高等数学及其应用

GAODENG SHUXUE JIQI YINGYONG

主编　马晓峰　秦克林　肇　慧

東北林業大學出版社

高等数学及其应用

主　编　马晓峰　秦克林　肇　慧

東北林業大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及其应用/马晓峰，秦克林，肇慧主编. —哈尔滨：东北林业大学出版社，2009.7

ISBN 978－7－81131－542－4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①马…②秦…③肇…　Ⅲ. 高等数学　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第134436号

责任编辑：李学忠
封面设计：彭　宇

NEFUP

高等数学及其应用

Gaodeng Shuxue Jiqi Yingyong

主　编　马晓峰　秦克林　肇　慧

東北林業大學出版社出版发行

（哈尔滨市和兴路26号）

哈尔滨市工大节能印刷厂印装

开本 787 × 1092　1/16　印张 11.375　字数 272 千字

2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—1 000 册

ISBN 978-7-81131-542-4

定价：18.00 元

编　委

主　编　马晓峰　秦克林　肇　慧

副主编　闫　玲　崔胜鹏　王金娥　王冠宇

前　　言

一直以来，传统的"高等数学"教学重视演绎及推理，重视定理的严格论证，这对培养学生的数学素养确有好处，但从应用的角度讲，需要的往往不是论证的过程，而是它的结论。在本教材的编写过程中，重点体现以下指导思想：突出"以应用为目的"的教育特色；遵循"突出思想分析，立足能力培养，强化动手技能，解决实际问题"的原则；在保证科学性的基础上，力求讲清概念；注重学生基本运算能力、分析问题能力、解决问题能力以及理论联系实际能力的培养；强调数学学科与相关学科之间的横向联系，力求做到立足实践与应用，拓宽基础知识面。

参加本书编写的人员有：黑龙江工程学院马晓峰（第一章、第五章、第六章、第七章），秦克林（第八章、第九章），肇慧（第十章、第十一章），黑龙江幼儿师范高等专科学校闫玲（第二章），崔胜鹏（第三章），王金娥（第四章），王冠宇（第十二章）。本书由马晓峰、秦克林、肇慧任主编，闫玲、崔胜鹏、王金娥、王冠宇任副主编。在此，谨向在本书编写过程中，进行指导、参加审稿、提供帮助和支持的所有同志及单位致以衷心的感谢！

由于编者的水平有限，编写时间仓促，书中不足之处肯定不少，错误之处也在所难免，恳请希望得到专家、同行和读者批评指正，以待本书在教学实践中不断完善并再版时修正。

编　者
2009 年 6 月

目　　录

第一章　函数 …………………………………………………………（1）
　第一节　函数的概念 …………………………………………………（1）
　第二节　函数的性质 …………………………………………………（4）
　第三节　反函数与基本初等函数 ……………………………………（7）
　第四节　初等函数 ……………………………………………………（11）
　复习题 …………………………………………………………………（12）
第二章　极限及连续 …………………………………………………（14）
　第一节　函数的极限 …………………………………………………（14）
　第二节　极限的运算法则 ……………………………………………（20）
　第三节　重要极限 ……………………………………………………（22）
　第四节　函数的连续性 ………………………………………………（24）
　复习题 …………………………………………………………………（28）
第三章　导数与微分 …………………………………………………（30）
　第一节　导数的概念 …………………………………………………（30）
　第二节　导数的基本公式与运算法则 ………………………………（34）
　第三节　反函数与复合函数的导数 …………………………………（38）
　第四节　隐函数的导数与高阶导数 …………………………………（42）
　第五节　函数的微分 …………………………………………………（44）
　复习题 …………………………………………………………………（47）
第四章　导数的应用 …………………………………………………（49）
　第一节　中值定理 ……………………………………………………（49）
　第二节　罗必塔法则 …………………………………………………（51）
　第三节　函数的增减性与极值 ………………………………………（53）
　第四节　函数的最大值与最小值 ……………………………………（57）
　第五节　利用导数研究函数 …………………………………………（58）
　复习题 …………………………………………………………………（61）
第五章　不定积分 ……………………………………………………（64）
　第一节　不定积分的概念 ……………………………………………（64）
　第二节　基本积分公式 ………………………………………………（66）
　第三节　换元积分法 …………………………………………………（67）
　第四节　分部积分法 …………………………………………………（70）
　复习题 …………………………………………………………………（72）
第六章　定积分 ………………………………………………………（73）
　第一节　定积分的概念 ………………………………………………（73）

