中等职业教育课程改革国家规划新教材

全国中等职业教育教材审定委员会审定

数学

SHUXUE

下册

基础模块

语文出版社

编写说明

中等职业教育课程改革国家规划新教材《数学》是根据教育部2009年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》规定的课程教学目标和教学内容，紧密结合中等职业学校教学实际和学生实际而编写的。根据大纲规定的三个模块的教学内容和要求，本套教材分为《数学（基础模块）》（上、下册），《数学（职业模块）》（工科类分册、服务类分册）及《数学（拓展模块）》，共五册教材。

本教材为《数学（基础模块）》，计划学时数为128学时，其中上册60学时，下册68学时。基础模块是教学大纲中规定的各专业学生必修的基础性内容和应达到的基本要求，基于基础模块的教学内容要求及中职数学教学实际，本教材的编写特色体现在以下几个方面：

1. 从中职数学教学的特点出发，加强教材的基础性、实用性和灵活性。

新教材适用于不同地区、不同类型的职业学校，为不同专业，不同水平，不同发展需求的学生提供适宜的学习平台。根据新大纲的教学要求，教材的编写更加突出知识的基础性、应用性以及学生获取知识手段的多样性，其表现为知识低难度，教材叙述、例题的选择尽量贴近职校生的学习与生活实际，体现了时代的特色，体现了“实用为主、够用为度”的编写理念。

2. 着眼于中职数学教学的实际，通过“低起点、巧衔接”的编写手法，力求实现学生乐于学，教师便于教的目标。

教材编写遵循学生认知发展的规律，降低知识的起点，由已知到未知，由浅入深，由具体到抽象。教材编写既关注与初中数学知识的衔接，又兼顾与专业课程内容的衔接。例如，教材在每一章起始安排了“回顾与思考”和相应的问题情境，使学生在已有经验的回顾或问题情境中，自然进入新知识的学习、探索。又如，“工具箱”栏目帮助学生适时回忆已有知识，为有效运用知识经验提供了帮助，同时教师也可以通过此栏目帮助有困难的学生复习旧知识，体现了教材的弹性；例题的讲解深入浅出、并尽量将“步子”迈得小一些，使学生接受起来容易一些，教师教学方便一些；每章的“归纳与

总结”，适当设计了条件填充或结论填充，为学生提供了数学学习方法的指导。

3. 注重学生的参与，活跃学生的思维，为学生终身发展打基础。

通过多年的教材编写及教学实践反馈，我们感受到数学教师在教学设计的过程中均力争将课堂变成师生共同活动的场所，越发强调学生的参与。因此教材在知识形成过程中设计了“试一试”“想一想”“议一议”“练一练”等环节，通过师生动手实验、合作交流，让学生的思维活跃起来，积极参与到教学过程中来。这样，既希望实现学生学会，又希望通过学习过程实现学生会学，为学生的终身发展奠定基础。

4. 注重教材的可读性，培养学生的学习兴趣、价值观和人文精神。

在保证科学性的基础上，教材写作尽量运用贴近学生的语言，增加趣味性。教材中的“学习小贴示”（小常识、名词解释）“阅读空间”（数学名人轶事、数学发展简介、数学与其他学科的联系、趣味性较强的数学应用题等），既通俗易懂又生动有趣，意在开阔学生的眼界、提高学生数学学习兴趣、培养学生价值观和人文精神。

5. 突出数学与现代信息技术的结合，体现教材的现代性。

随着现代信息技术不断更新发展，数学教学手段、方法也在不断的更新、并且更加便捷，学生解决数学问题的方法也更加多样。本教材的编写强调与信息技术的结合，如“数学实验”等内容的设置便是强调计算器、计算机软件等信息技术的使用，意在培养学生的计算能力和数据处理能力，同时为教师教学提供更为直观、高效的教学手段。

6. “三合一”功能的教参，导学性强大的学生学习指导用书。

教参的编写将教材分析与教学建议、教学资源开发与利用、教学研究拓展三者合为一体，为帮助教师理解教材，实现数学课堂教学的优化设计与有效实施，提供了丰富的指导性意见及参考资料。同时各册教参均配有教学指导光盘，以提高教师备课效率。学生学习指导用书除了具备作业册的功能外，还具备复习、总结的功能，提高了学生的学习效率和能力。

