新世纪高等学校教材

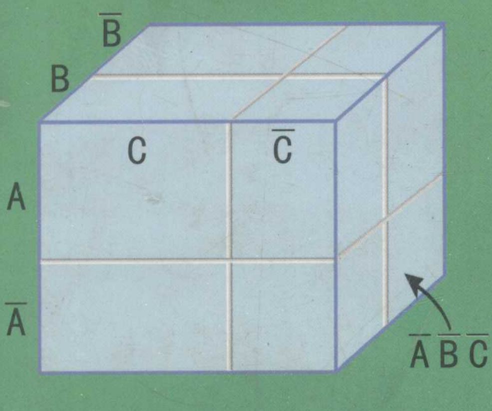
新编概率统计

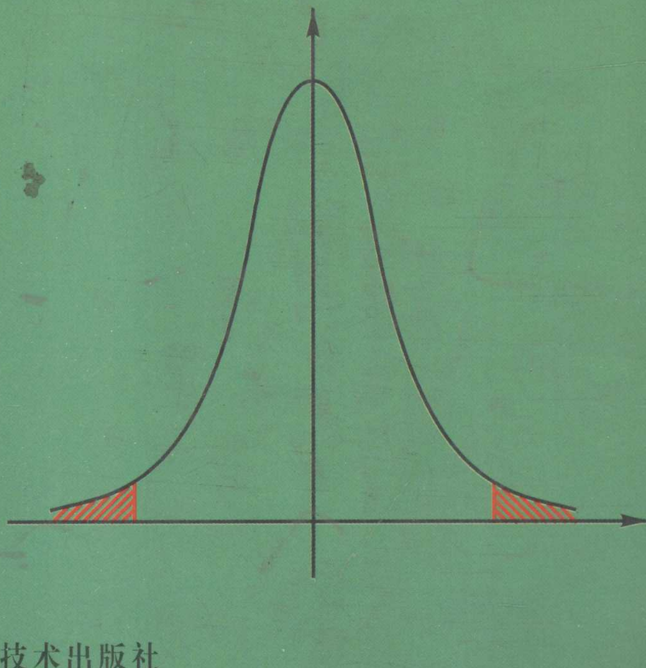
XINBIAN GAILU TONGJI

安希忠 陈荣江 主编

$$P(乙|甲)=\frac{\mathrm{card}(甲乙)}{\mathrm{card}(甲)}=\frac{\mathrm{card}(甲乙)/\mathrm{card}(\Omega)}{\mathrm{card}(甲)/\mathrm{card}(\Omega)}$$

$$=\frac{P(甲乙)}{P(甲)}$$





吉林科学技术出版社

新世纪高等学校教材

新编概率统计

New Probability and Statistics

安希忠 陈荣江　主编

王东升 王增辉　副主编

吉林科学技术出版社

内容简介

本书是高等学校概率论（和概率统计）课程的新编教材，内容丰富，覆盖面广，适合工科、生命科学类、社会科学类各专业选作教材或教学参考书、考研参考书。本书内容主要包括概率论基础，条件概率，一维随机变量，多维随机变量，大数定律和中心极限定理，参数估计，假设检验，方差分析，回归分析等。习题类型广泛，题量充足，书末附有答案或提示，供学生对照。

新编概率统计
安希忠　陈荣江　主编
责任编辑：王维义
*
吉林科学技术出版社出版、发行
长春市新世纪印业有限公司印刷
*
787×1092 毫米　16 开本　17 印张　446 000 字
2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷
定价：25.80 元
ISBN　7-5384-1603- X/O·132

社址　长春市人民大街 4646 号　邮编　130021
发行部电话　0431-5677817　5635177
电子信箱　JLKJCBS@public.cc.jl.cn
传真　0431-5635185　5677817
网址　www.jkcbs.com　实名　吉林科技出版社

致 读 者 (代 序)

——从一个"概率故事"谈起

同学们翻开本书,就开始了这门"随机数学"课程的学习。其实大家在高中阶段已经学过了"有限、等可能"基本事件的概率问题。由于历史的原因,这一类概率问题的数学模型被称之为"古典概型"。

为了帮助大家把握概率论(或概率统计)课程的要点,让我们借用一个小故事。

故事的主人公有6人。其中的5个大学生在全校数学竞赛中获前5名,他们性格各异,关系微妙。学校决定把仅有的2张足球赛入场券奖给他们(这可是小贝、大罗等巨星光临本城的一场比赛),并委派数学教授——温老师组织指导大家抽签定归属。我们就来一面讲故事,一面解答温老师的问题。

首先,温老师按照年龄从大到小将5个人排成甲、乙、丙、丁、戊这一"自然顺序",并宣布按照自然顺序进行抽签。在抽签开始前,她提出了

问题1:每个人中签的概率是多大?先抽与后抽的中签概率是否相等?

