大学数学竞赛指导

国防科学技术大学大学数学竞赛指导组

清华大学出版社

大学数学竞赛指导

国防科学技术大学大学数学竞赛指导组

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为大学生数学竞赛指导而编写的。全书共分6部分，计19讲。主要内容涵盖高等数学与数学分析、线性代数与高等代数、概率论与数理统计等本科数学基础核心课程。全书例题丰富，行文流畅，深入浅出，富有启发性与可读性。

本书既可作为大学生数学竞赛指导的教材，也可作为本科生参加全国硕士研究生数学课程人学考试的重要辅助资料，同时，对大学数学教师及工程技术人员来说也是一本不可多得的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学竞赛指导/国防科学技术大学大学数学竞赛指导组. —北京：清华大学出版社，2009.10

ISBN 978-7-302-21213-3

Ⅰ．大…　Ⅱ．国…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第174310号

责任编辑：佟丽霞　赵从棉
责任校对：赵丽敏
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　**印　张**：20.75　**字　数**：369千字
版　次：2009年10月第1版　**印　次**：2009年10月第1次印刷
印　数：1～4000
定　价：32.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：035469-01

前言

大学生数学竞赛活动为青年学子提供了一个展示基础知识和思维能力的舞台。大学生数学竞赛活动的开展对高等学校培养人才，促进数学课程的改革与建设，增强大学生学习数学的兴趣，培养大学生的创新精神和应用能力有着重要的意义。

本书是为大学生数学竞赛指导而编写的，全书分 6 部分，共 19 讲。第 1 部分由李建平、陈挚、朱健民执笔，第 2 部分由周治修、覃左平、郑言执笔，第 3 部分和第 4 部分由戴清平、冯良贵执笔，第 5 部分由李永乐执笔。主要内容包括 3 个系列：第 1 部分高等数学与第 2 部分数学分析为第 1 系列；第 3 部分线性代数与第 4 部分高等代数为第 2 系列；第 5 部分概率论与数理统计为第 3 系列。其中，第 2 部分数学分析内容和第 4 部分高等代数内容可分别看成第 1 部分高等数学内容和第 3 部分线性代数内容的加深和拓广。第 6 部分包括非数学类与数学类模拟试题共 6 套，供自我检测。

多年来，我校十分重视大学生数学竞赛活动的开展，形成了以冯良贵、李建平、朱健民、戴清平、陈挚、周治修、覃左平、李永乐、郑言、刘雄伟等为骨干的一支稳定的数学竞赛指导组，并在湖南省历届大学数学竞赛中取得佳绩。本书正是集我们数学竞赛指导组全体同仁多年来的教学经验而成稿的，有些例题属我们原创，有些例题则属摘编而得。由于编者水平有限，加之时间仓促，错误在所难免，不当之处还请各位专家批评指正。

国防科学技术大学大学数学竞赛指导组

2009 年 8 月

目录

第1部分

大学数学竞赛指导

第1讲 导数与偏导数

例 1.1

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x+x\cdot f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}.$$

(2) 常用的等价无穷小包括：当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x;\quad \tan x\sim x;\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};$$

$$\ln(1+x)\sim x;\quad e^x-1\sim x;\quad (1+x)^\alpha\sim\alpha x.$$

例 1.2　设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，证明：存在常数 A,B，使得当 $x\to 0^+$ 时，恒有

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2),$$

并求常数 A,B.

证　先将函数 $f(x)$ 展开为带佩亚诺(Peano)余项的二阶麦克劳林(Maclaurin)公式，得

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\\&=e^{\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\\&=e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\\&=e\cdot\left[1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right]\\&=e\cdot\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right]=e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2).\end{aligned}$$

由此得 $A=-\frac{e}{2}$，$B=\frac{11}{24}e$.

例 1.3　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)\neq 0$.

(1) 证明：对于任何非零实数 x，存在唯一的 $\theta(x)(0<\theta(x)<1)$，使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$.

证　(1) 对于任何非零实数 x，由拉格朗日中值定理知，存在 $\theta(x)(0<\theta(x)<1)$，使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

如果这样的 $\theta(x)$ 不唯一，则存在 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)(\theta_1(x)<\theta_2(x))$，使得 $f'(x\theta_1(x))=f'(x\theta_2(x))$，由罗尔定理，存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$. 这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾，所以 $\theta(x)$ 是唯一的.

(2) 因为 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x\theta(x)}$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

例 1.4　求使不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$ 对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 和最小的数 β.

解　已知不等式等价于

$$(n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant 1\leqslant (n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

所以

$$\alpha\leqslant\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\leqslant\beta.$$

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$, $x\in[0,1]$，则

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{1+x}}{\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

再令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$, $x\in[0,1]$，则 $g(0)=0$，且

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x,\quad g'(0)=0,$$

$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0,$$

故 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递减，所以 $g'(x)<g'(0)=0$. 同理，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上也严格单调递减，故 $g(x)<g(0)=0$，即 $(1+x)\ln^2(1+x)-x^2<0$，从而 $f'(x)<0\,(0<x\leqslant 1)$，因此 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上也严格单调递减.