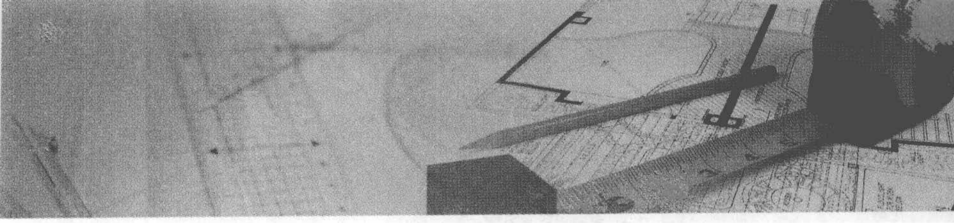
为了编写出高质量、高水平的中等职业教育课程改革国家规划新教材，我社成立了中等职业教育课程改革国家规划新教材编写委员会，编委会主任：王旭明、王晓庆；编委会委员（以姓氏笔划为序）：王立善、王社光、

方鸣、尹江峰、邓弘、石林百、向伟、李秋芳、张建虹、张景斌、张程、金朝晖、赵大鹏、赵贝、赵曾、柯敬贵、龚双江、彭世东、董强、惠和兴、戴宗显。

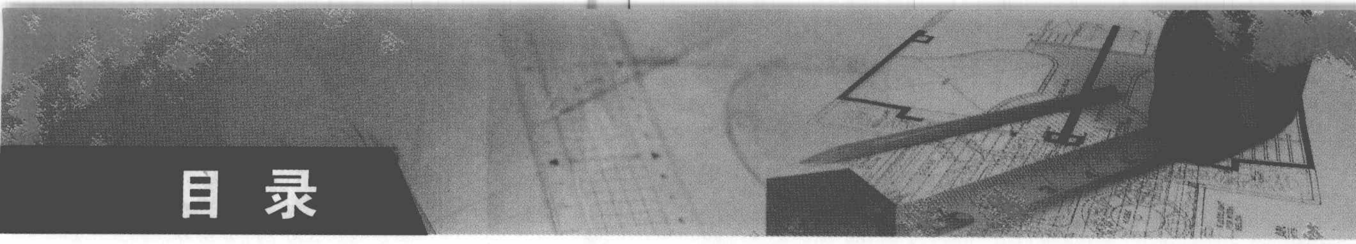
衷心希望广大中等职业学校的老师、同学在使用这套教材的过程中有什么意见与建议及时跟我们反馈，我们愿意和您们一道，为提高中等职业教育数学教学水平而努力。

语文出版社

2009年11月



目录



目录

第六单元　数　列

回顾与思考

国际象棋起源于古代印度，棋盘上共有8行8列，构成64个格子．国王要奖赏国际象棋的发明者，问他有什么要求，发明者说：“请在棋盘的第1个格子里放上1颗麦粒，在第2个格子里放上2颗麦粒，在第3个格子里放上4颗麦粒，在第4个格子里放上8颗麦粒，依此类推，每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的2倍，直到第64个格子，请给我足够的粮食来实现上述要求”．国王觉得这并不是很难办到的事，就欣然同意了他的要求．

国王真的有能力满足国际象棋发明者上述的要求吗？让我们来分析一下：

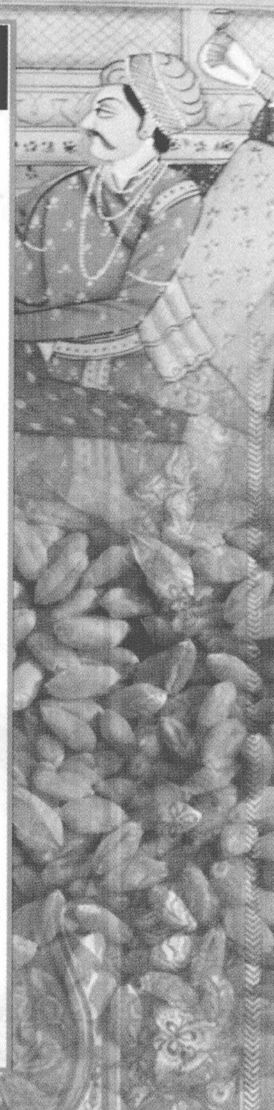
由于每个格子里的麦粒数都是前一个格子里的麦粒数的2倍，且共有64个格子，每个格子里的麦粒数依次是