第二节　定积分的基本性质 …………………………………………… (75)
第三节　微积分基本定理 …………………………………………… (78)
第四节　定积分的运算 …………………………………………… (80)
复习题 …………………………………………………………… (83)
第七章　定积分的应用 …………………………………………… (84)
第一节　定积分的几何应用 …………………………………………… (84)
第二节　定积分在物理中的应用 …………………………………………… (91)
第三节　定积分在经济分析中的应用 …………………………………………… (99)
复习题 …………………………………………………………… (101)
第八章　微分方程初步 …………………………………………… (103)
第一节　微分方程的概念 …………………………………………… (103)
第二节　一阶微分方程 …………………………………………… (104)
复习题 …………………………………………………………… (114)
第九章　向量代数与空间解析几何 …………………………………………… (116)
第一节　向量及其线性运算 …………………………………………… (116)
第二节　向量的乘法运算 …………………………………………… (123)
第三节　平面与直线 …………………………………………… (127)
第四节　曲面与曲线 …………………………………………… (131)
复习题 …………………………………………………………… (132)
第十章　多元函数微分学 …………………………………………… (133)
第一节　二元函数的极限与连续 …………………………………………… (133)
第二节　偏导数与全微分 …………………………………………… (135)
第三节　复合函数与隐函数的微分法 …………………………………………… (138)
第四节　二元函数的极值 …………………………………………… (140)
复习题 …………………………………………………………… (142)
第十一章　多元函数积分学 …………………………………………… (144)
第一节　二重积分 …………………………………………… (144)
第二节　二重积分的计算法 …………………………………………… (147)
第三节　二重积分应用举例 …………………………………………… (153)
第四节　平面曲线积分 …………………………………………… (155)
复习题 …………………………………………………………… (157)
第十二章　无穷级数 …………………………………………… (158)
第一节　常数项级数的概念与基本性质 …………………………………………… (158)
第二节　正项级数及其敛散性 …………………………………………… (161)
第三节　绝对收敛与条件收敛 …………………………………………… (163)
第四节　幂级数 …………………………………………… (164)
第五节　函数展开成幂级数 …………………………………………… (168)
复习题 …………………………………………………………… (171)
参考文献 …………………………………………………………… (174)

第一章 函 数

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学。所谓函数就是变量之间的对应关系。虽然我们在中学已经学习过函数概念，由于它的重要性，我们将对函数进行较系统地复习和提高，为以后各章的学习做准备。

第一节 函数的概念

一、函数的定义

1. 常数和变量

在研究某问题的过程中，始终保持同一数值的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量。例如，某商品的单价是 0.5 元，则该商品的销售量 x 和销售总收入 y(单位:元)之间的关系应是 $y=0.5x$，其中 0.5 是常量，x 和 y 是变量。

一个量是常量还是变量 x、y，是相对某一过程来说的，当研究问题的过程发生变化时，同一个量在某种情况下是常量(或变量)，而在另一种情况下就可能是变量(或常量)。

2. 函数

定义 1.1 在某变化过程中，设有两个变量 x、y，若变量 x 在某一集合 D 内变化，且每取某个确定的值时，变量 y 按照一定的规范 f，总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x)\ (x\in D)$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量。

集合 D 称为函数的定义域，也可记作 $D(f)$，对于 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值。

全体函数值的集合 $\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 $Z(f)$。

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应规则，对应规则也常用 Φ,H,G,F 等表示，那么函数值就记作 $\Phi(x),H(x),G(x),F(x)$ 等，有时为简化符号，函数关系也可记作 $y=y(x)$。此时等号左边的 y 表示函数值，右边的 y 表示对应规则。

