

名著
主编

样本书

《金钥匙丛书》

王占元 讲

怎样学好初中数学



王占元 讲

怎样学好 初中数学

科学出版社 龍門書局

样本书

《金钥匙丛书》

王占元 讲

怎样学好初中数学

科学出版社
龍門書局

1996

G634.413/18

(京)新登字 306 号

《金钥匙丛书》

王占元 讲

怎样学好初中数学

责任编辑 尚久方 杜小松

科学出版社出版
龙门书局

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

中国人民解放军第一二〇二工厂印刷

科学出版社总发行 各地新华书店经销

*

1996 年 1 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1996 年 5 月第三次印刷 印张:11

印数:32 001—62 000 字数:285 000

ISBN 7-80111-057-9/G·22

定 价:12.10 元

《金钥匙丛书》序

“金钥匙”源于格林童话，是能打开宝库的贵重的钥匙。金钥匙的贵重，不在于钥匙本身的金的价值，而是在于它能开启宝库的大门，引导人们得到取之不尽的宝藏。“金钥匙”常喻指获取知识、解决问题的能力和方法，指开启心扉、开发智力的教育方法。叶圣陶在谈到教学的目标时曾说：“对于学生来说，能够得到一把开启智慧之门的钥匙，养成一些良好的学习习惯，练就几路真正有用的本领，那才是最大的实益，终身受用的好修养。”我们这一套中小学教学参考书取名为《金钥匙丛书》，其宗旨就不是为各科教学另外增补填充物和添加剂，而是企求帮助学生增强学习能力，改进学习方法，或者也用借喻的说法，是为各科教学提供催化剂和发酵剂，帮助学生更好地吸收、消化。

在中小学特别是基础教育阶段，学校教学要使学生掌握基础知识、形成基本技能，即所谓“双基”，这无疑是十分正确、十分重要的，这是学校教学的中心任务和首要任务。但我们以为，在学生掌握基础知识、形成基本能力的过程中培养学习兴趣、形成学习习惯、发展学习能力，是同样（如果不说是更为）重要的。或者说，“双基”教学不只是教给学生知识和技能，更重要的是在教学过程中培养学习的兴趣、习惯、能力。用借喻的说法，供给食物、保证营养是重要的，但旺盛的食欲、良好的饮食习惯和健全的消化吸收功能更为重要，“那才是最大的实益，终身受用的好修养”。这是关系到教学思想乃至教育思想的大问题，值得多说几句。

关于学习兴趣。两千多年前的孔子就说过“知之者不如好之者，好之者不如乐之者”。“好”和“乐”就是愿意学、喜欢学，就是学习兴趣。对还没有明确学习目的的儿童来说，这点尤其重要，“乐”是主动性、积极性的起点。随着学习以及思想的发展，兴趣就可能

上升为志趣和志向。“吾十有五而志于学”，由“乐”上升为“志”，学习就有了更高的自觉性和目的性。爱因斯坦所说的“在学校里和生活中，工作的最重要的动机是工作中的乐趣，是工作获得结果时的乐趣，以及对这种结果的社会价值的认识”，不妨理解为由自发的、感性的“乐趣”出发，上升为自觉的、理性的“认识”过程，也就是由“乐”到“志”的过程。这是我们基础教育阶段教学工作应该充分尊重并且着重引导的带规律性的教学和教育过程。