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{63}$$

即国王要给发明者$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$颗麦粒．

那么这个和数是多少呢？

学习了数列的知识，你就会得到答案．



6.1 数列的概念

引例

我们来做一个游戏：在沙滩上用小石子摆成下面的图形，如图 6－1 所示，

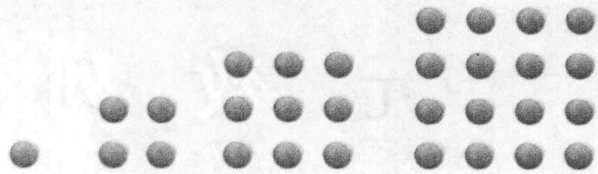


图 6－1

组成上面每个图形的石子数构成了一列数：1，4，9，16.

1. 数列的概念

先看几个例子，正整数 1，2，3，4，5 的倒数排成一列数：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}. \qquad ①$$

－1 的 1 次方，2 次方，3 次方，4 次方，……排成一列数：

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots. \qquad ②$$

无穷多个 5 排成一列数：

$$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \cdots. \qquad ③$$

在上面的例子中，像这样按一定顺序排列的一列数叫做**数列**．数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**．

试一试 你能举出几个现实生活中与数列有关的例子吗？

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**．如引例以及上面的数列①就是有穷数列，数列②，③则是无穷数列．

想一想

根据数列的定义，判断下面各题中的两个数列是否是相同的数列：

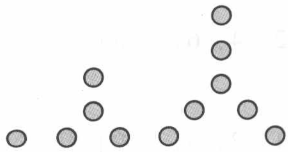
(1) 数列 0，1，2，3，4，5，…和数列 1，2，3，4，5，…；

(2) 数列 1，2，3，4，5，…和数列 1，2，3，4，5；

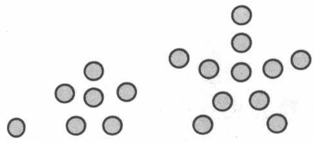
(3) 数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$ 和数列 $\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1$.

练习

1. 根据下列图形及相应的点数，在空格和括号中分别填上适当的图形和点数：

(1)  ________ ________；

1　　4　　7　　(　)　　(　)

(2)  ________ ________

1　　6　　11　　(　)　　(　)

2. 写出下列各数列，并分别指出哪些数列是有穷数列，哪些数列是无穷数列？
   (1) 自然数 1，2，3，4，5 的平方排成一列数；
   (2) 整数 −4，−3，−2，−1，0 的绝对值排成一列数；
   (3) 正整数 1，2，3，4，5，…的倒数的平方排成一列数；
   (4) 正整数 1，2，3，4，5，…的立方根排成一列数．

2. 数列的通项公式

由于数列的项都是按一定顺序排列的，因此每一项都占有一个不同的序号．对于下面的数列，每一项与它的序号有下面的对应关系：

$$\begin{array}{ccccc} \text{项} & 1 & 4 & 9 & 16 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

在数列相应序号的位置上的项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项，第 3 项，…，第 n 项，…，并依次用 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…来表示．因此数列的一般形式可写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

通常把第 n 项 a_n 叫做**数列的通项**，并把数列简记为$\{a_n\}$．例如，

把数列　2，3，4，5，…，$n+1$，…，简记为数列$\{n+1\}$．

把数列　$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$，简记为数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$．

如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与序号n之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的**通项公式**，其中序号$n\in\mathbf{N}_+$. 例如，

把正整数从小到大排成数列1，2，3，…的通项公式是

$$a_n=n;$$

把正偶数从小到大排成数列2，4，6，…的通项公式是

$$a_n=2n;$$

把正奇数从小到大排成数列1，3，5，…的通项公式是

$$a_n=2n-1.$$

试一试

请写出下列每个数列的一个通项公式：

(1) $-1, 1, -1, 1, \cdots$;　　(2) $5, 5, 5, 5, \cdots$;

(3) $-1, 0, 1, 2, 3, \cdots$;　　(4) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$.

