(81)
<b>第八章 微分方程</b> .....	(82)
微分方程的一般概念与一阶微分方程 .....	(82)
一、单项选择题 .....	(82)
二、填空题 .....	(84)
三、计算题 .....	(84)
可降阶的高阶微分方程与线性微分方程(组) .....	(87)
一、单项选择题 .....	(87)
二、填空题 .....	(89)
三、计算题 .....	(90)
综合题 .....	(91)
一、单项选择题 .....	(91)
二、填空题 .....	(92)
三、计算题 .....	(93)
第八章 习题答案 .....	(95)
<b>第九章 无穷级数</b> .....	(126)
数项级数 .....	(126)
一、单项选择题 .....	(126)
二、填空题 .....	(128)
三、计算题 .....	(129)
函数项级数与幂级数 .....	(130)
一、单项选择题 .....	(130)
二、填空题 .....	(133)
三、计算题 .....	(134)
傅立叶级数 .....	(136)
一、单项选择题 .....	(136)
二、填空题 .....	(139)
三、计算题 .....	(140)
综合题 .....	(141)
一、单项选择题 .....	(141)
二、填空题 .....	(143)
三、计算题 .....	(144)
第九章 习题答案 .....	(145)
<b>第十章 线性代数</b> .....	(177)
一、单项选择题 .....	(177)

二、填空题 .....	(178)
三、计算题 .....	(178)
四、证明题 .....	(182)
第十章 习题答案 .....	(183)
<b>第十一章 概率论与数理统计</b> .....	(186)
一、单项选择题 .....	(186)
二、填空题 .....	(187)
三、计算题 .....	(188)
第十一章 习题答案 .....	(191)
<b>附录 全国招收研究生入学试题</b> .....	(193)
1999 年数学一试卷 .....	(193)
1999 年数学二试卷 .....	(195)
1999 年数学三试卷 .....	(197)
1999 年数学四试卷 .....	(199)
1999 年数学一答案或提示 .....	(201)
1999 年数学二答案或提示 .....	(201)
1999 年数学三答案或提示 .....	(202)
1999 年数学四答案或提示 .....	(203)
2000 年数学一参考解答及评分标准 .....	(204)
2000 年数学二参考解答及评分标准 .....	(211)
2000 年数学三参考解答及评分标准 .....	(217)
2000 年数学四参考解答及评分标准 .....	(223)
2001 年数学一参考解答及评分标准 .....	(228)
2001 年数学二参考解答及评分标准 .....	(233)
2001 年数学三参考解答及评分标准 .....	(239)
2001 年数学四参考解答及评分标准 .....	(245)

## 第一章 函数 极限 连续性

## 一、单项选择题

1. 已知函数  $y = \log_2 x + 3$  ( $x \geq 1$ ) 那么它的反函数的定义域是( ).

- (A)  $\mathbf{R}$ ; (B)  $\{x | x \geq 1\}$ ;  
 (C)  $\{x | 0 < x < 1\}$ ; (D)  $\{x | x \geq 3\}$ .

2. 设  $x_n = 0.\underbrace{11\dots1}_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$  ( ).

- (A) 0.1; (B) 0.12; (C)  $\frac{1}{9}$ ; (D) 不存在.

3. 下面的各种说法中, 正确的是( ).

- (A) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 则  $f(x)$  在该区间上连续;  
 (B) 若  $f(x)$  在  $x_0$  有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  连续;  
 (C) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  则  $f(x)$  在点  $x_0$  连续;  
 (D) 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内每一点连续, 则  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续.

4. 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{若 } -1 < x < 2; \\ x^3 - 3, & \text{若 } 2 < x \leq 4. \end{cases}$  的定义域是( ).

- (A)  $-1 < x < 2$ ; (B)  $2 < x \leq 4$ ;  
 (C)  $(-1, 4]$ ; (D)  $\{x | -1 < x < 2\} \cup \{x | 2 < x \leq 4\}$ .

5. 函数  $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{若 } -4 \leq x \leq 0; \\ x^2 + 1, & \text{若 } 0 < x \leq 3. \end{cases}$  的定义域是( ).