关于学习习惯。帮助学生形成良好习惯，是学校教育的重要任务。叶圣陶认为：“从小学老师到大学教授，他们的任务就是帮助学生养成良好习惯，帮助学生养成政治方面文化科学方面的良好习惯。”习惯，就是把认识和知识落实转化为实践，更从实践中巩固和加深认识和知识，再转为更高的实践。知识和习惯的关系，也就是知与行的关系。我国古代《礼记》中所说的“博学之、审问之、慎思之、明辨之、笃行之”，把学问思辨归结到“行”上，现代教育家陶知行改名为陶行知，也都说明“行”对于“知”的重要。习惯，是经过重复、练习而巩固下来的稳定持久的条件反射和自然需要。培养良好正确的学习习惯，也是各科教学的重要任务。以语言和写作教学为例，读懂读通若干篇范文以及必要的字词语法、修辞知识固然重要，但同等重要的是培养勤读勤查、使用工具书的习惯，写读书笔记的习惯，作文要“修辞立诚”、写自己真实思想感受的习惯，作文要“上口入耳”、写好自己念、自己修改的习惯，以及不仅在课堂上而且在生活中正确使用语言文字的习惯等等。语文教学如果只是要求背熟多少范文和语法规则而忽略了良好正确的学习习惯的形成，那无论从教还是学两方面说都是不完全、不巩固、不成功的。

关于学习能力。学习能力，简单说就是举一反三的能力，触类旁通的能力，由已知推未知的能力。课堂教学，甚至整个学校阶段的教学，涉及的只不过是人类已有知识的一小部分。学校教学传授基础知识和基本技能，是所谓打基础阶段。基础固然要坚实，但基础只不过是准备，为学生在课堂之外和出校门后的继续构筑作准备。以数学学科为例，要求学生掌握数的基本概念、基本定律、基本

运算,为此要演算一定数量的例题。掌握课本中列出的概念、定律、运算固然重要,但更重要的是通过这些教学活动培养学生抽象演绎的能力,为掌握课本以外的更多更高更深的概念、定律和计算作准备。如果仅仅死记硬背多少概念、定律和计算题而不是以此为手段发展思维能力,那从教和学两方面说也都是不完全、不成功的。

上述学习兴趣、习惯和能力三个方面是互促互补、互为因果的。成功的教学,不在于教师的授予和学生的接受,而在于教师发挥主导作用,调动学生学习的主动性和积极性。教学的最高境界,是教其自学,培养学生自学的兴趣、自学的习惯、自学的能力;正如叶圣陶所说的“教育的最终目的在学生能自学自励,出了学校,担任了工作,一直能自学自励,一辈子做主动有为的人。”

《金钥匙丛书》由教学经验丰富的特级教师执笔,以现行的最新教学大纲和教材为基础,注重思路开拓,注重能力的培养。对课文知识归纳总结,融会贯通,解析重点、难点。对学生,是学法指导;对教师,是教法参考。《金钥匙丛书》是提倡素质教育的教学参考书。

楚庄

1995年8月

作者简介

毕业于北京师范专科学校,后留校任教.现任北京市教育局教研部数学教研员,高级教师.从事中学数学教学、北京市中学数学教材编写及中学数学研究30余年.从1978年开始至今,一直参加、主持北京市初中毕业、升学统一考试的命题工作,有丰富的中学数学教学及中考命题经验,曾主持北京市市级科研项目“平面几何入门实验”,并通过市级鉴定.兼任北京市数学教学研究会主办的《中小学数学教学》报常务编委.

担任主编或与他人合作编写的论著有《数学小词典》、《初中数学总复习教学参考书》、《北京市初中毕业、升学统一考试说明》、《初中数学能力培养》、《初中数学指导全书》、《初中数学练习册》、《初中几何教学要求》、《财经应用数学》等,并在《数学通报》、《中等数学》、《北京教育》、《北京教研》、《学科教育》、《中学生》、《中小学数学教学》等刊物、报纸上发表数十篇学术论文及教学指导文章.

曾参加第四届中日学术交流,在会上宣读论文《寻求平面几何入门的突破口》,后被收入会议的论文集.