这个问题的解答并不难。注意到5个签中有两个代表入场券,显然基本事件的总数是$n=A_5^5$. 用Ω表示由基本事件组成的全集,用"甲"表示"甲中签"这一事件,则

$$\text{card}(\Omega)=A_5^5=5!,\qquad \text{card}(甲)=C_2^1\cdot A_4^4,$$

故

$$P(甲)=\frac{\text{card}(甲)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{2!4!}{5!}=\frac{2}{5}.$$

同理

$$P(乙)=\frac{C_2^1\cdot A_4^4}{5!}=\frac{2}{5},\qquad P(丙)=P(丁)=P(戊)=\frac{2}{5}.$$

可见每个人中签的概率都是$\frac{2}{5}$,即中签的概率与抽签顺序无关。

如果有谁曾看到抽签中出现争先恐后或"争后恐先"的现象,就说明当事人不懂得上述概率原理。

好了,抽签已经开始了。当甲刚一抽完,老师就让后面的4人暂停,并提出了

问题 2:在后续的 4 人抽签中,每人的中签概率还是$\frac{2}{5}$吗? 先抽与后抽仍然公平吗?

对这个问题,只有区分为两种情形,才能解答清楚:

①设甲已抽中。此时所余的 4 个签中仅含 1 个入场券,故可求出 4 个人的中签概率都等于$\frac{C_1^1 A_3^3}{A_4^4}=\frac{1}{4}$. 这个概率是以甲抽中为前提算出的,约定记为

$$P(乙\mid甲)=P(丙\mid甲)=P(丁\mid甲)=P(戊\mid甲)=\frac{C_1^1 A_3^3}{A_4^4}=\frac{1}{4}. \tag{1}$$

其中概率 $P(乙|甲)$的全称是"以甲抽中为前提,乙抽中的条件概率",余类同。

于是可称开始算出的概率 $P(乙)$为无条件概率。但任何试验总是在一定条件下进行的,故称 $P(乙)$为原概率更妥。总之原概率 $P(乙)$与条件概率 $P(乙|甲)$不相等,因为它们是在不同条件下计算的概率,本来就不是同一个概率。

②设甲没抽中。此时所余的 4 个签中含 2 个入场券,故容易求出条件概率

$$\begin{aligned}P(乙\mid\overline{甲})&=P(丙\mid\overline{甲})=P(丁\mid\overline{甲})\\&=P(戊\mid\overline{甲})=\frac{C_2^1 A_3^3}{A_4^4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{2}$$

注意条件概率(1)小于$\frac{2}{5}$,条件概率(2)大于$\frac{2}{5}$,但无论在情形①还是在情形②,中签的概率都与抽签顺序无关。

抽签按原计划继续进行。而当乙刚刚抽完,温老师又叫了暂停,并提出了

问题 3:在后续的 3 人抽签中,每人的中签概率是多大? 中签概率仍与顺序无关吗?

读者会想到,应该分三种情形来解答:

①在甲、乙都未抽中的前提下,条件概率为

$$P(丙\mid\overline{甲}\overline{乙})=P(丁\mid\overline{甲}\overline{乙})=P(戊\mid\overline{甲}\overline{乙})=\frac{C_2^1 A_2^2}{A_3^3}=\frac{2}{3}; \tag{3}$$

