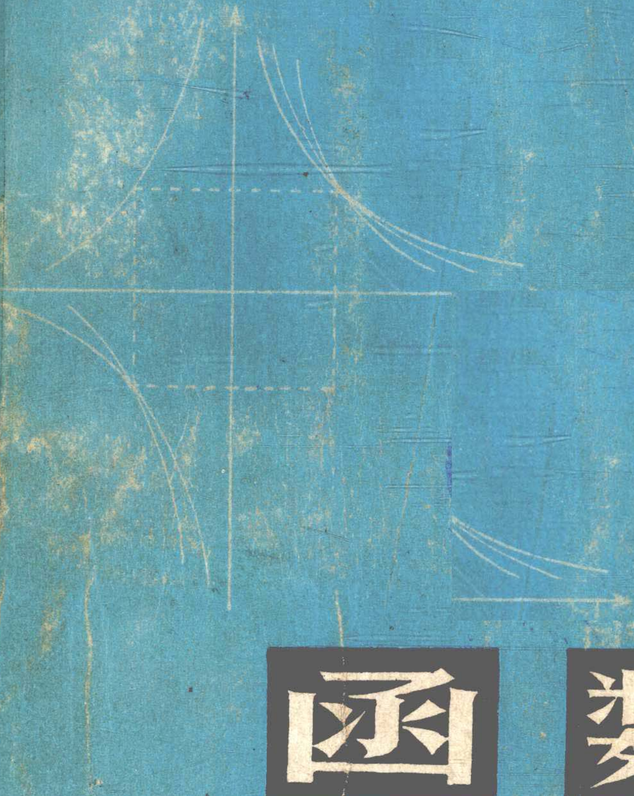
HAN SHU



函数

李 文 亮

内蒙古人民出版社

函　　数

李文亮 编著

内蒙古人民出版社

一九八六·呼和浩特

函　　数

李文亮 编著

内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行　赤峰市第一印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　印张：13.625　字数：287千
1987年6月第一版　1987年8月第1次印刷
印数：1—3,420册
统一书号：7089·457　每册：1.95元

前　　言

一

在五彩纷呈的宇宙中，我们找不出不在运动变化的事物，但各个事物的运动变化，又绝非彼此孤立隔绝，而是相互联系、相互制约的。这种事物运动变化及其相互联系在数学上的抽象就是变量和函数的概念。

恩格斯在《自然辩证法》一书中说过："数学的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分学和积分学就立刻成为必要的了"。数学是现代科学技术的基础。掌握好变量和函数的概念及其基本性质，则是深入学习数学的必经阶梯。根据笔者长期从事数学教学的体验，感到有必要为中学高年级和大学低年级的学生编写一本有关函数的课外读物，目的在于为初学者释疑解惑，为深入钻研者开阔视野。

本书力图以现代数学思想方法，对函数的概念，函数的基本性质——函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性、函数的极限与连续性，作一较系统和较详细的论述，并特别对一般教科书及其他同类书籍中比较鲜见的内容，如复合函数的概念，复合函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性，复合函数的极值与最值，复合函数的极限与连续性，以及拟周期函数，一些初等函数的超越性，无限多个无穷小（大）的和与积，函数极限中如何由 ε 求相应的 δ 的规范化证明等，

也都作了较为深入的探讨和论述。为了便于读者自学，本书由浅入深，循序渐进，对每一概念，都尽量从实际问题出发，经过探讨再引导到精确定义，然后再指出对该定义应注意之点。为了提高读者的兴趣和解题能力，书中编入了较多联系实际的和一些有趣的例题，还选用了历年高考和数学竞赛中的部分典型题目。对于一些重要的理论知识及各种典型的解题方法，也都作了较详尽的阐述，力求保持数学应有的严谨性。凡估计读者容易发生错误的地方，尽量给予必要的分析和提醒。书中配备有练习题，是供读者检查学习以后是否掌握其内容而安排的，读者可以从书末的答案中核对自己的练习解答。

如果本书能够促进在校学生的数学学习，对青年自学、复习有所裨益，对中学和中专的数学教师的教学和业务进修有所帮助，并对接着学习微积分的读者有所启发的话，那将是笔者最大的欣慰。