令 $x=\frac{1}{n}$，则 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$,

$$\max\alpha=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{\ln 2}-1,$$

$$\min\beta=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$
=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+(1+x)\ln(1+x)}
$$

$$
=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\ln(1+x)+1}=\frac{1}{2}.
$$

因此，使不等式对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 为 $\frac{1}{\ln 2}-1$，最小的数 β 为 $\frac{1}{2}$.

例 1.5　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证　因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)>0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，故 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)<0$，则由零点定理知，至少存在点 $x_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 及 $x_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，使得 $f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$.

作辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导，且 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$，因为 $F(x_1)=F(x_2)=0$，由罗尔定理知，存在点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，从而 $f'(\xi)=f(\xi)$.

例 1.6　(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $|f''(x)|\geqslant m>0$（m 为常数），又 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\geqslant\frac{m}{8}(b-a)^2$.

(2) 设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $|g''(x)|\geqslant 1$，则在曲线段 $y=g(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 上，存在 3 个点 A,B,C，使得 $S_{\triangle ABC}\geqslant\frac{(b-a)^3}{16}$.

证　(1) 因函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，故存在 $x_0\in[a,b]$，使

$$
\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|f(x_0)|.
$$

由于 $f(a)=f(b)=0$，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是常数，故 $x_0\neq a$，$x_0\neq b$，即 $x_0\in(a,b)$. 从而，$f(x)$ 在点 x_0 处取得极值，因此 $f'(x_0)=0$. 由泰勒公式，$\forall x\in(a,b)$，恒有

$$
f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,
$$

例 1.7

$t\in[0,1]$. 因为函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，$f(0)=-1$，$f(1)=0$，故 $g(x)=g(0)=g(1)=0$，从而 $\exists\,\xi_1\in(0,x)$，$\xi_2\in(x,1)$，使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$，且 $0<\xi_1<x<\xi_2<1$，同时

$$g'(t)=f'(t)-2t-\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(3t^2-2t),$$

由 $f'(0)=0$ 知，$g'(0)=0$. 由 $g'(0)=g'(\xi_1)=0$ 知，$\exists\,\eta_1\in(0,\xi_1)$，使得 $g''(\eta_1)=0$；由 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$ 和 $\xi_1<\xi_2$ 知，$\exists\,\eta_2\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $g''(\eta_2)=0$；再由 $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$ 知，$\exists\,\xi\in(\eta_1,\eta_2)$，使得 $g'''(\xi)=0$.

又
$$g''(t)=f''(t)-2-\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(6t-2),$$

$$g'''(t)=f'''(t)-6\,\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)},$$

由 $g'''(\xi)=0$，得 $f'''(\xi)=6\,\dfrac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}$，即 $f(x)=-1+x^2+\dfrac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)$.

例 1.8 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足 $|f''(x)|\leqslant 1$，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内取得最大值 $\dfrac{1}{4}$. 证明：$|f(0)|+|f(1)|\leqslant 1$.

证 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内点 x_0 处取得最大值 $\dfrac{1}{4}$，则 $f'(x_0)=0$. 由泰勒公式知

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2,\quad 0<\xi_1<x_0,$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2,\quad x_0<\xi_2<1.$$

因为 $|f''(x)|\leqslant 1$，所以

$$|f(0)|+|f(1)|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[x_0^2+(1-x_0)^2].$$

又当 $0<x_0<1$ 时，$x_0^2+(1-x_0)^2=2\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\leqslant 1$，所以，结论成立.

例 1.9 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，证明：$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证 依题意，存在正常数 M_0，M_2，使得 $\forall\,x\in(-\infty,+\infty)$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M_0,\quad |f''(x)|\leqslant M_2.$$

由泰勒公式，有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(\xi),\quad \text{其中 }\xi\text{ 介于 }x\text{ 与 }x+1\text{ 之间},$$

整理得 $f'(x)=f(x+1)-f(x)-\dfrac{1}{2}f''(\xi)$，所以，

$$|f'(x)| \leqslant |f(x+1)| + |f(x)| + \frac{1}{2}|f''(\xi)| \leqslant 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

所以，函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

例 1.10　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内三阶可导，且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，证明：$f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证　依题意，存在正常数 M_0, M_3，使得 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M_0, \quad |f'''(x)| \leqslant M_3.$$

由泰勒公式，有

$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{3!}f'''(\xi)$，其中 ξ 介于 x 与 $x+1$ 之间，

$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{3!}f'''(\eta)$，其中 η 介于 x 与 $x-1$ 之间，