从函数的定义看到，一个函数有两个要素，即对应规则和定义域，如果两个函数的对应规则和定义域都相同，那么它们就是同一函数，例如 $y=x^2\ (x\in R)$ 和 $y=x^2\ (x>0)$，因定义域不同，所以不是同一函数。

二、函数定义域的确定和求函数值

1. 函数定义域的确定

函数的定义域一般由以下两个原则确定:

(1)自变量与因变量的值要具有实际意义，总收益和销售量的函数关系 $y=0.5x$，且共有商品 100kg，其定义域是[0,100]。

(2)对于用解析式表示的函数，自变量的取值要使其解析式有意义。

注意以下三种常见情况：①偶次方根的根号下不能出现负值；②负数及零没有对数；③分母不能为零。

例 1 求函数 $y=\frac{2}{(x-1)(x-2)}$ 的定义域。

解 要使函数有意义，必须满足条件 $(x-1)(x-2)\neq 0$，即 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$，因此函数的定义域是除 $x=1$ 和 $x=2$ 的所有实数，即

$$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$$

例 2 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域。

解 要使函数有意义，必须满足条件 $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，于是此函数的定义域是 $[-1,1]$。

例 3 求函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(3x-2)$ 的定义域。

解 由 $\sqrt{5-x}$ 成立，应有 $5-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 5$，所以 $\sqrt{5-x}$ 的定义域是 $(-\infty,5]$；由 $\lg(3x-2)$ 成立，应有 $3x-2>0$，即 $x>\frac{2}{3}$，所以 $\lg(3x-2)$ 的定义域是 $(\frac{2}{3},+\infty)$，很明显 $\sqrt{5-x}$ 和 $\lg(3x-2)$ 的定义域有公共部分，即 $(-\infty,5]\cap(\frac{2}{3},+\infty)=(\frac{2}{3},5]$ 是函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(3x-2)$ 的定义域。

2. 求函数值

当自变量取定 $x_0\in D$ 时，函数的对应值记为

$$f(x_0)\text{ 或 } y|_{x=x_0}$$

如果函数是用解析式表示的，求 $x=x_0$ 的函数值 $f(x_0)$ 时，只要将式子中的 x 换成 x_0 即可。

例 4 若 $f(x)=2x^2-3$，求 $f(0)$，$f(-2)$，$f(x_0)$，$f(\frac{1}{a})$，$f(x_0+h)$。

解

$$f(0)=2\times 0^2-3=-3$$

$$f(-2)=2\times(-2)^2-3=5$$

$$f(x_0)=2\times x_0^2-3=2x_0^2-3$$

$$f(\frac{1}{a})=2\times(\frac{1}{a})^2-3=\frac{2}{a^2}-3$$

$$f(x_0+h)=2\times(x_0+h)^2-3=2x_0^2+4x_0h+2h^2-3$$

三、分段函数

在实际问题中，有些函数，对于其定义域内自变量 x 取不同的值时，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这个函数称为分段函数。

例如

$$y=|x|=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x+1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x-1 & (x>0)\end{cases}$$

都是定义在$(-\infty,+\infty)$的分段函数,其图形分别如1－1和图1－2所示。

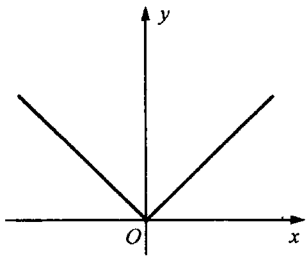

图1－1

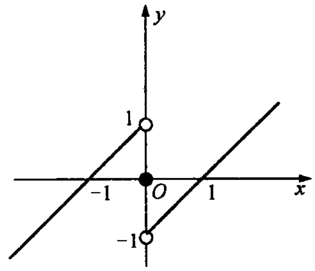

图1－2

注意:分段函数是几个表达式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数。分段函数的定义域是各分段所对应定义域的并集。

例1 $y=\begin{cases}2\sqrt{x} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ 1+x & (1<x)\end{cases}$

是确定在区间$[0,+\infty)$上的一个函数,当自变量x取闭区间$[0,1]$上的数值时,对应的函数值y由表达式$y=2\sqrt{x}$的确定;当x取区间$(1,+\infty)$内的数值时,y由表达式$y=1+x$确定,它的定义域$[0,+\infty)=[0,1]\cup(1,+\infty)$。它的图形如图1－3所示。