目 录

第一章 基础扎实 根深叶茂	1
1. 长流水,不断线	5
2. 设计题组,以点带面	5
3. 条块结合,编成网络	7
4. 重点知识,力求熟练	8
第二章 数学概念 抓住实质	11
1. 掌握概念的实质	11
2. 抓住概念之间的联系	15
3. 在应用中加深对概念的理解	17
第三章 公式定理 贵在理解	20
1. 掌握公式、定理的推导过程	20
2. 在归纳中加深理解	22
3. 在应用中巩固公式、定理	24
第四章 数学方法 解题工具	32
1. 待定系数法	32
2. 配方法	52
3. 换元法	63
第五章 归纳类比 总结规律	81
1. 归纳	81
2. 类比	102
第六章 隐含条件 考查能力	108
第七章 分析综合 探求思路	119
1. 综合法	119
2. 分析法	125
第八章 数形结合 化难为易	153
第九章 解应用题 重在分析	174

1. 审题是列方程的前提	174
2. 搞清基本数量关系	176
3. 善于分析等量关系	188
4. 几个应该注意的问题	202
第十章 解选择题 掌握方法	204
1. 直接法	204
2. 排除法	211
3. 特殊值法	215
4. 验证法	217
5. 观察法	219
第十一章 一题多解 思维发散	222
第十二章 一题多变 创造思维	234
第十三章 特殊题型 求异思维	244
1. 补形法	244
2. 平移法	246
3. 旋转法	249
4. 割补法	251
5. 代数法	253
6. 构造法	255
第十四章 添辅助线 搭桥引线	260
1. 使隐蔽条件显现出来	260
2. 使分散条件集中起来	267
第十五章 数学思想 解题灵魂	297
1. 转化思想	297
2. 方程思想	308
3. 数形结合思想	319
4. 分类讨论思想	328
练习和答案	337

万丈高楼平地起

第一章 基础扎实 根深叶茂

俗话说：“万丈高楼平地起”，只有根基扎实，高楼才能坚固。学习数学也是一样，只有把基础知识、基本技能、基本方法学得扎实，运用娴熟，才能为知识的深化、能力的提高创造条件。

为什么学好“双基”(指基础知识、基本技能)或“三基”(指基础知识、基本技能、基本方法)这么重要呢？

首先，这是教学大纲的要求，在《九年制义务教育数学教学大纲》中明确指出，初中数学的教学目的是：“使学生学好当代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识与基本技能，进一步培养运算能力，发展逻辑思维能力 and 空间观念，并能够运用所学知识解决简单的实际问题。培养学生良好的个性品质和初步的辩证唯物主义观点。”

我们年轻的一代将是跨世纪的一代，未来面临高科技的挑战，它要求每个公民必须具有较高的素质。如果在初中阶段，不能打好素质的坚实基础，将来很难挑起时代赋予的重任。因此，在初中数学中学好“双基”或“三基”，不是为应付考试的需要，而是要从提高全民族素质，为培养成社会主义建设人才奠定基础这个高度来认识的。

其次，打好扎实基础是成才的需要。人脑不是电脑，不是有闻必录，也不是永远储存在头脑中。有些知识可能忘记，也允许忘记。但是，当一个学生初中毕业或高中毕业后，某些知识可以忘记，但老师教给的正确的学习方法不能忘记，一些公式、定理、法则的推导思路不能忘记。也就是说，虽然毕业了，某些知识又“还给”了老师，但一旦需要，可以经过思考，正确推导出来。这样，我们的头脑不是变成简单的存储器，而是把最有用的思维方法、思考途径牢牢地存储起来，到用时能准确、便捷地提取出来。

比如特殊角的三角函数值,在实际中应用很广泛,高中阶段应用就很多,教学大纲中也要求熟记 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 的三角函数值,会计算含有特殊角的三角函数式的值,会由一个特殊锐角的三角函数值,求出它对应的角度.一些老师也教给同学们熟记特殊角的三角函数值的“诀窍”,即

函数 \ 角度	30°	45°	60°
sin	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

对于正弦函数来说, $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 的三角函数值分母都是 2, 分子依次是 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$; 而对于余弦函数来说, 顺序颠倒过来.