- (A)  $-4 \leq x \leq 0$ ; (B)  $0 < x \leq 3$ ;  
 (C)  $(-4, 3)$ ; (D)  $\{x | -4 \leq x \leq 0\} \cup \{x | 0 < x \leq 3\}$ .

6. 下列函数中是奇函数的是( ).

- (A)  $f(x) = x^2 \cos x$ ; (B)  $z(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ ;  
 (C)  $g(x) = \arccos x$ ; (D)  $h(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

7. 下列极限中, 极限值是 2 的是( ).

- (A)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{\sin x}{x})^{\frac{x}{\sin x}}$ ; (B)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\sin x}{x})^{\frac{x}{\sin x}}$ ;  
 (C)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{\sin x}{x})^{\frac{\sin x}{x}}$ ; (D)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{\sin x}{x})^{\frac{\sin x}{x}}$ .

8. 函数  $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1} (a > 1)$  是( ).  
 (A) 偶函数; (B) 奇函数; (C) 非奇非偶函数; (D) 奇偶函数.
9. 函数  $y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1} (a > 1)$  是( ).  
 (A) 偶函数; (B) 奇函数; (C) 非奇非偶函数; (D) 奇偶函数.
10. 函数  $y = \sin \frac{3}{2}x$  的最小正周期是( ).  
 (A)  $2\pi$ ; (B)  $3\pi$ ; (C)  $\frac{2}{3}\pi$ ; (D)  $\frac{4}{3}\pi$ .
11. 函数  $y = 1 + \cos \frac{\pi}{2}x$  的最小正周期是( ).  
 (A)  $2\pi$ ; (B)  $\pi$ ; (C) 4; (D)  $\frac{1}{2}$ .
12. 令  $[x]$  表示实数  $x$  的整数部分, 即不超过  $x$  的最大整数, 则  $[-3.97]$  为( ).  
 (A) 3; (B) 4; (C) -3; (D) -4.
13. 令  $[x]$  表示实数  $x$  整数部分, 即不超过  $x$  的最大整数, 则  $[3.58]$  为( ).  
 (A) -3; (B) -4; (C) 3; (D) 4.
14. 设  $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{若 } x > 0; \\ x-1, & \text{若 } x \leq 0. \end{cases}$   $g(x) = \begin{cases} -e^x, & \text{若 } x > 0; \\ e^x, & \text{若 } x \leq 0. \end{cases}$  则  $f(x) \cdot g(x)$  为( ).  
 (A)  $\begin{cases} -e^x(x+1), & \text{若 } x > 0, \\ e^x(x+1), & \text{若 } x \leq 0; \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} -e^x(x+1), & \text{若 } x > 0, \\ -e^x(x-1), & \text{若 } x \leq 0; \end{cases}$   
 (C)  $\begin{cases} e^x(x-1), & \text{若 } x \geq 0, \\ e^x(x+1), & \text{若 } x \leq 0; \end{cases}$  (D)  $\begin{cases} -e^x(x+1), & \text{若 } x > 0, \\ e^x(x-1), & \text{若 } x \leq 0. \end{cases}$
15. 当( )时, 函数  $f(x) = \sqrt{x^2}$  与  $g(x) = x$  是相同的.  
 (A)  $-\infty < x < +\infty$ ; (B)  $x > 0$ ; (C)  $x < 0$ ; (D)  $x \geq 0$ .
16. 当( )时, 函数  $f(x) = \ln x^2$  与  $g(x) = 2 \ln x$  是相同的.  
 (A)  $-\infty < x < +\infty$ ; (B)  $x > 0$ ; (C)  $x > 1$ ; (D)  $x > e$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x =$  ( ).  
 (A)  $\frac{\pi}{2}$ ; (B)  $-\frac{\pi}{2}$ ; (C) 不存在; (D) 以上都不对
18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} =$  ( ).  
 (A) 1; (B) 0; (C) 不存在; (D)  $\infty$ .



19. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  不存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = ( \quad )$ .  
 (A) 存在; (B) 不存在; (C) 不能断定是否存在.
20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = ( \quad )$ .  
 (A)  $+\infty$ ; (B) 0; (C) 1; (D)  $-\infty$ .
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = ( \quad )$ .  
 (A) 0; (B) 2; (C) 不存在; (D)  $\frac{1}{2}$ .
22. 设  $a_0, b_0 \neq 0$ , 则当  $( \quad )$  时有  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k} = \frac{a_0}{b_0}$ .  
 (A)  $m > k$ ; (B)  $m = k$ ; (C)  $m < k$ ; (D)  $m \neq k$ .
23. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x - 1$  是  $( \quad )$ .  
 (A) 较  $x$  高阶的无穷小; (B) 较  $x$  低阶的无穷小;  
 (C) 与  $x$  同阶的无穷小; (D) 不为无穷小.
24. 设  $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{若 } -1 < x \leq 0; \\ x, & \text{若 } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ( \quad )$ .  
 (A)  $-1$ ; (B) 0; (C) 不存在; (D) 1.
25. 设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{若 } x \leq 0; \\ ax+b, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$  在分段点  $x=0$  处的极限为 1, 则  $b = ( \quad )$ .  
 (A) 1; (B)  $-1$ ; (C)  $\infty$ ; (D) 0.
26.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = ( \quad )$ .  
 (A) 1; (B)  $-1$ ; (C)  $\infty$ ; (D) 0.
27. 当  $x \rightarrow ( \quad )$  时,  $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 1$ .  
 (A) 0; (B)  $\infty$ ; (C) 1; (D)  $-1$ .
28. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  与  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  均不存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) ( \quad )$ .  
 (A) 不存在; (B) 存在; (C) 不能断定是否存在.
29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = ( \quad )$ .  
 (A) 1; (B)  $-1$ ; (C) 不存在; (D)  $\infty$ .

30. 点  $a$  的  $\delta$  邻域  $U(a, \delta)$  表示( ).  
 (A) 数集  $\{x | x - a < \delta\}$ ; (B) 数集  $\{x | x - a > \delta\}$ ;  
 (C) 数集  $\{x ||x - a| < \delta\}$ ; (D) 数集  $\{x ||x - a| > \delta\}$ .
31. 表示函数的方法主要有( ).  
 (A) 解析法; (B) 列表法;  
 (C) 解析法和列表法; (D) 解析法, 列表法和图象法.
32.  $y = \sin x + \cos x$  是( ).  
 (A) 奇函数; (B) 偶函数;  
 (C) 非奇非偶函数; (D) 非初等函数.
33. 函数  $y = \arcsin u$  与  $u = x^2 + 2$  ( ).  
 (A) 不能确定是否可复合成函数;  
 (B) 不可以复合成复合函数  $y = \arcsin(x^2 + 2)$ ;  
 (C) 可以复合成复合函数  $y = \arcsin(x^2 + 2)$ .
34. 基本初等函数包括:( ).  
 (A) 幂函数, 指数函数, 分段函数;  
 (B) 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 幂指函数;  
 (C) 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 幂指函数, 分段函数;  
 (D) 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数.
35. 函数  $y = \sin^2 x^2, y = x \ln(1 + x)$  是( ).  
 (A) 初等函数; (B) 基本初等函数;  
 (C) 非初等函数;  
 (D) 基本初等函数的为  $y = \sin^2 x^2$ , 不是基本初等函数的为  $y = x \ln(1 + x)$ .
36. 数列  $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots, \frac{1}{n!}, \dots$  的极限为( ).  
 (A) 1; (B) 0; (C)  $\frac{1}{n}$ ; (D)  $\frac{1}{2}$ .
37. 数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  ( ).  
 (A) 收敛; (B) 不收敛;  
 (C) 收敛于 1; (D) 收敛于 -1.
38.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$  ( ).  
 (A) 0; (B)  $\infty$ ; (C) 2; (D) 1.

39. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0; \\ x - 1, & x < 0. \end{cases}$  则( ).
- (A)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ; (B)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ ;  
 (C)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在; (D)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm 1$ .
40. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$  则( ).
- (A)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ; (B)  $f(x-0) \neq f(x+0)$ ;  
 (C)  $f(x-0) = 1$ ; (D)  $f(x+0) = -1$ .
41.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{2x^2} = ( )$ .
- (A) 0; (B)  $\frac{1}{2}$ ; (C) 1; (D)  $\infty$ .
42. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  则下列说法中正确的是( ).
- (A)  $f(x_0) = A$ ; (B)  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ ;  
 (C)  $f(x)$  在点  $x_0$  有定义; (D)  $f(x)$  在点  $x_0$  连续.
43. 下列四种说法中正确的是( ).
- (A) 0 是无穷小; (B) 无穷小是 0;  
 (C) 无穷个无穷小之和是无穷小; (D) 无穷个无穷小之积是无穷小.
44.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = ( )$  ( $x$  为不等于零的常数).
- (A)  $\infty$ ; (B) 1; (C) 0; (D)  $x$ .
45. 下列每对函数中, 相同的是( ).
- (A)  $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$ ; (B)  $f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ ;  
 (C)  $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$ ; (D)  $f(x) = 1, g(x) = \frac{x}{x}$ .
46. 下列命题正确的是( ).
- (A) 零是无穷小量, 但无穷小量并非都是零;  
 (B) 函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时的极限不存在, 因此函数  $f(x)$  为  $x \rightarrow \infty$  时的无穷大量;  
 (C) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$  (常数), 则函数  $f(x)$  在  $x_0$  点连续;  
 (D) 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  点取得极值, 则函数  $f(x)$  在  $x_0$  点可导, 且有  $f'(x_0) = 0$ .
47. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的附近有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在, 则( ).

- (A)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$  存在, 且等于  $A$ ;  
 (B)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$  存在, 且等于  $|A|$ ;  
 (C) 只有  $A = 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$  才存在;  
 (D)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 当且仅当  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ .
48. 已知函数  $\varphi(x) > \psi(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = b$ , 则( ).  
 (A)  $a > b$ ; (B)  $a \geq b$ ; (C)  $a = b$ ; (D)  $a < b$ .
49.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$  的值为( ).  
 (A) 2; (B)  $\frac{1}{2}$ ; (C) 1; (D)  $-\frac{1}{2}$ .
50. 函数  $y = \begin{cases} x-1, & x \geq 1; \\ 2-x, & x < 1. \end{cases}$  在  $x=1$  处( ).  
 (A) 连续; (B) 间断, 且  $x=1$  是函数的可去间断点;  
 (C) 间断, 且  $x=1$  是函数的第二类间断点; (D) 间断, 且  $x=1$  是函数的跳跃间断点.
51.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) =$  ( ).  
 (A) 1; (B) 0; (C)  $\infty$ ; (D) 不存在.
52.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n-1)} \right) =$  ( ).  
 (A) 0; (B) 1; (C)  $\infty$ ; (D) 不存在.
53.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+x^2}-1} =$  ( ).  
 (A) -2; (B) +2; (C) 0; (D)  $\infty$ .
54. 若变量  $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$  是无穷小量, 则  $x$  的变化趋向量( ).  
 (A)  $x \rightarrow 1$ ; (B)  $x \rightarrow -1$ ; (C)  $x \rightarrow 0$ ; (D)  $x \rightarrow \infty$ .

## 二、填空题

1. 设  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , 则  $f[f(x)] =$  \_\_\_\_\_.
2. 函数  $f(x) = 1-x^2$  与  $g(x) = \sqrt{(1-x^2)^2}$  \_\_\_\_\_ 恒等的.
3. 函数  $f(x) = 1$  与  $g(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$  \_\_\_\_\_ 恒等的.
4.  $y = \frac{1}{x^2}$  在  $(0, 1]$  内 \_\_\_\_\_ 界, 而在  $(\frac{1}{2}, 1]$  内 \_\_\_\_\_ 界.