②在甲、乙恰有一人抽中的前提下,条件概率为

$$P(丙\mid甲\overline{乙})=P(丁\mid甲\overline{乙})=P(戊\mid甲\overline{乙})=\frac{C_1^1 A_2^2}{A_3^3}=\frac{1}{3}, \tag{4}$$

$$P(丙 \mid \overline{甲}乙) = P(丁 \mid \overline{甲}乙) = P(戊 \mid \overline{甲}乙) = \frac{C_1^1 A_2^2}{A_3^3} = \frac{1}{3};$$

$$P(丙 \mid \overline{甲}乙) = P(丁 \mid \overline{甲}乙) = P(戊 \mid \overline{甲}乙) = \frac{C_1^1 A_2^2}{A_3^3} = \frac{1}{3} \quad (4')$$

③在甲、乙都抽中的前提下，条件概率为

$$P(丙 \mid 甲乙) = P(丁 \mid 甲乙) = P(戊 \mid 甲乙) = \frac{0}{A_3^3} = 0. \quad (5)$$

尽管上述三种情形下的条件概率互异，但在其中任何一种情形下，中签的概率都与顺序无关！类同的结论显然适用于甲、乙、丙三人抽完之后的 2 人抽签！

在解答了问题 3 之后，温老师并不急于恢复抽签，而是提出了

问题 4：如果让丙、丁、戊知道甲、乙的抽签结果，会不会改变后 3 人的中签概率呢？

老师提问的话音刚落，甲乙都宣称自己抽中。须知甲一惯诚实，不说假话；而乙说了谎，他另有隐衷：趁老师转身之机，乙把诡秘的眼神传给了丁（她跟乙很要好）。

于是老实厚道的丙顿时垂下了头（她认为自己无望了）。而丁有意背对着丙，默不作声，暗自庆幸自己还有希望（她已算出自己的中签概率是$\frac{1}{3}$）。

最放得开的是外号“小精灵”的戊，他属于考完一科从不跟别人对答案的那一伙。他有意躲开一些，根本没有听到甲乙说了什么，也不想听。他知道自己中签的概率是$\frac{2}{3}$，或$\frac{1}{3}$，或 0；同时确信，无论怎样后三人中签的概率都相等。“那就凭运气，等着瞧吧！”他默念道。

读者已看到，眼下丙是被误导者，丁知实情，戊不知情。三人心情当然不同，对自己“命运”的判断也不同，但这并不能改变三者的中签概率。

很显然，如果丙、丁、戊都知道甲、乙抽签的真实结果，仍不能改变他们的中签概率（即(4)式中的条件概率）。

现在如果有人说：“只要不让后抽人知道先抽人抽出的结果，那么各个抽签者中签的概率是相等的。”大家一定会觉得这段话不对劲儿。因为告知结果（无论是否含有虚假成份）只能影响后抽者的心情，影响他们对抽签结局的判断，而不能改变后抽者中签的条件概率。遗憾的是，刚才这段话，清清楚楚地印在高级中学数学教科书(2004.11)第二册(下)的 142 页。

不难看出，教科书编写者是在对条件概率的理解上出了问题，混淆了不同

的概念，甚至把当事人在知情与不知情时的不同判断也当成了不同的概率。[①]可见学好概率论的相关概念和原理并不是轻而易举的，它需要长期刻苦的学习过程。同学们今后要引以为戒哟！

当然我们的温老师心中有数，她没有轻信甲、乙的话而宣布抽签结束。而我们的故事也无须讲完它，因为后续的情节大家可以去猜(包括丙是否放弃了抽签等)。其实同学们可以分成小组，用抽签游戏反复演出这个故事，从中体验条件概率的产生背景和计算方法。为此作者给同学们布置了与我们的故事有关的8个习题，供大家讨论和求解：

1. 在甲、乙、丙抽完的前提下，如何计算丁、戊中签的条件概率？

2. 在甲、乙、丙、丁抽完的前提下，如何计算戊中签的条件概率？

3. 求概率$P(\text{甲乙})$，$P(\overline{\text{甲}}\text{乙})$；验证公式

$$P(\text{乙}) = P(\text{甲乙}) + P(\overline{\text{甲}}\text{乙}), \tag{6}$$

并给出该公式的理论证明。

4. 验证

$$P(\text{乙} \mid \text{甲}) = \frac{\text{card}(\text{甲乙})}{\text{card}(\text{甲})} = \frac{P(\text{甲乙})}{P(\text{甲})}, \tag{7}$$

并从中体会条件概率的含意。(提示：参照本书封面)

5. 从公式(7)可以引出概率的“乘法公式”：

$$P(\text{甲乙}) = P(\text{甲}) \cdot P(\text{乙} \mid \text{甲}), \tag{8}$$

请用该公式计算概率$P(\overline{\text{甲}}\text{乙})$.