对于正切函数来说, 30° 角的三角函数值与 60° 角的三角函数值的积, 恰好等于 45° 角的三角函数值, 即 $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1$, 正切函数值的顺序由小到大; 而余切函数值的顺序颠倒过来.

以上的记忆“窍门”是有助于同学们记忆的, 但是, 仍免不了有遗忘的时候. 有没有更好的记忆方法呢? 那就是回归到特殊角三角函数的求法上.

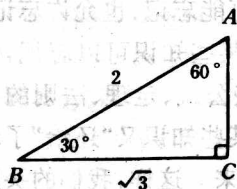


图 1-1

如图 1-1, 画一个直角三角形 ABC , 使 $\angle C = 90^\circ, \angle B = 30^\circ$, 那么 $\angle A = 60^\circ$. 设 $AC = 1$, 则 $AB = 2$, $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. 于是

$$\sin 30^\circ = \frac{30^\circ \text{ 角的对边}}{\text{斜边}} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{30^\circ \text{角的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{30^\circ \text{角的对边}}{30^\circ \text{角的邻边}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{30^\circ \text{角的邻边}}{30^\circ \text{角的对边}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

60°角的三角函数值可类似地求出.

如图 1-2, 画一个等腰直角三角形 ABC , 使 $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, 则 $\angle B = \angle A = 45^\circ$, 设 $AC = 1$, 则 $BC = 1$, $AB = \sqrt{2}$, 于是

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

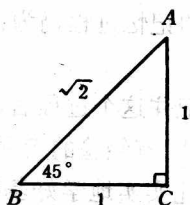


图 1-2

当我们把这两个图记忆在头脑中后, 便不怕记不住特殊角的三角函数值了.

同样, 求弧长公式时, 只要记住了公式的推导过程, 结论不必死记硬背, 公式推导分为以下三步(参见图 1-3):

1. 圆的圆心角是 360° , 弧长是 $2\pi R$;
2. 把圆弧分成 360 等份, 每一份弧所对的圆心角为 1° , 它所对的弧长为 $\frac{2\pi R}{360}$, 即 $\frac{\pi R}{180}$.
3. 圆心度为 n° 时, 弧长为 $\frac{n\pi R}{180}$.

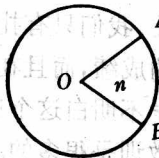


图 1-3

公式的推导过程为:

$360^\circ \rightarrow 1^\circ \rightarrow n^\circ$.

这样, 再求某一度数的圆心角所对的弧长时便不难了.

比如,设圆的半径为 4cm,求 20° 的圆心角所对的弧长 l ,则有

$$l = \frac{2\pi \times 4}{360} \times 20 = \frac{4\pi}{9} (\text{cm}).$$

类似地,求扇形的面积时,也不必死记公式,掌握公式的推导过程,如图 1-3,圆的面积为 πR^2 ,将扇形等分成 360 个小扇形,每一个扇形的面积为 $\frac{\pi R^2}{360}$,那么 n° 的圆心角构成的扇形的面积为 $\frac{n\pi R^2}{360}$.

它的记忆过程仍为:

$$360^\circ \rightarrow 1^\circ \rightarrow n^\circ.$$

当记住这个过程后,不再害怕公式记错.

因此,有经验的老师重过程,这将是终生受益的宝贵经验.

扎扎实实地学好基础知识的第三个理由是毕业、升学考试的需要.从全国大多数省、市中考的方式来看,基本上是一张试卷,两种功能,即兼顾毕业与选拔,以考查“双基”为主,同时使试题有一定的区分度.

拿北京市的中考试题来看,前 80 分属于“双基”考查的内容,后 20 分属于能力考查的内容,也就是兼顾水平考试与选拔考试两种功能.