书中引用了《数学通报》和有关数学书刊的一些材料，均未注明作者和出版单位。在此，谨对他们表示感谢和歉意。

恳切欢迎广大读者对书中的缺点和错误批评指正。

编著者 1986年4月

目　　录

第一章　集合与实数

§1　集　合

一、集合概念

“集合”是数学中最基本的原始概念，很难用简单的概念给它下定义，只能给予描述。

看一个例子：

如果我们把不超过5的自然数1，2，3，4，5这五个数看做一个整体时，就说这个整体为一个集合。

一般地，我们把具有某种属性的、确定的、有区别的对象看做一个整体时，就说这个整体（或全体）叫做**集合**，或简称为**集**。

集合的概念在现实生活中和数学中是到处可见的。如

“自然数的全体”。

“某几何图形上的点的全体”。

“平面上和已知点的距离为定长的点的全体”。

“某方程所有的解的全体”。

“内蒙古所有中学的全体”。

“宇宙间所有星球的全体”。

还有，如一组拉丁字母，一班学生，一堆石头，一群羊，一伙人，等等，都给我们以集合的概念，由此可见，集合这个概念对我们来说并不陌生。

集合里的各个对象叫做集合的**元素**．例如由数1，2，3，4，5组成的集合，1，2，3，4，5都是这个集合的元素．

对于集合这个概念，我们特别要注意以下两点：

一是集合的元素的**确定性**．给出一个集合，那么这个集合的元素应该是确定的．这就是说，我们能判断任何对象是不是这个集合的元素，不能含糊不清．例如，由不超过5的自然数组成的集合，则我们可以判断1，2，3，4，5这几个对象是这个集合的元素，但象0，-1，$\frac{1}{2}$，$\sqrt{2}$等数都不是这个集合的元素，因为这些数都不是自然数，又6也不是这个集合的元素，虽然它是自然数，但超过了5，因此它不是这个集合的元素．

如果要问"相当大的数的全体"是不是集合呢？"相当大的数"虽然也是一种特殊的性质，但它是不确定的，所谓相当大的数是大到什么程度呢？是无法断定的，界限是不清的．一万是否在这个集合里？一亿是否在这个集合里？都无从知道，因此它不是一个集合。

二是集合的元素的**相异性**．这就是说，同一个集合的诸对象作为元素来说应该是彼此不同、可以互相区别的．例如，我们可以说"由三枚一分硬币组成的集合"，因为这三枚硬币虽然币值相同，然而它们毕竟是三个不同的个体，不能说这枚硬币就是那枚硬币．但是不能说某个集合里有三个元素都是1，这时我们只说数1是这个集合里的元素就够了．

二、集合的表示法

我们通常用大写字母A，B，C，D，…，X，Y，Z表示

集合，而用小写字母a，b，c，…，x，y，z表示集合的元素。

当a是集合A的元素时，就说a**属于**集合A，或说集合A**包含**a，记作$a\in A$或$A\ni a$。

“$\in$”是希腊文“属于”一字$\in\sigma\tau\iota$的第一个字母。

当a不是集合A的元素时，就说a**不属于**集合A或说集合A**不包含**a，记作$a\overline{\in}A$或$A\overline{\ni}a$(有的书上也记作$a\notin A$或$A\not\ni a$)。

例如，用N表示自然数的全体所成的集合，则$1\in N$，$\frac{1}{2}\overline{\in}N$，$0\overline{\in}N$。

怎样表示一个集合呢？一般有以下几种方法：

1　列举法

把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫做**列举法**。

例如，不超过5的自然数的集合可以表示为

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}.$$

这里应注意，在**集合符号**$\{\ \}$里，元素之间用逗号“，”隔开，不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，就认为是同一个元素。同一个元素在一个集合里是不能重复写出的。例如，把由一个元素a构成的集合写成$\{a,\ a,\ a\}$是不妥的，只能写成$\{a\}$。这里还要注意，$\{a\}$与a的含义是不同的，a是一个元素，而$\{a\}$是由a一个元素组成的集合。由一个元素组成的集合叫做**单元素集**；由有限个元素组成的集合叫做**有限集合**。由无限多个元素组成的集合叫做**无限集合**。

当集合的元素很多或者有无限多个，不能将元素全部写在$\{\quad\}$中时，可以列出几个元素，后面用省略号就行了。例

如，自然数集合N可以表示为

$$\{1, 2, 3, \cdots\}.$$

在使用省略号的列举法表示一个元素很多的集合或表示一个无限集时，一定要注意表示的明确性，要使人能从已经列举的元素中了解到未列出的元素是甚么。如$\{-1, 2, 0, -3, 1, -2, \cdots\}$不能认为是整数集合$J$的一个表示，而$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$却能认为是整数集合$J$的一个表示。

2 描述法

把描述集合中元素的共同属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内，用来表示集合的方法叫做**描述法**。

例如，全体实数组成的集合通常用R表示，则

$$R=\{\text{实数}\}.$$

由所有不超过5的自然数组成的集合可表示为

$$\{\text{不超过5的自然数}\}.$$

又如，$N=\{\text{自然数}\}$，$J=\{\text{整数}\}$，等等，都是用描述法表示的集合。

这里应注意，写法

$$R=\{\text{全体实数}\}，N=\{\text{全体自然数}\}$$

是不合理的，因为"全体实数"本身就表示一个集合，从而$\{\text{全体实数}\}$实际上是表示一个单元素集合，以实数集合作为它的唯一元素。

用描述法表示集合最常用的还是采用如下的写法：例如，满足不等式$x-3>2$的所有x组成的集合可以写成

$$\{x \mid x-3>2\} \text{ 或 } \{x : x-3>2\} \text{ 或 } \{x ; x-3>2\}.$$

一般地，就是在集合符号大括号$\{\quad\}$内自左至右先写

出该集合元素的代表符号，然后用**隔开符号**“|”（或“：”，或“；”）隔开，在它右边用数学语言描述出该集合中元素的特性或写出其应满足的条件。在需要多层次描述其性质时，要用适当关联词**“且”**、**“或”**等联结，有时“且”可用“，”代替；当描述部分出现了元素记号以外的字母时，必须进一步对这些出现的字母说明其含义或指明其取值范围。例如不等于1的所有正数的集合可表示为 $\{x \mid x>0$ 且 $x\neq 1\}$，用Q表示有理数的集合，则