5. 函数  $y = 3^{4x+3}$  的值域是\_\_\_\_\_.
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin mx}{2x} = \frac{2}{3}$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.
7. 函数  $y = a^{x+1}$  ( $0 < a < 1$ ) 是单调\_\_\_\_\_函数.
8. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $[0, 2]$ , 则函数  $f(x^2)$  的定义域为\_\_\_\_\_.
9. 函数  $y = \arcsin(x^2 - 3)$  是由\_\_\_\_\_组合而成的复合函数.
10. 设  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0; \\ x-1, & x < 0. \end{cases}$  则  $f(0) =$ \_\_\_\_\_,  $f(-1) =$ \_\_\_\_\_.
11. 考察奇偶性, 函数  $f(x) = x\sin x$  是\_\_\_\_\_函数, 因而其图形关于\_\_\_\_\_对称.
12. 考察奇偶性, 函数  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  是\_\_\_\_\_函数, 因而其图形关于\_\_\_\_\_对称.
13. 函数  $y = \frac{1}{|x| - x}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
14. 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 2; \\ x + A, & x < 2. \end{cases}$  在  $x = 2$  处连续, 则  $A =$ \_\_\_\_\_.
15. 函数  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1; \\ 2x, & 1 \leq x < 2; \\ x^2 - 4x + 8, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
16. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| =$ \_\_\_\_\_.
17. 变量  $y$  以常数  $A$  为极限的必要且充分条件是变量  $y$  可以表示为\_\_\_\_\_的和.
18. 若数列  $\{x_n\}$  单调且\_\_\_\_\_, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  必定存在.
19. 凡无穷小量皆以\_\_\_\_\_为极限.
20. 设在自变量的某个变化过程中,  $\alpha(x)$  是无穷小量,  $A(x)$  是有界变量, 则  $\alpha(x) \cdot A(x)$  是\_\_\_\_\_量.
21. 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的连续区间是\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
22. 函数  $f(x) = \frac{1}{1 - \ln x^2}$  的连续区间是\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
23. 设  $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ , 则  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) =$ \_\_\_\_\_.
24. 函数  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  的间断点是\_\_\_\_\_, 其为第\_\_\_\_\_类间断点, 属\_\_\_\_\_型.
25. 函数  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  的间断点是\_\_\_\_\_, 其为第\_\_\_\_\_类间断点, 属\_\_\_\_\_型.
26. 函数  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$  的间断点是\_\_\_\_\_, 其为第\_\_\_\_\_类间断点, 属\_\_\_\_\_型.
27. 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$  的间断点是\_\_\_\_\_, 其为第\_\_\_\_\_类间断点, 属\_\_\_\_\_型.
28. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 1; \\ x, & 1 < x < 2; \\ 2x - 2, & x \geq 2. \end{cases}$  则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ \_\_\_\_\_,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ \_\_\_\_\_,  
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ \_\_\_\_\_,  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$ \_\_\_\_\_.

## 三、计算题

指出下列各函数的复合过程

1.  $y = \sin^2 x$ ;

3.  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ;

5.  $y = e^{\arctg \sqrt{x^2 - 1}}$ .

2.  $y = \sin x^2$ ;

4.  $y = \arcsin(3x + 1)$ ;

求下列各函数的定义域

6.  $y = \lg(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$ ;

7.  $y = \sqrt{3 - x} + \arcsin \frac{3 - 2x}{5}$ ;

8.  $y = \sqrt{x - 2} + \frac{1}{x - 3} + \lg(5 - x)$ ;

9.  $y = \sqrt{16 - x^2} + \lg \sin x$ .

求下列各极限

10.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 \ln x)$ ;

11.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{16 - x^2}}{(x^2 + 1) \lg x}$ ;

12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 5}{3x + 1}$ ;

13.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x^2 - 4}$ ;

14.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + \ln(2 - x)}}{4 \arctg x}$ ;

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 5x}{3x^3 + 2x^2 + x}$ ;

16.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$ ;

17.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$ ;

18.  $\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^3 + 4u^2 + 4u}{u^2 + 5u + 6}$ ;

19.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ , 其中  $m, n$  为正整数;

20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10} - 7n + 1}{4n^{10} - 8n^3 + 4n^2 - 1}$ ;

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}$ ;

22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}$ ;

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n^2} - n}$ ;

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 1}{3x^4 + 1}$ ;

25.  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ ;

26.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{1 + 2x} - 3}$ ;

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ ;