考查“双基”的题紧扣教学大纲,紧扣教材,紧扣中考说明,这样的题难度小,分值并不低;考查灵活运用“双基”的综合题,难度大,分值并不高,而且是“到位给分”,如果中途哪一步计算出错,计分到哪一步终止.

因此,我们只有扎扎实实地学好“双基”,才能在水平考试中取得理想的成绩,而且在选拔考试中不会因“双基”不过关而失分.但有些同学不明白这个道理,忽视“双基”学习,好高务远,眼高手低,这样的教训是很多的.只有打好“双基”的根基后,再去建造数学王国的宏伟大厦.

既然“双基”这么重要,如何才能把“双基”学好呢?下面结合初三总复习,介绍几点做法.

1. 长流水,不断线

初中三年数学教材中,基础知识、基本技能涉及的面很广,从数学知识的“双向细目表”来看,也有近二百个重要的知识点,如果“平时不烧香”,那么到了临近考试,只能是“临时抱佛脚”了,必然是不分主次,胡子、眉毛一起抓,顾头顾不了尾.怎样改变这种状况呢?

进入初三以后,一方面要把初三学习的新内容认真学好,同时每天安排几道复习初一、初二数学内容的小题,题目要小,覆盖面大,每天只用5—10分钟,不加重课外负担.随着初三的学习,也可逐渐涉及一些初三的内容.当哪一题计算出错时,就说明基础知识还有漏洞,基本训练还不过关,这时再从课本上找几个类似的题继续做,直到熟练掌握为止,不留夹生饭,不留死角.

这样,每天几分钟,做上几道题,到了初三第二学期三月底,初中阶段所有的知识点基本上可以过两遍“筛子”,这样长流水,不断线,可以做到题不生,手不生,心里有底.从结束新课开始,便可以在老师的带领下,复习专题,和“双基”相辅相成,在此基础上再运用数学思想去指导综合题的复习,这样做既不单纯重复,水平又可提高,一步一个脚印.

2. 设计题组,以点带面

数学是按知识系统由浅入深学习的,但是到了总复习阶段,仍按这个系统复习,往往是简单的重复,不能居高临下,从整体上,找到相近知识的内在联系.为了提高复习效率,在复习阶段应精心设计一些题组,由点带面,效果将是不一样的.

比如绝对值这个概念,是在初中一年级学习的.由于当时学生们的知识面窄,理解力不够强,所以教学大纲中把绝对值的教学要求定在了解绝对值的概念,会求有理数的绝对值(绝对值符号内不含字母).如果到了初三总复习阶段仍旧停留在这个程度,那就不够了.我们可以设计下面的一些题组,分类要求,逐步提高.

第一组:有理数的绝对值

$$|5| = \underline{\quad};$$

$$|-4| = \underline{\quad};$$

$$\left|3\frac{1}{2}\right| = \underline{\quad};$$

$$|-0.21| = \underline{\quad};$$

$$|0| = \underline{\quad}.$$

第二组:实数的绝对值

$$|1 - \sqrt{2}| = \underline{\quad};$$

$$|\sqrt{3} - 1| = \underline{\quad};$$

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \underline{\quad};$$

$$|\sqrt{2} + \sqrt{5}| = \underline{\quad};$$

$$|\pi - 3| = \underline{\quad};$$

$$|3.1416 - \pi| = \underline{\quad}.$$

第三组:三角函数的绝对值

$$|1 - \sin\alpha| = \underline{\quad};$$

$$|\cos\alpha - 1| = \underline{\quad}.$$

第四组:含字母的绝对值

$$|a| = \underline{\quad};$$

$$\text{当 } a > 1 \text{ 时, } |a-1| = \underline{\quad}, |1-a| = \underline{\quad};$$

$$\text{当 } a < 2 \text{ 时, } |a-2| = \underline{\quad}, |2-a| = \underline{\quad};$$