6. 在甲抽中，乙未抽中的前提下，考虑丁、戊中签的条件概率(见(4)式)。如果丙决定放弃抽签(可能由于被误导，也可能出于谦让)，那么这两个条件概率是否改变？

7. 如果丙放弃抽签，请计算最后剩的签是入场券的概率。

8. (讨论题)如果丙放弃抽签，而且最后剩下的是入场券，应该怎样分配它呢？请运用概率原理，在下述五种方案中选出较为合理的一种：

①把入场券给丙；　②给戊；　③让乙、丙、丁、戊重新抽签；

④让丙、丁、戊重新抽签；　⑤让丙、戊重新抽签。

---

① 初学者尤其注意，不要把一次试验的具体结果跟概率混淆起来。如在我们的故事中，甲其实抽中了，但这与概率$P(\text{甲}) = \frac{2}{5}$并不矛盾。

上述题目可以集中作，也可以放到教学的进程中去作，因人而别。总之应反复探究，加深理解。

同学们，概率论课程已经开始了。关于概率论在当代社会的重要性请读§1.1.要学好第一章，需温习排列组合，进一步熟悉古典概率的计算。而第二章的重点内容就是条件概率，同时要明白事件的独立性，会用独立性解题。注意前两章的关键在条件概率，它既是重点，也是难点。学好条件概率，才能学好前两章，整个概率论课程才有希望，作者讲故事的目的也就达到了。

*　　　　*　　　　*

本书执笔者的分工如下：第一、二、三、四、五、六章——安希忠（吉林农业大学）；第七、、八、九章——陈荣江（河南科技学院）；第十、十一章——王东升（河南机电高等专科学校）；习题答案——王增辉（吉林农业大学）。

作者衷心感谢陈希孺院士和吉林大学周光亚教授给予的指导和鼓励。诚挚欢迎广大师生和各界读者提出建议和批评。

作者

2005年8月

目 录

第一章　概率论基础

§1.1　引言

什么是概率？什么是概率论？概率论有什么用途？前两个问题尚未形成标准的答案。让我们先谈第三个问题。

其实，谁都没有办法列举概率论的全部应用。这里只列举与我们相贴近或为我们所关注的若干领域和事项：预报地震；预报长江（或黄河，或松花江）的汛情；设计与建造航天飞机（或神舟飞船，或三峡大坝）；登山队在登顶珠峰前预测近两、三天的天气情况；勘探石油（或金矿）；在战争中破译敌方密码（或搜寻敌方潜艇）；保险公司测算某一大城市的火灾、交通事故（或估算某一特定人群的死亡率）；彩票主管部门研究奖项分级，确定奖金数额；银行或邮局测算顾客的排队规律以改善服务；在一条彩电生产线上实施质量控制；执法部门抽查市场上的奶制品（或烟酒）；一种新药（或新型手机）的市场开发；某地估算当年的作物收成；城市有关部门测算街路的汽车、行人流量以规划路段改造工程；购买数字型彩票，并估算获奖（大奖至末奖）的可能性大小；在以扑克或骰子为工具的娱乐活动中，估算自己“得点”的机会，等等。

那么，什么是概率呢？中国科学院院士陈希孺教授说：“概率，又称或然率，几率，是表示某种情况（事件）出现的可能性大小的一种数量性指标，它介于0与1之间。”

什么是概率论呢？复旦大学李贤平教授说：“概率论（*probability theory*）是研究随机现象的数量规律的数学分支。”加拿大比恩（*Bean*）教授说：“*Probability is the branch of science concerned with the study of mathematical techniques for making quantitative inferences about uncertainty.*”

在上面两人的陈述中，关键词之一分别是“随机现象”和“*uncertainty*”（非确定性或随机性）。两者的含义相当。

客观世界中大体存在着两类不同的现象，一类是确定性现象，另一类是随机现象。

举例来说。竖直上抛一重物，则该重物定会竖直下落。这就是一个确定性现象。再者，常压下，水到了100℃就会沸腾，这也是一个确定性现象。

反之，抛出的一枚硬币落到桌面上，它的向上的一面有两种情况：或者是正面（指标有年份的一面），或者是反面。这就是一个随机现象。另外，设想你购买了七位数字型彩票并期待着当晚的电视直播摇奖，那么摇奖机将在1千万（10^7）种结果中摇出其中的一种。这也是一种非确定性现象，或随机现象。