28.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$ ;

29.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x + 2}}{1 - \sqrt[3]{x}}$ ;

30.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ ;

31.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ ;

32.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x}$ ;

33.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ ;

34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{4x}$ ;

35.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 2} \sin \frac{1}{x} \right)$ ;

36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$ ;

37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x}$ ;

38.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^{10x-3}$ ;
39.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{3 \sec x}$ ;
40.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{5}{2}}) \sqrt{\sin 2x}}{(\operatorname{tg} x)^3}$ ;
41.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2 \sqrt[3]{x^2-1}}$ ;
42.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$ ;
43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\operatorname{tg} x}$ ;
44.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$ .
45. 设  $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{若 } -1 < x < 0; \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{若 } 0 \leq x < 1. \end{cases}$  问:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  是否存在?
46. 设  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ , 问: 需定义  $f(0)$  为何值才能使  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续?
47. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & \text{若 } x < 0; \\ k, & \text{若 } x = 0; \\ 1 + x \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$  问:  $k$  为何值  $f(x)$  才在其整个定义域内连续?
48. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, & \text{若 } x > 0; \\ 1 - 3e^{-x}, & \text{若 } x \leq 0. \end{cases}$  的连续性.
49. 当  $x \rightarrow 0$  时, 试确定  $x \sin \sqrt{x}$  是关于  $x$  的几阶无穷小量.
50. 当  $x \rightarrow 0$  时, 试确定  $\sqrt[5]{4x^3 - 3x^4}$  是关于  $x$  的几阶无穷小量.
51. 当  $x \rightarrow 0$  时, 试确定  $\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \sin x}$  是关于  $x$  的几阶无穷小量.
52. 当  $x \rightarrow 1$  时, 无穷小量  $1-x$  与  $1 - \sqrt[3]{x}$  是否同阶? 是否等价?
53. 当  $x \rightarrow 1$  时, 无穷小量  $1-x$  与  $2(1 - \sqrt{x})$  是否同阶? 是否等价?

求下列各极限

54.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} \cdot (3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$ ;
55.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$ ;
56.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$ ;
57.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ ;
58.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}$ ;
59.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$ ;
60.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$ ;
61.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x}$ ;
62.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x]$ ;
63.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ ;
64.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .
65. 设函数  $f(u)$  在区间  $(0, 1)$  有定义, 求下列函数的定义域:  
(1)  $f(\sin x)$ ; (2)  $f(\ln x)$ .
66. 设  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , 求  $f[f(x)], f\{f[f(x)]\}$ .

67. 设  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$  ( $x > 0$ ), 求  $f(x)$ .

68. 能否补充定义函数  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$  在  $x = 0$  处的值, 使  $f(x)$  在  $x = 0$  处变成连续?

69. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ x + 3, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$ , 试问在  $x = \frac{1}{2}, x = 1, x = 2$  诸点处  $f(x)$  是否连续?

70. 设  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 < x < 1; \\ 2, & \text{若 } x = 1; \\ 2 - x, & \text{若 } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(1) 求  $f(x)$  的定义域;

(2)  $x = 1$  是  $f(x)$  的什么间断点, 为什么?

(3) 改变  $f(x)$  在  $x = 1$  的定义, 使  $f(x)$  在  $x = 1$  点变成连续.

71. 试确定  $c$  为何值时, 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7, & \text{若 } |x| \leq c; \\ \frac{6}{|x|}, & \text{若 } |x| > c. \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

#### 四、证明题

1. 用“ $\epsilon-N$ ”定义证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ .

2. 用“ $\epsilon-N$ ”定义证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$ .

3. 用“ $\epsilon-N$ ”定义证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3+4} = 0$ .

4. 用“ $\epsilon-X$ ”定义证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+5}{x} = 6$ .

5. 用“ $\epsilon-X$ ”定义证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$ .

6. 用“ $\epsilon-\delta$ ”定义证明:  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

7. 用“ $\epsilon-\delta$ ”定义证明:  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ .

8. 证明方程  $x^5 - 3x = 1$  在区间  $(1, 2)$  内至少有一个根.