知道了一个数列的通项公式后，只要依次用正整数1，2，3，…去代替公式中的n，就可以求出这个数列的各项. 因此，已知数列的通项公式，就等于知道了数列的每一项.

例1 已知下面数列$\{a\}$的通项公式，分别写出它们的前5项和第10项：

(1) $a_n=\dfrac{2n}{2n+1}$;

(2) $a_n=(-1)^n\cdot(2n-1)$.

解：(1) 在通项公式中依次取$n=1, 2, 3, 4, 5, 10$，可得到

$$a_1=\frac{2\times1}{2\times1+1}=\frac{2}{3}, a_2=\frac{2\times2}{2\times2+1}=\frac{4}{5}, a_3=\frac{2\times3}{2\times3+1}=\frac{6}{7},$$

$$a_4=\frac{2\times4}{2\times4+1}=\frac{8}{9}, a_5=\frac{2\times5}{2\times5+1}=\frac{10}{11}, a_{10}=\frac{2\times10}{2\times10+1}=\frac{20}{21}.$$

(2) 在通项公式中依次取$n=1, 2, 3, 4, 5, 10$，可得到

$$a_1=(-1)^1\times(2\times1-1)=-1, a_2=(-1)^2\times(2\times2-1)=3,$$

$$a_3=(-1)^3\times(2\times3-1)=-5, a_4=(-1)^4\times(2\times4-1)=7,$$

$$a_5=(-1)^5\times(2\times5-1)=-9, a_{10}=(-1)^{10}\times(2\times10-1)=19.$$

例2 写出下面数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 3，5，7，9；

(2) $\frac{2^2-1}{2}$, $\frac{3^2-1}{3}$, $\frac{4^2-1}{4}$, $\frac{5^2-1}{5}$;

(3) $\frac{1}{1\times2}$, $-\frac{1}{2\times3}$, $\frac{1}{3\times4}$, $-\frac{1}{4\times5}$.

分析：已知数列的前几项，求它的一个通项公式，主要通过分析、比较，去发现每一项与它的序号之间的关系，从而归纳出 a_n 与 n 之间的对应关系式.

解：(1) 这个数列的前 4 项都是序号的 2 倍加 1，所以它的一个通项公式是 $a_n=2n+1$；

(2) 这个数列的前 4 项的分母都是序号加上 1，分子是分母的平方减去 1，所以它的一个通项公式是 $a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}$；

(3) 这个数列的前 4 项的绝对值都是序号与序号加 1 的积的倒数且奇数项为正，偶数项为负，所以它的一个通项公式是 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

议一议

数列通项公式中 a_n 与序号 n 之间的关系是否可以看做是一个函数？如果是，讨论一下函数的定义域.

学习小贴示

与函数一样，数列也可以用列表、图像等方法来表示．数列的图像是一系列离散的点．例如：把正偶数按从小到大的顺序排成数列 2，4，6，…，可以用列表法和图像法分别表示，如下表及图 6-2 所示.

n	1	2	3	…	k	…
a_n	2	4	6	…	$2k$	…

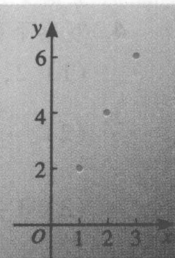


图 6-2

练习

1. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它们的前 5 项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$；　　(2) $a_n=10n$；

(3) $a_n=5\times(-1)^{n+1}$；　　(4) $a_n=1+(-1)^n$.

2. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并对每一数列各写出一个通项公式：

(1) 2，4，(　　)，8，10，(　　)，14，…；a_n = ________；

(2) (　　)，4，9，16，25，(　　)，49，…；a_n = ________；

(3) 1，$\sqrt[3]{2}$，(　　)，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[3]{6}$，$\sqrt[3]{7}$，…；a_n = ________.