当然，在上面列举的应用概率论的十多个事项中，都存在着大量的随机现象。

对于随机现象进行一次或少数几次观察，其可能的结果出现哪一个是带有偶然性的，这是随机现象具有随机性（或偶然性）的一面。但在大量重复观察时，就会发现所出现的结果具有明显的规律性，我们称这种规律性为“统计规律性”。这是随机现象具有规律性（或必然性）的一面。概率论就是研究随机现象的统计规律性的一门学科。

概率：$0 \le P(A) \le 1$

现象 { 1. 确定性现象
2. 随机性现象：二重性：{ ①随机性：当试验次数少
②确定性：当试验次数很多

习题 1-1

1. 举出日常生活中的几个确定性现象。

2. 举出力学、电学、光学中的几个确定性现象。

3. 举出天体运行中的几个确定性现象。

4. 举出娱乐活动中的几个随机现象。

5. 举出几个非确定性的社会现象和自然现象。

6. 有人说："掷一枚硬币，正面向上的可能性是$\frac{1}{2}$；掷一颗骰子，幺点（指点数"1"）向上的可能性是$\frac{1}{6}$；买一注七位数字型彩票，获大奖的可能性是$\frac{1}{10000000}$."你怎样理解这三个大小各异的可能性呢？

7. 你是否经历过抽签（俗称"抓阄"）活动，或玩过抽签游戏？假如10个同学获得1张"皇马"与国内某球队赛球的入场卷，并通过抽签定夺，你认为先抽好，还是后抽好？

8. 如果一个气象专家告诉你，今天下雨的可能性是20%，那么你出门是否会带雨具呢？假如一个地震专家告诉你，近期发生6级地震的可能性是20%，那么你夜里在房间内能否安睡呢？

9. 几年前，国家有关部门宣称要在全国试行天气的"概率预报"，但始终未果。你能分析其中的部分原因吗？

§1.2 随机现象与样本空间

一般随机现象

随机试验：1) 在相同的条件下，可重复进行

2) 每次试验可能发生的结果不是唯一的，但试前能知道

3) 试验所有可能性的结果

一、随机现象和随机试验

让我们安排这样的"试验"。

设抽屉中有十支外观完全相同的油笔，其中装有兰、黑、红色笔芯的各为5、3、2支。我们所做的试验就是从抽屉中随意地（即不加选择地）取出一支油笔。

该试验的可能结果显然有三种，即取出的油笔可能为兰、黑、红色。于是我们说，该试验所呈现的结果为随机现象，而这三种不同的结果都叫做随机事件。

凭直觉我们明白，这三个随机事件发生的可能性的大小是不一样的。如若定量地回答，相信绝大多数读者都能答出："取出兰笔"、"取出黑笔"、"取出红笔"这三个随机事件发生的可能性分别为50%、30%、20%. 这确是一个正确的答案。如改用"概率"来陈述，则可以说：这三个随机事件发生的概率顺次为0.5、0.3、0.2（注意$0.5+0.3+0.2=1$）。

由于各种现象常常是在人们所进行的试验或观察（或观测、检测等）中呈现出来，我们不妨把呈现出随机现象的试验或观察叫做随机试验。我们还可以举出许多随机试验的例子：

E_1：在一条生产线上，检测在24小时内产出次品的数目。

E_2：射手向一目标射击，观察命中目标与否。 ⇒在每次试验前不能

E_3：抛一枚硬币，观察正面或反面向上。

E_4：观察某精品店一天内接待的顾客数。

E_5：检测一批元件的使用寿命。

E_6：向一目标射击，直至击中为止，记录射击的次数。

E_7:记录电话交换台在单位时间内收到呼唤的次数。

E_8:观测某地的年降雨量。

试验E所有可能出现的试验结果构成的集合 称为样本空间(Ω)

二、样本空间

定义 1 称随机试验 E 的每一个结果为一个样本点,常用 ω 表示;由样本点的全体构成的集合称为样本空间,常用 Ω 表示,即 $\Omega=\{\omega\}$. 样本点也称为基本事件。

例如,在试验 E_1 中,可记 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,N\}$,其中 N 是 24 小时内产出次品的最大数目。在试验 E_3 中,可记 $\Omega=\{$正面,反面$\}$,改用英文字头,亦可记 $\Omega=\{H,T\}$. 在试验 E_5 中,如果元件的最长寿命尚不清楚,则可方便地记作 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}=[0,+\infty)$.