9. 证明方程  $\cos x = x$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内至少有一实根.

10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) < a, f(b) > b$ , 试证: 在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .

11. 试证: 方程  $x = a \sin x + b$  ( $a > 0, b > 0$ ) 至少有一个不超过  $a + b$  的正根.

12. 试证: 方程  $x2^x = 1$  至少有一个小于 1 的正根.

13. 已知  $f(x) = 9x + 1, g(x) = x^2$ , 求证满足  $g[f(x)] = f[g(x)]$  的所有  $x$  值为:

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{4}.$$

14. 对于任意实数  $x$  和整数  $n$ , 定义  $F(\sin x) = \sin(4n+1)x$ , 求证:  $F(\cos x) = \cos(4n+1)x$ .

15. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续,  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ . 证明: 在  $(a, b)$  内存在一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$



## 第一章 习题答案

## 一、单项选择题

1. D;      2. C;      3. C;      4. D;      5. D;      6. D;      7. A;      8. B;  
 9. A;      10. D;      11. C;      12. D;      13. C;      14. D;      15. D;      16. B;  
 17. C;      18. B;      19. C;      20. C;      21. D;      22. B;      23. C;      24. C;  
 25. A;      26. B;      27. B;      28. C;      29. C;      30. C;      31. D;      32. C;  
 33. B;      34. D;      35. A;      36. B;      37. B;      38. C;      39. C;      40. A;  
 41. B;      42. B;      43. A;      44. D;      45. B;      46. A;      47. B;      48. B;  
 49. D;      50. D;      51. A;      52. B;      53. B;      54. B.

## 二、填空题

1.  $1 - \frac{1}{x}$ . 因  $f[f(x)] = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$ .
2. 不是, 因  $g(x) = |1-x^2|$ .      3. 是, 因对应法则与定义域均相同.      4. 无, 有.
5.  $(0, +\infty)$ , 因为由  $y = 3^{4x+3}$  可解得反函数  $x = \frac{1}{4}(\log_3 y - 3)$ , 而此反函数的定义域为  $(0, +\infty)$ .
6.  $\frac{4}{9}$ ;      7. 递减; 因  $y = a \cdot a^x$ , 当  $0 < a < 1$  时  $a^x$  是单调递减函数.
8.  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . 由假设有  $0 \leq x^2 \leq 2$ , 即  $x^2 \leq 2$ , 则  $|x| \leq \sqrt{2}$ .
9.  $y = \arcsin u, u = x^2 - 3$ .
10. 1, -2. 因  $f(0) = 0 + 1 = 1, f(-1) = (-1) - 1 = -2$ .      11. 偶, y 轴.
12. 奇, 原点. 因  $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$   
 $= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$ .
13.  $(-\infty, 0)$ .      14. 1.      15.  $[0, 3]$ .
16.  $|a|$ . 因  $xy \leq |xy|$ , 则  $x^2 - 2|xy| + y^2 \leq x^2 - 2xy + y^2$ , 即  $(|x| - |y|)^2 \leq (x - y)^2$ ,  
 从而  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ . 由此, 对于任给的  $\epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$  满足当  $n > N(\epsilon)$  时,  
 总有  $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \epsilon$ . 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ .
17. A 与一个无穷小量.      18. 有界.      19. 数零.      20. 无穷小.
21.  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ .      22.  $(-\infty, -\sqrt{e}), (-\sqrt{e}, 0), (0, \sqrt{e}), (\sqrt{e}, +\infty)$ .
23.  $\pi$ .      24.  $x = 0$ , 第二, 振荡.      25.  $x = -1$ , 第一, 可去.
26.  $x = -1$ , 第二, 无穷.      27.  $x = 0$ , 第一, 可去.      28. -3, 不存在, 2, 6.

## 三、计算题

1.  $y = u^2, u = \sin x$ .      2.  $y = \sin u, u = x^2$ .      3.  $y = u^{\frac{1}{2}}, u = x^2 + 1$ .  
 4.  $y = \arcsin u, u = 3x + 1$ .      5.  $y = e^u, u = \arctg v, v = t^{\frac{1}{2}}, t = x^2 - 1$ .