3. 根据数列的通项公式填表：

n	1	2	…	6	…		…	n
a_n			…		…	29	…	$3n-1$

习题 一

1. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，分别写出其前5项和第20项：

(1) $a_n=n^3(-1)^{n-1}$；　　(2) $a_n=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$；

(3) $a_n=n^{\frac{1}{n}}$；　　(4) $a_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

2. 写出下面各数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) $\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{6}{3}$，$\dfrac{9}{4}$，$\dfrac{12}{5}$；　　(2) $-\dfrac{1}{2\times1}$，$\dfrac{1}{2\times2}$，$-\dfrac{1}{2\times3}$，$\dfrac{1}{2\times4}$；

(3) $\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$-\sqrt{5}$；　　(4) 0，2，4，6.

3. 已知无穷数列1×2，2×3，3×4，…，$n(n+1)$，…

(1) 求这个数列的第10项，第31项，第48项；

(2) 420是这个数列的第几项？

4. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式：

(1) 2，4，(　)，16，32，(　)，128，…；a_n = ________；

(2) -1，$\dfrac{1}{2}$，(　)，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{6}$，(　)，…；a_n = ________；

(3) $1-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$，(　)，$\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$，(　)，…；$a_n$ = ________；

(4) 1，$\sqrt{2}$，(　)，2，$\sqrt{5}$，(　)，$\sqrt{7}$，…；a_n = ________.

阅读空间

斐波那契数列

“斐波那契数列”的发明者，是意大利数学家列昂纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci，约1170—约1250）．他生于比萨，被人称做“比萨的列昂纳多”．早年斐波那契随父亲到相当于今日的阿尔及利亚地区经商，在一个阿拉伯老师的指导下研究数学，掌握了印度数码这一新的计数体系，后来他还在埃及、叙利亚、希腊、西西里和法国等地研究数学．1202年，他撰写了《算盘书》一书，对印度——阿拉伯数码和阿拉伯数学在欧洲的流传起到了重要的作用．

◎斐波那契

《算盘书》在1228年的修订本中增加了脍炙人口的“兔子问题”，即一般而言，兔子在出生两个月后，就有繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子．如果所有的兔子都不死，那么一年以后可以繁殖多少对兔子？这个问题导致了著名的“斐波那契数列”的诞生．

我们不妨拿新出生的一对小兔子分析一下：

第一个月小兔子没有繁殖能力，所以还是一对；

两个月后，生下一对小兔，总数共有两对；

三个月以后，老兔子又生下一对小兔，因为小兔子还没有繁殖能力，所以一共是三对；

……

以此类推可以列出下表：

经过月数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔子对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

表中数字1，1，2，3，5，8，…构成了一个数列，即斐波那契数列．这个数列有个十分明显的特点，那就是：前面相邻两项之和，构成了后一项．这个数列又因为以兔子繁殖为例而引入，故又称为“兔子数列”．

斐波那契数列有很多奇妙的属性，比如：随着数列项数的增加，前一项与后一项之比越来越逼近黄金分割数0.6180339887……；从第二项开始，每个奇数项的平方都比前后两项之积多1，每个偶数项的平方都比前后两项之积少1.

斐波那契数列在自然界中也有很多实例，比如：

（1）树木的生长，由于新生的枝条，往往需要一段“休息”时间，供自

身生长，而后才能萌发新枝．所以，一株树苗在一段间隔，例如一年，以后长出一条新枝；第二年新枝“休息”，老枝依旧萌发；此后，老枝与“休息”过一年的枝同时萌发，当年生的新枝则次年“休息”．这样，一株树木各个年份的枝丫数，便构成斐波那契数列．这个规律，就是生物学上著名的“鲁德维格定律”．

（2）如果你对植物稍稍注意，就会发现大多数花朵的花瓣数目是3，5，8，13，21，…例如，百合花是三瓣，梅花是五瓣，飞燕草是八瓣，孤挺花是十三瓣，向日葵不是21瓣，就是34瓣，雏菊都是34，55，或89瓣，其他数目则很少出现．如果以后看到某种花，不妨你也数数看．

6.2 等差数列

引例

（1）用棋子摆成“T”字，如图6－3所示，

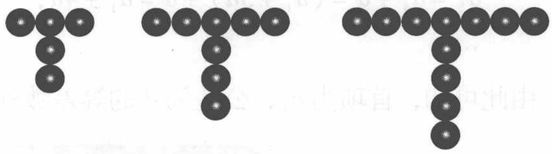


图6－3

把这3个“T”字所用棋子的个数列出来，便得到了数列：

5，8，11. ①

（2）在2008年北京奥运会上，女子举重项目共设置了7个级别，其中较轻的4个级别的体重（单位：kg）组成数列：

48，53，58，63. ②

1. 等差数列的定义与通项公式

从引例中我们可以看出：从第2项起数列①中的每一项都比它的前一项多3；数列②中的每一项都比它的前一项多5.