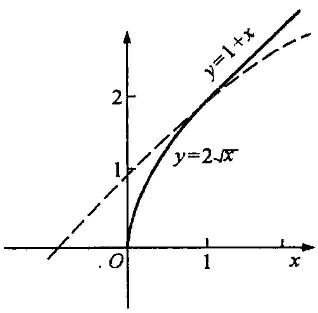

图1－3

例2 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过50kg时,按基本运费计算,如从上海到某地每千克收0.15元,当超过50kg时,超重部分按每千克0.25元收费,试求运费y(元)与质量x(kg)之间的函数关系式,并作出函数图形。

解 由题意知

当$0<x<50$时,$y=0.15x$。当$x=50$时,$y=0.15\times 50=7.5$。

当$x>50$时,$y=0.15\times 50+0.25(x-50)$,即$y$与$x$的函数关系为

$$y=\begin{cases}0.15x & (0<x\leqslant 50)\\ 0.15\times 50+0.25(x-50) & (x>50)\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}0.15x & 0<x\leqslant 50\\ 0.25x-5 & x>50\end{cases}$$

这是一个分段函数,见图1－4。

例 3 设 $y=\begin{cases}x^2 & (-1\leqslant x\leqslant 1)\\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3} & (x>1)\end{cases}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-1)$，$f(6)$，并作图。

解 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$f(-1)=(-1)^2=1$

$f(6)=\dfrac{2}{3}\times 6+\dfrac{1}{3}=4\dfrac{1}{3}$

本题函数图形如图 1－5 所示。

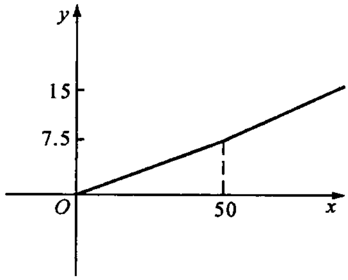

图 1－4

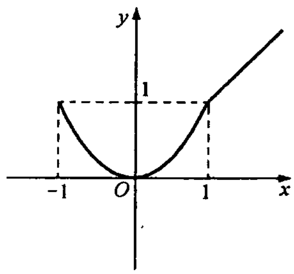

图 1－5

四、隐函数

用解析式表示函数关系，可以有不同的形式，若函数写成自变量 x 的明显表达式：$y=f(x)$，则称为显函数，例如 $y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=3x-5$ 就是显函数。

若自变量 x 与 y 之间的函数关系由一个方程 $F(x,y)=0$ 给出，则这样表示的函数称为隐函数。

例如由方程 $2x-3y+1=0$ 和 $e^x+xy-e^y=0$ 所确定的 y 是 x 的函数就是隐函数。

有些方程所确定的隐函数很容易表示成显函数的形式，例如由方程 $2x-3y+1=0$ 解出 y，得显函数 $y=\dfrac{1}{3}(2x+1)$。把一个隐函数化成显函数，称为隐函数的显化。

但是，隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的，例如方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 和 $e^x+xy-e^y=0$，对于 x 的任一个确定值，根据代数学的基本定理，y 至少有一个实根，所以该方程确定了 x 的一个隐函数 y，但我们无法把 y 表示成 x 的算式。

第二节　函数的性质

一、函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是对称区间 D（如果 $x\in D$，则 $-x\in D$），如果满足

$$f(-x)=f(x)\ (x\in D)$$

则称 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的偶函数；如果满足

$$f(-x) = -f(x) \qquad (x \in D)$$

则称 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的奇函数。

例如,我们熟悉的 $y=x^2$, $y=\cos x$ 等是偶函数; $y=x$, $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ 等是奇函数。

我们都会作 $y=x^2$ 的图形,它是一条对称于 Oy 轴,开口向上的抛物线;我们也都知道 $y=x^3$ 的图形是关于坐标原点对称的曲线,它们是偶函数和奇函数的典型。

一般地,偶函数的图形关于 Oy 轴对称;奇函数的图形关于坐标原点对称。

例1 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})\ (a>0, a\neq 1)$;