例 1 设箱内装有 4 个零件,其中一,二,三等品(统称正品)和次品各 1 件。所做的随机试验是从箱内随意地取出一个零件。写出试验的样本空间。

解 如果我们只关心取出的零件是否为正品,则可记 $\Omega_1=\{$正,次$\}$. 如果我们还关心取出零件的等级,则可记 $\Omega_2=\{$一,二,三,次$\}$. 可见同一个随机试验视人们的着眼点不同可产生不同的样本空间。

在例 1 中,可否把样本空间记为 $\Omega_3=\{$一,二,三,正,次$\}$呢? 由于正品包含了一、二、三等品,即 Ω_3 中的"基本事件"出现了重迭,故 Ω_3 的记法是不正确的。

一般地说,样本空间中的基本事件不但要涵盖随机试验的全部结果(即无遗漏),而且基本事件两两不能同时发生(即无重迭)。这就是样本空间中基本事件应满足的两项准则。只有依据这两项准则,才能对定义 1 有一个准确的理解。

习题 1-2

1. 分析试验 E_6 的基本事件,写出其样本空间。
2. 分析试验 E_8 的基本事件,写出其样本空间。
3. 从 J、Q、K、A 四张扑克牌中随意抽取两张。分析该试验的基本事件,写出其样本空间。
4. 播下五粒种子,记录发芽的粒数。写出该试验的样本空间。
5. 在大学校园中随意询问并记录一个学生的生日,写出该试验的样本空间(假定每年只有 365 天)。
6. 把第 5 题改为测量学生的身高,写出其样本空间。
7. 观察一次对靶射击的环数,写出该试验的样本空间。
8. 抛一枚硬币并掷一颗骰子,观察硬币的正反面及骰子的点数。写出该试验的样本空间。

§1.3 随机事件

随机事件:样本空间的子集.

一、随机事件的概念

单点子集 $\{\omega\}\subset\Omega$ 基本事件. 由若干个样本点构成的 随机事件

对于一个随机试验来说,当样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 确定以后,人们往往还关心由若干基本事件组成的"复合事件"。如在第二节例 1 中,我们改记 Ω_2 为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\},$$

其中 ω_i 表示 i 等品,$i=1,2,3$,ω_4 表示次品。于是取出正品的事件可记为 $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$,取出

不再区分随机事件与基本事件

随机事件的发生：指该随机事件当中某一个样本点出现了。

二等品以上(含二等品)的事件可记为 $B=\{\omega_1,\omega_2\}$. 注意 A 和 B 分别由样本空间 Ω 的 3 个和 2 个元素组成，故都是 Ω 的子集。显然 A 和 B 的发生都具有偶然性(或随机性)，都应该称作随机事件。

这启发我们认识到，对于一个随机试验的样本空间 Ω 来说，它的任何一个子集都代表一个随机事件。

定义 1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，称 Ω 的任一子集为随机事件。

设 $\omega\in\Omega$，则 $\{\omega\}\subset\Omega$. 可见样本点作为基本事件的同时，也是一个随机事件，当然是最简单的随机事件。我们不妨把含两个以上样本点的随机事件称为“复合事件”。

由于样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集：$\Omega\subset\Omega$，故 Ω 也是一个随机事件。依据“无遗漏”这一准则，我们断定 Ω 是一个必然发生的随机事件，故称 Ω 为必然事件。可见必然事件是随机事件的特例。

因为空集 Φ 也是 Ω 的子集，所以 Φ 也是一个随机事件。注意到 Φ 不含任何样本点(可形象地记作 $\Phi=\{\ \ \}$)，故 Φ 是一个不可能发生的事件，称为不可能事件。