$$\text{当 } 2 < a < 3 \text{ 时, } |a-2| + |a-3| = \underline{\quad}.$$

第五组:有关非负数的绝对值

$$\text{若 } |a-2| = 0, \text{ 则 } a = \underline{\quad};$$

$$\text{若 } |a+4| = 0, \text{ 则 } a = \underline{\quad};$$

$$\text{若 } |x-5| + |y+3| = 0, \text{ 则 } x+y = \underline{\quad};$$

$$\text{若 } |x| + |y-1| = 0, \text{ 则 } xy = \underline{\quad};$$

$$\text{若 } |x+3| + \sqrt{y-6} = 0, \text{ 则 } x = \underline{\quad}, y = \underline{\quad};$$

$$\text{若 } |x-4| + (x+y)^2 = 0, \text{ 则 } x = \underline{\quad}, y = \underline{\quad};$$

$$\text{若 } |x-1| = 2, \text{ 则 } x = \underline{\quad}.$$

第六组:有关隐含条件的绝对值

若 $x_1x_2 < 0$, 且 $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = 2$, 则 $\frac{x_1}{x_2} = \underline{\quad\quad}$;

若 $\frac{x_1}{x_2} < 0$, 且 $|x_1x_2| = 5$, 则 $x_1x_2 = \underline{\quad\quad}$;

若 $x_1 + x_2 > 0, x_1x_2 > 0$, $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = 6$, 则 $\frac{x_1}{x_2} = \underline{\quad\quad}$.

当然, 这样的题组还可以再出一些, 难度可以升、降, 这样的复习可以加深对绝对值的理解, 对绝对值的非负性有更深一层的认识.

3. 条块结合, 编成网络

我们知道, 鱼网之所以能够捕捞到鱼, 是由于由经线和纬线编织成网的缘故. 我们在进行初中数学总复习时, 也应该从两个方面进行复习, 一是按照知识系统进行复习, 我们称之为条条复习, 这样做可以把三年来学习的知识加以系统化、条理化; 二是按照专题复习, 我们称之为块块复习, 这样可以从解题思路、解题规律、解题技巧上总结规律, 提高能力. 我们如果把条条复习称为经线, 把块块复习称为纬线, 这样就把知识编织成网络, 将来在解题中可以捕到“大鱼”.

如果我们把数学思想方法看成鱼网上的总绳, 那么便可以提纲挈领, 收放自如, 得心应手.

下面举一个例子来加以说明:

比如平行线的知识应用十分广泛, 当复习了平行线的概念后, 可以把平行线的性质系统加以整理, 把平行线的判定加以整理, 尤其是平行线的判定可以作为证题术, 解决有关判定两条直线平行的问题. 因此, 可以把平行线的判定定理作为一个知识块或小专题加以复习.

证明两条直线平行的方法如下:

(1) 利用平行公理
平行于同一直线的两条直线平行.

(2) 利用三线八角

同位角相等,两直线平行;
内错角相等,两直线平行;
同旁内角互补,两直线平行;
垂直于同一直线的两直线平行.

(3) 利用中位线的性质

三角形的中位线平行于三角形的第三边;
梯形的中位线平行于梯形两底.

(4) 利用平行四边形性质

平行四边形的对边平行;
矩形的对边平行;
菱形的对边平行;
正方形的对边平行.

(5) 利用比例

分三角形的两边成比例的直线,平行于三角形的第三边,
等等.

当有了以上整体的认识后,再遇到有关证明两直线平行的问题,便可以根据题目的特点,选定合适的证明方法.

专题的内容可以根据学生的实际,时间的多少,自行设计,比如:

如何证明比例式或等积式;

如何添加辅助线;

列方程解应用题;

三个非负的量;

谈谈隐含条件;

三种常用的数学方法,等等.

4. 重点知识,力求熟练

在初中数学中,有一些知识应用的频率很高,对这样的重点知识,应该做到弄懂、熟练、会用,可以从不同侧面,不同的角度,不同