(2) $g(x)=\frac{1}{x^2+1}+x$;

(3) $\varphi(x)=\sin(x^2+1)$。

解 由定义:

(1) $f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\frac{1}{2}(a^{x}-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})=-f(x)$。

故 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})$ 是奇函数。

(2) $g(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}+(-x)$

$\qquad \frac{1}{x^2+1}-x\neq g(x)$。

又可验证 $g(-x)\neq -g(x)$。

故 $g(x)=\frac{1}{x^2+1}+x$ 既非偶函数,也非奇函数。

(3) $\varphi(-x)=\sin[(-x)^2+1]=\sin(x^2+1)=\varphi(x)$

故 $\varphi(x)=\sin(x^2+1)$ 是偶函数。

二、函数的单调性

定义1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上定义, x_1, x_2 是 D 内任意两点,如果 $x_1<x_2$ 就有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称 $y=f(x)$ 在 D 上是单调增加的;如果 $x_1<x_2$,就有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称 $y=f(x)$ 在 D 上是单调减少的。

单调增加或单调减少的函数,统称为单调函数,使函数保持单调的自变量的区间叫单调区间,如果一个函数 $y=f(x)$ 满足 $x_1<x_2$,有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \text{ 或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

那么, $y=f(x)$ 就是不减(或不增)的函数

例2 验证函数

$$y = 2x - 5$$

在$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的函数。

证 在$(-\infty, +\infty)$内任取x_1, x_2，满足$x_1 < x_2$，那么

$$f(x_1) = 2x_1 - 5$$
$$f(x_2) = 2x_2 - 5$$

于是，$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 5) - (2x_2 - 5) = 2(x_1 - x_2)$。

$\because\ x_1 < x_2, \therefore\ x_1 - x_2 < 0$

$\therefore\ f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2) < 0$

$\therefore\ f(x_1) < f(x_2)$

根据定义1.3知$y = 2x - 5$在定义域$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的函数。

又如$y = x^2$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，而$(-\infty, +0)$是$y = x^2$的单调减少区间，$(0, +\infty)$是$y = x^2$的单调增加区间。

三、函数的周期性

设函数$f(x)$，对正实数a，若有

$$f(x + a) = f(x)$$

称$f(x)$是一个周期函数，a是它的周期。

若a是周期函数$f(x)$的周期，则对任意整数n，na一定也是$f(x)$的周期，通常所说的周期是na中的最小正数，记作T，如$f(x) = \sin x$，显然有

$$\begin{aligned}(x + 2n\pi) &= \sin(x + 2n\pi) \\ &= \sin x = f(x)\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\end{aligned}$$

即$2n\pi$都是$f(x) = \sin x$的周期。但是，$2n\pi$中的最小正数是2π，所以取2π为$\sin x$的周期，即$T = 2\pi$。

大家熟悉的$\cos x$也是以2π为周期的周期函数，$\tan x$，$\cot x$是以π为周期的周期函数。

像某地的气温、降雨量也年复一年地重复出现，又如不少描述经济活动的函数，其值也是呈周期性变化，不过，这样周期变化不是那么严格重复，可以把它们近似为周期现象处理。

四、函数有界性

定义1.4 设函数$y = f(x)$在区间D上定义。如果存在一个正数M，使得对任意$x \in D$，都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称$y = f(x)$在D上有界。

如$y = \sin x$在$(-\infty, +\infty)$内是有界的，因为只要取$M \geqslant 1$，总有

$$|\sin x| \leqslant M$$

函数$y = \dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，因为无论多么大的正数M，只要当$0 < x < \dfrac{1}{M}$时，总有

$$y = \frac{1}{x} > M$$

但是，$y=\frac{1}{x}$在[0.1,1]内有界，或者对任意 $a>0$，函数 $y=\frac{1}{x}$在$[a,+\infty]$内有界；在任何有限区间有界，在整个数轴上无界。