总之必然事件和不可能事件是随机事件的两个极端。通常可把随机事件简称为事件。

例 1　把一枚硬币抛三次，顺次记录出现正、反面的情况，得到样本空间

$$\Omega=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$$

其中 H 代表正面，T 代表反面，试把下列各事件表为 Ω 的子集：

A=“正面出现两次”，　B=“正面出现两次以上”，　B_1=“正面多于反面”，
C=“正面没出现”，　C'=“反面出现三次”，　D=“正面出现一次以上”，
F=“正、反面次数不相等”，　G=“正面出现不超过五次”，　J=“正、反面次数相等”，
K=“正面出现超过三次”。

解　$A=\{HHT,\ HTH,\ THH\}$，　$B=B_1=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH\}$，
$C=C'=\{TTT\}$，　$D=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}$，
$F=G=\Omega$，　$J=K=\Phi=\{\ \ \}$.

可见 F 和 G 都是必然事件，J 和 K 都是不可能事件。

例 2　掷一颗骰子，观察向上那面的点数(即出现的点数)。样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$，其中 ω_i 表示点数 i 出现，$i=1,2,3,4,5,6$. 试把下列各事件表为 Ω 的子集：

A=“不超过 3 的点数出现”，　B=“6 的约数出现”，　C=“偶数点出现”，
D=“奇数点出现”，　F=“点数 5 不出现”，　G=“前两个奇数出现”，
H=“点数 5 出现”。

解　$A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，　$B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_6\}$，　$C=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$，
$D=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，　$F=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$，　$G=\{\omega_1,\omega_3\}$，
$H=\{\omega_5\}$.

事件相等 $A=B \iff A\subset B$ 且 $B\subset A$

二、事件的关系与运算

(2) 互斥(互不相容)

基于集合之间的关系与运算，我们将对随机事件之间的关系与运算作出明确的规定。

以下设随机试验 E 的样本空间为 Ω，而 A、B、C 等大写英文字母都是随机事件(即 Ω 的子集)。

1. 包含关系　如果 $A\subset B$(即 A 是 B 的子集)，则称事件 A 含于事件 B，或事件 B 包含事件 A. 届时，事件 A 发生蕴含事件 B 发生，或事件 A 发生意味着事件 B 也发生。如在例 2 中，有 $A\subset B$.

2. **相等关系** 如果 $A=B$(即作为集合,A 与 B 相等),则称事件 A 与事件 B 相等。届时,事件 A 发生等同于事件 B 发生。如在例 1 中,有 $B=B_1$, $C=C'$.

3. **和事件** 称并集 $A\cup B$(亦可记为 $A+B$)所代表的事件为事件 A 与事件 B 的和事件。因为和事件 $A+B$ 系由事件 A 和事件 B 中的所有基本事件所构成,所以 $A+B$ 发生等同于“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”。也可以说,$A+B$ 发生等同于“A 或 B 发生”。如在例 2 中,有 $A+C=F$, $B+G=B$.

和事件可以推广到更多的事件上去,我们有

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 + A_2 + \cdots A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

其中诸 A_i 都是 Ω 的子集。

显然有

$$A\subset B \iff A+B=B.$$

4. **积事件** 称交集 $A\cap B$(亦可记为 AB)所代表的事件为事件 A 与事件 B 的积事件。因为积事件 AB 系由既属于 A 又属于 B 的基本事件所组成,所以 AB 发生等同于“A 且 B 发生”。如在例 2 中,有 $AD=G$, $CF=C$.

积事件也可以推广到更多的事件上去,我们有

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1A_2\cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

显然有 $A\subset B \iff AB=A$.

5. **互斥事件** 如果 $AB=\Phi$,则称事件 A 与事件 B 为互斥事件。届时事件 A 和 B 不含有公共的基本事件,故 A 和 B 不会同时发生。如在例 2 中,有 $CG=\Phi$, $BH=\Phi$.