因此，上述数列都具有这样共同的特征：从第2项起，每一项与它前一项的差都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

从第2项起，每一项与它前一项的差都等于同一个常数 d，即

$$a_{n+1}-a_n=d\ (n\in \mathbf{N}_+)$$

那么，这个数列叫做**等差数列**，常数 d 叫做等差数列的**公差**.

引例中的两个数列都是等差数列，它们的公差分别是3和5.

想一想

如果等差数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n 的公差是 d，那么等差数列 a_n，a_{n-1}，…，a_2，a_1 的公差是多少？

如果一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

是等差数列，它的公差是 d，那么

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d,$$

$$\cdots.$$

由此可知，首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以表示为

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$$

试一试

如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是5，公差是 -1，那么它的通项公式是什么？

等差数列的通项公式给出了等差数列中 a_1，a_n，d 和 n 之间的关系．如果知道其中的三个量，就可以求出另一个量．

例1 指出下列数列中的等差数列，并求出公差和通项公式：

（1）-2，2，6，10，14，…；（2）1，4，16，64，256，…；

（3）2，2，2，2，2，…；（4）1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，….

分析： 以上数列如果是等差数列就必须满足等差数列的定义，即从第2项起，每一项与它前一项的差都等于同一个常数，经验算知，数列（1），（3）是等差数列．

解： 由等差数列的定义可以判定（1），（3）是等差数列．

数列（1）中的公差 $d=4$，通项公式是 $a_n=-2+(n-1)\times4$，即 $a_n=4n-6$；

数列（3）中的公差 $d=0$，通项公式是 $a_n=2$.

例2 求等差数列8，5，2，…的第15项．

分析： 因为等差数列的 a_1，a_2，a_3 是已知的，所以可以通过 a_2-a_1 或 a_3-a_2 求出公差 d，有了 a_1 和 d，利用通项公式就可以求出这个数列的第15项．

解： $\because a_1=8$，$d=5-8=-3$，$n=15$，

$\therefore a_{15}=8+(15-1)\times(-3)=-34.$

例3 等差数列 -5，-9，-13，…中的第几项是 -401？

分析： 通过 a_2-a_1 或 a_3-a_2 求出公差 d，问题转化为已知 a_1，d，a_n，求 n.

解： $\because a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，$a_n=-401$.

$\therefore -401=-5+(n-1)\times(-4)$，

解得　$n=100$.

即这个数列的第 100 项是 -401.

例4 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_5=10$，$a_{12}=31$，求首项 a_1 和公差 d，并求出该数列的第 21 项 .

分析： 要求首项 a_1 和公差 d，可以采用列方程组的方法求出，进而再根据通项公式求出该数列的第 21 项 .

解： 根据题意，得

$$\begin{cases} a_1+4d=10, \\ a_1+11d=31. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a_1=-2, \\ d=3. \end{cases}$$

$\therefore$ 这个等差数列的通项公式为 $a_n=-2+(n-1)\times 3$.

因此 $a_{21}=-2+(21-1)\times 3=58$.

即这个数列的首项 $a_1=-2$，公差 $d=3$，该数列的第 21 项是 58.

议一议 根据 $a_5=10$ 和 $a_{12}=31$，能否直接求出公差 d？由此怎样求出首项 a_1？

例5 在 -3 与 7 之间插入一个数 A，使 -3，A，7 成等差数列 .

分析： 根据等差数列的定义，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，列出方程即可求得 A.

解： $\because -3$，A，7 成等差数列，

$\therefore A-(-3)=7-A$，

$2A=4$，

解得　$A=2$.

一般地，如果在 a 与 b 之间插入一个数 A，使 a，A，b 成等差数列，