第三节 反函数与基本初等函数

一、反函数

函数 $y=f(x)$ 表述变量 x 与 y 间的依赖关系，这里 x 是自变量，y 是因变量，其实，在很多情况下哪个变量作自变量也不是绝对的。例如，某种商品的价格是 P，当销售量为 q 时的销售收入为 R，有

$$R=Pq$$

这时，称销售收入 R 是销售量 q 的函数，q 是自变量，反之，可写成

$$q=\frac{R}{P}$$

销售量随销售收入而定，q 是 R 的函数，我们把 $q=\frac{R}{P}$叫做 $R=Pq$ 的反函数。

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 Y。如果对于 Y 内的每一个 y，都存在惟一的一个 x 值，使得

$$y=f(x)$$

成立，则 x 也是 y 的函数，记作

$$x=\varphi(y)$$

那么，$x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，也常记作

$$x=f^{-1}(y)$$

事实上，$x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数。

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是有

$$y=f^{-1}(x) \tag{1.1}$$

(1.1)式是 $y=f(x)$ 的反函数，$y=f(x)$ 就叫做原来函数。

由定义 1.5 可知，单调的函数才有反函数。

可以证明，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

例 求函数 $y=3x+2$ 的反函数。

解 因为 $y=3x+2$，从中解出 x，得 $x=\frac{y-2}{3}$，改变变量符号，$y=\frac{x-2}{3}$为所求的反函数，$y=\frac{x-2}{3}$与 $y=3x+2$ 互为反函数。

二、基本初等函数

下列函数称为基本初等函数：

(1) 常量：$y=c$；

(2) 幂函数：$y=x^a$（a 为任何实数）；

(3)指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq 1)$；

(4)对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$；

(5)三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

(6)反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$。

这些函数，中学数学中都已学过，现仅扼要地复习一下。

1. 常量：$y=c$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，图形为平行于 x 轴截距为 c 的直线，如图 1－6。

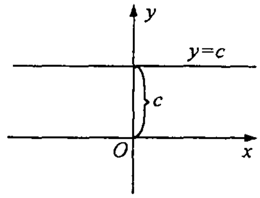

图 1－6

2. 幂函数 $y=x^a$（a 为实数）

它的定义域随 a 而异，但不论 a 为何值，x^a 在$(0,+\infty)$内总有定义，而且图形都经过(1,1)点。

如 $y=x^2, y=x^{\frac{2}{3}}$等，定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形对称于 y 轴，如图 1－7。

$y=x^3, y=x^{\frac{1}{3}}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形对称于原点，如图 1－8。

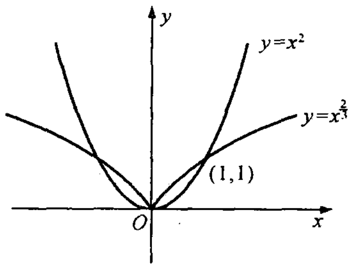

图 1－7

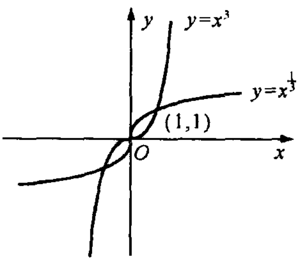

图 1－8

$y=x^{-1}$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，图形对称于原点，如图 1－9。

$y=x^{\frac{1}{2}}$，定义域为$[0,+\infty)$，如图 1－10。

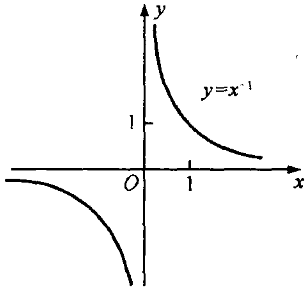

图 1－9

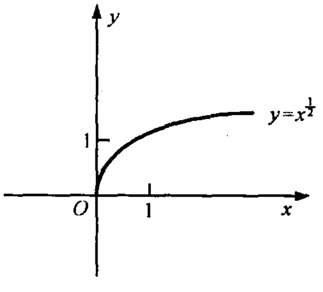

图 1－10

3. 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，都通过(0,1)点，当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，如图 1－11。

4. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

定义域为$(0,+\infty)$，都通过$(1,0)$点，当$a>1$时，函数单调增加，当$0<a<1$时，函数单调减少，对数函数与指数函数互为反函数，如图1-12。