习惯上,也称两个互斥事件为互不相容。

6. **对立事件** 定义 A 的补集为 $\bar{A}=\Omega-A$,称 $\bar{A}$ 所代表的事件为事件 A 的对立事件。显然 A 也是 $\bar{A}$ 的对立事件,如在例 2 中,C 和 D 互为对立事件,F 和 H 互为对立事件。

注意 Ω 与 Φ 互为对立事件。

事件 A 与 B 互为对立事件的充分必要条件是

$$A+B=\Omega, \qquad AB=\Phi.$$

可见相互对立的两个事件是互斥事件。但是,两个互斥事件未必对立,请读者自己举例。

习惯上,也称两个对立事件为互逆。

7. **差事件** 定义集合 A 与 B 的差集为 $A-B=\{\omega|\omega\in A,\omega\overline{\in}B\}$. 称差集 $A-B$ 所代表的事件为事件 A 与事件 B 的差事件。依定义可知,$A-B$ 发生等同于“A 发生且 B 不发生”,或“A 发生且 $\bar{B}$ 发生”(注意 $A-B=A\bar{B}$)。如在例 2 中,有 $B-C=G$, $D-G=H$.

显然有

$$\Omega-A=\bar{A}.$$

从上面的讨论可以看出,事件之间的各种关系及运算与集合论中集合之间的相应关系及运

算是一致的。因此，事件之间的关系及运算可以用直观图来表示，如图 1-1.

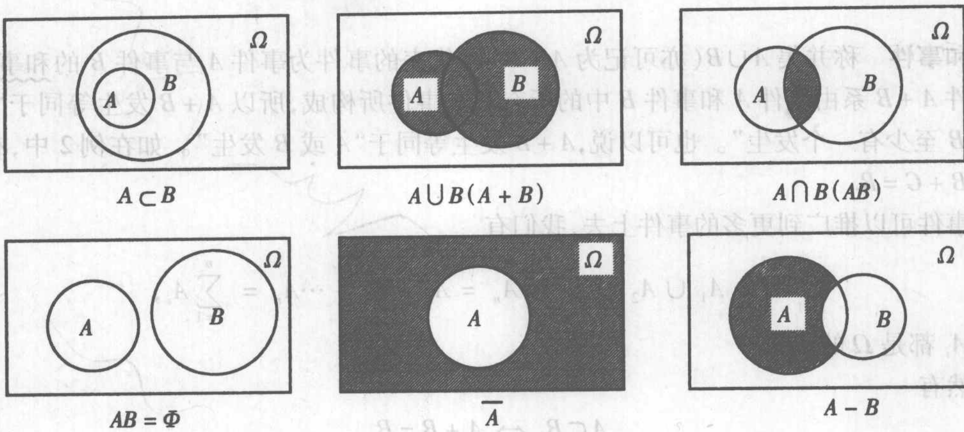


图 1-1

例 3 设 A,B,C 为同一样本空间 Ω 的随机事件，试用 A,B,C 的运算表示下列事件：

1）A,B,C 都未发生；　　2）A 与 B 发生，C 不发生；

3）A,B,C 至少其一发生；　　4）A,B,C 中恰有两个发生；

5）A,B,C 中至少有两个发生；　　6）事件 3）的对立事件。

解 上述事件的表示式分别为

1）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；　2）$AB\overline{C}$，或 $AB-C$；　3）$A+B+C$；

4）$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；　5）$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$；　6）$\overline{A+B+C}$ 或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

为了更好地理解例 3，我们可对 Ω 作如下分解：

$$\begin{aligned}\Omega&=\Omega\Omega\Omega=(A+\overline{A})(B+\overline{B})(C+\overline{C})\\&=ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}.\end{aligned}$$

可见 Ω 已被剖分为八个子集，见图 1-2. 该图相当于沿三个相互垂直的方向各切一刀，从而把一个“豆腐块”切成 8 个子块。读者可以识别例 3 中的 6 个事件分别占有 8 个子块当中的哪些子块。

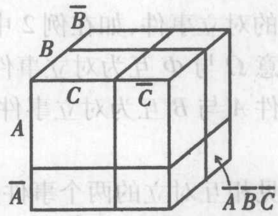


图 1-2

现在，让我们回顾例 3 的 1），3），6）. 我们发现，“A,B,C 至少其一发生”的对立事件是“A,B,C 都未发生”，即

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}. \tag{1}$$

上式恰好是集合论中的对偶律。当只有两个事件时，对偶律为

$$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}. \tag{2}$$

注意对偶律(1)还有一个等价表达：

$$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}. \tag{1'}$$

在概率计算中，有时运用对偶律会带来方便。