上述两式相加，整理得

$$f''(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) - \frac{1}{6}[f'''(\xi) - f'''(\eta)],$$

所以，

$$\begin{aligned}|f''(x)| &\leqslant |f(x+1)| + 2|f(x)| + |f(x-1)| + \frac{1}{6}[|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|] \\ &\leqslant 4M_0 + \frac{M_3}{3}.\end{aligned}$$

再由两式相减，整理得

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)] - \frac{1}{6}[f'''(\xi) + f'''(\eta)],$$

所以，

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leqslant \frac{1}{2}[|f(x+1)| + |f(x-1)|] + \frac{1}{6}[|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|] \\ &\leqslant M_0 + \frac{M_3}{3}.\end{aligned}$$

综上所述，函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

例 1.11　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶导数，并且

$$|f(x)| \leqslant M_0, \quad |f''(x)| \leqslant M_2, \quad -\infty < x < +\infty.$$

证明：$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$，$-\infty < x < +\infty$.

证　由泰勒公式

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$，　ξ 介于 x_0 与 x 之间.

任取 $h>0$，分别令 $x = x_0 - h$ 与 $x_0 + h$，那么

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2,\quad x_0-h<\xi_1<x_0,$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2,\quad x_0<\xi_2<x_0+h,$$

于是，由以上两式得

$$2f'(x_0)h=f(x_0+h)-f(x_0-h)+\left[\frac{f''(\xi_1)}{2!}-\frac{f''(\xi_2)}{2!}\right]h^2,$$

从而由题设条件知

$$|f'(x_0)|h\leqslant M_0+\frac{M_2}{2}h^2.$$

如果 $M_2=0$，则 $|f'(x_0)|\leqslant\frac{M_0}{h}(h>0)$，令 $h\to+\infty$，得 $f'(x_0)=0$.

如果 $M_2>0$，则二次三项式 $M_2h^2-|f'(x_0)|h+2M_0\geqslant0(h>0)$，故其判别式

$$|f'(x_0)|^2-2M_0M_2\leqslant0.$$

由此得不等式 $|f'(x_0)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$，其中 x_0 为任意实数.

例 1.12　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f''(x)\neq0$，满足

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恰好有两个零点.

证　因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不能同号，从而由闭区间上连续函数的性质知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

假定 $x=\alpha$ 是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的唯一零点，不妨设当 $0<x<\alpha$ 时，$f(x)<0$，当 $\alpha<x<1$ 时，$f(x)>0$，则 $\int_0^1(x-\alpha)f(x)\mathrm{d}x>0$，但是 $\int_0^1(x-\alpha)f(x)\mathrm{d}x=0$，矛盾. 所以，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点.

如果 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有 3 个零点，设为 $x_1,x_2,x_3\,(x_1<x_2<x_3)$，则 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$，由罗尔定理知，存在点 $a\in(x_1,x_2)$，$b\in(x_2,x_3)$，使 $f'(a)=0$，$f'(b)=0$. 对 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$，这与 $f''(x)\neq0$ 矛盾. 所以，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恰好有两个零点.

例 1.13　设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数.

(1) 试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得在区间 $[0,\xi]$ 上以 $f(\xi)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[\xi,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积；

(2) 如果 $f(x)$在$(0,1)$内可导，且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明：(1)中的 ξ 是唯一的.

证　(1) 问题等价于证明方程

$$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - xf(x) = 0$$

在区间$(0,1)$内有实数根. 作辅助函数

$$F(x) = x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则 $F(x)$在$[0,1]$上可导，且

$$F'(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - xf(x).$$

又因为 $F(0)=F(1)=0$，则至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 依条件知，$F''(x)=-2f(x)-xf'(x)<0(0<x<1)$，所以 $F'(x)$在区间$[0,1]$上严格单调减少，从而 $F'(x)$在区间$[0,1]$上只有唯一的零点.

例 1.14　设在$(-\infty,+\infty)$内，函数 $f(x)$连续，$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 单调减少，证明：$f(x)\equiv 0$.

证　作辅助函数

$$F(x) = \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2,$$

则

$$F'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 2g(x)$$

在$(-\infty,+\infty)$内单调减少. 因为，$F'(0)=0$，则当 $x\leqslant 0$ 时，

$$F'(x)\geqslant F'(0) = 0,$$

当 $x>0$ 时，

$$F'(x)\leqslant F'(0) = 0.$$

所以，$F(x)$在$(-\infty,0]$内单调增加，在$(0,+\infty)$内单调减少，所以 $F(x)$在 $x=0$ 处取最大值. 从而，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有

$$F(x)\leqslant F(0) = 0,$$

但 $F(x)\geqslant 0$，所以，$F(x)\equiv 0$. 于是，

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \equiv 0,$$

所以，$f(x)\equiv 0$.