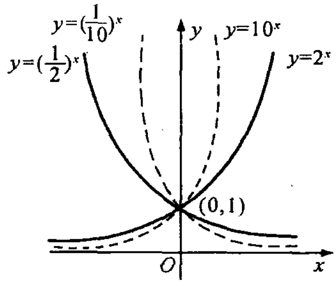

图1-11

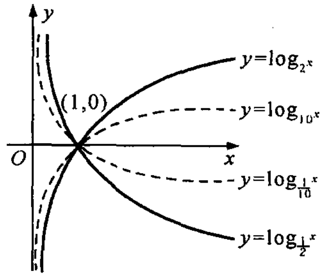

图1-12

以无理数 e=2.718 281 8…为底的对数函数

$$y=\log_e x$$

叫做自然对数函数，简记作$y=\ln x$，是微积分中常用的函数。

5. 三角函数

三角函数有$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$。

在微积分中，三角函数的自变量x采用弧度制，而不用角度制，例如我们用$\sin\frac{\pi}{6}$而不用$\sin 30°$；用$\cos\frac{\pi}{2}$而不用$\cos 90°$；$\sin 1$则表示1弧度角的正弦值。

角度与弧度之间可利用公式π弧度$=180°$来换算。

函数$y=\sin x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，奇函数，以2π为周期，有界，如图1-13。

函数$y=\cos x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，偶函数，以2π为周期，有界，如图1-14。

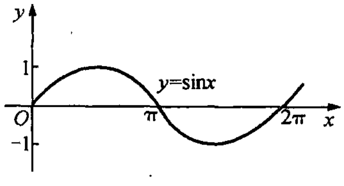

图1-13

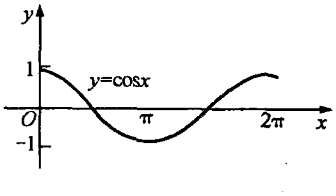

图1-14

函数$y=\tan x$的定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2.\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，奇函数，以$\pi$为周期，在每一个周期内单调增加，以直线$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为渐近线，如图1-15。

函数$y=\cot x$的定义域为$x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2.\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，奇函数，以$\pi$为周期，在每一个周期内单调减少，以直线$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为渐近线，如图1-16。

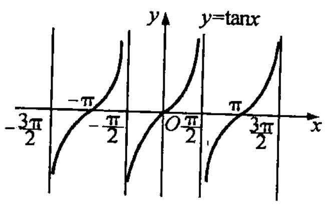

图 1－15

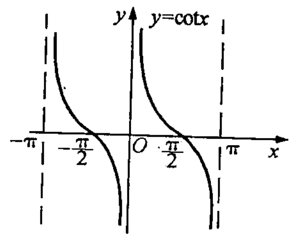

图 1－16

关于函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 我们不作详细讨论，只需知道它们分别为 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$。

6. 反三角函数

反三角函数有 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=arccot x$。

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的反函数分别记作 $y=Arcsin x$，$y=Arccos x$，$y=Arctan x$，$y=Arccot x$，它们的图形分别与其相应的三角函数的图形对称于直线 $y=x$，它们都是多值函数，我们按下列区间取其一段，称为主值分支，分别记作

$$y=\arcsin x, y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$y=\arccos x, y\in[0,\pi]$$

$$y=\arctan x, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=arccot x, y\in(0,\pi)$$

它们的图形分别如图 1－17，图 1－18，图 1－19，图 1－20。

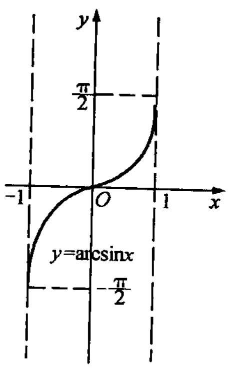

图 1－17

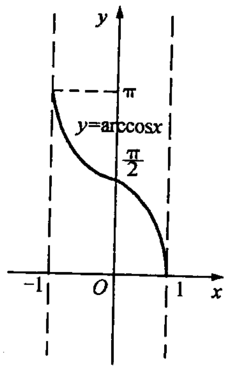

图 1－18