$$Q=\left\{\frac{p}{q} \mid p,\ q\in J,\ q\neq 0,\ p,\ q\text{互质}\right\}.$$

又如，偶数集可表示为

$$\{x \mid x=2n,\ n\in J\} \text{ 或 } \{2n \mid n\in J\}.$$

单位圆周可表成集合

$$\{(x,\ y) \mid x^2+y^2=1\}.$$

3　图示法

用一个圆圈、椭圆或矩形来表示一个集合，而把集合的元素写在圈子里面，有时直接用圈子周界上的点和内部的点来表示集合的元素。这种表示集合的方法叫做**图示法**。

例如，“多项式$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$的非常数因式集合”可表示如图1—1.

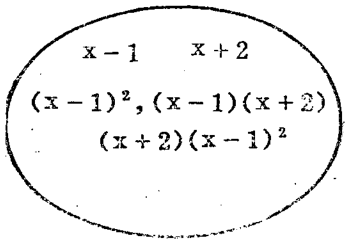


图　1—1

图示法具有直观性。我们将看到，图示法还能直观地表示出集合论中的一些定理。掌握好图示法对我们直观地了解集合论的知识很有帮助。集合这种图示叫**韦恩图**（韦恩

Venn 英国数学家），有的书上也称为**“文氏图”**。

数集的另一种常用的图示是借用数轴上的点来表示，在实数一节中我们还要专门来论述它。

集合的上述三种表示法，各有其优点。列举法可以具体看清集合的元素，描述法则揭示了集合元素的公共属性，当集合元素很多甚至无限时常用此法。图示法则直观性强，初学者易于理解。在具体使用时要根据情况合理选取。

把一个集合用较简单的形式表示出来是一基本功，需要多加训练。因此，我们不妨再举几个例子。为了书写的方便，在后面的论述中，我们用 N，J，Q，R分别表示自然数集，整数集，有理数集和实数集。

例1 不超过20的非负偶数集。

解 用描述法表示：$\{x \mid x=2k,\ 0\leqslant k\leqslant 10,\ k\in J\}$，或表示成：$\{2k \mid 0\leqslant k\leqslant 10,\ k\in J\}$。

也可用列举法表成：$\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$。

例2 方程$(x-1)^2(x^2-x-2)=0$的解集

解 原方程 即$(x-1)^2(x+1)(x-2)=0$，故其解集为

$$\{x \mid (x-1)^2(x+1)(x-2)=0\}=\{-1,\ 1,\ 2\}.$$

例3 不等式$\frac{1}{x}>1$的解集。

解 分别设$x>0$和$x<0$来解之：

$$\begin{cases} x<0 \\ \frac{1}{x}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ 1<x \end{cases} \text{无解，得空集。}$$

或 $$\begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{x}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1>x \end{cases} \text{得} 0<x<1.$$

$\therefore\ \frac{1}{x}>1$的解集是$\{x\mid 0<x<1\}$.

例4 用描述法表示集合$A=\{1+\lg 2,\ 2\lg 40,\ \lg 512000\}$.

解 $\because 1+\lg 2=1(1+1\cdot\lg 2)$,

$2\lg 40=2(\lg 10+\lg 4)=2(1+2\lg 2)$,

$\lg 512000=3(\lg 80)=3(\lg 10+\lg 8)=3(1+3\lg 2)$,

故集合A的描述法表示是

$$A=\{x\mid x=k(1+k\lg 2),\ k\leqslant 3,\ k\in N\}.$$

为了研究方便，我们把不含任何元素的集合，也算作集合，称为**空集合**，简称为**空集**，记为"$\varnothing$"或$\{\ \ \}$. $\varnothing$是丹麦文字，读作"欧"(oe)。至少含有一个元素的集合称为**非空的**。

例如$\{x\mid x^2-2x+3=0,\ x\in R\}=\varnothing$,

这是因为$x^2-2x+3=0$无实数解，即满足$x^2-2x+3=0$的实数是没有的。又如

$$\{x\mid x\text{是除以4余1的偶数}\}=\varnothing.$$

我们规定，空集$\varnothing$是有限集。应注意$\{x\mid x^2=0\}=\{0\}$不是空集，因为它是由一个元素0所组成，是单元素集。

又对于有限集A，我们用记号$n(A)$表示集合A的**元素个数**，则对空集$\varnothing$有$n(\varnothing)=0$，对单元素集A有$n(A)=1$.

三、集合间的关系

1 子集 如果集合B的每一个元素都属于集合A，则称集合B为集合A的**子集合**，简称B是A的**子集**，或称A **包含**B，记作：$B\subseteq A$或$A\supseteq B$.