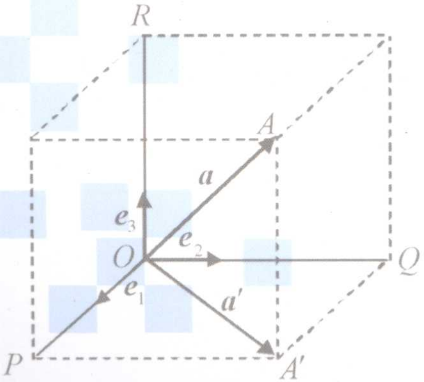
简明线性代数

JIANMING XIANXING DAISHU

主编 袁文俊 邓小成 尚亚东



中国大地出版社

简明线性代数

主　编　袁文俊　邓小成　尚亚东

中国大地出版社

·北　京·

内容提要

本书共分四章，内容包括矩阵与行列式、线性方程组与矩阵的初等变换、向量空间初步、特征值与二次型等。各章节后均配有适量的习题，书后附有参考答案。另外还收录了行列式的排列逆序定义、若干应用问题、硕士研究生入学线性代数试题与选讲及线性代数发展简史等。

本书可作为高等院校教材，也可供读者参加硕士研究生入学考试自学自测和科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

简明线性代数 / 袁文俊等主编．—北京：中国大地出版社，2009.6

ISBN 978－7－80246－233－5

Ⅰ．简… Ⅱ．袁… Ⅲ．线性代数—教材 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 109959 号

责任编辑：王卫平
出版发行：中国大地出版社
社址邮编：北京市海淀区学院路 31 号　100083
电　　话：010－82329127（发行部）　010－82329125（编辑部）
传　　真：010－82329024
网　　址：www.chinalandpress.com 或 www.中国大地出版社.中国
印　　刷：北京纪元彩艺印刷有限公司
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：12.75
字　　数：216 千字
版　　次：2009 年 6 月第 1 版
印　　次：2009 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1—3000 册
书　　号：ISBN 978－7－80246－233－5/G・250
定　　价：18.00 元

前　言

线性代数课程是高等学校工、理、经、管各科大学生必修的一门专业基础理论课程。其基本内容就是求解线性方程组，理解线性方程组解的结构。为此需要介绍行列式和矩阵的基本理论，特别还需要了解向量空间理论的相关知识，为今后学习离散数学和其他学科打下基础。线性代数在数学、力学、物理学的科学研究和技术学科等领域有广泛的应用。同时，该课程对于培养学生的逻辑推理和抽象思维能力、空间直观和想象能力具有重要的作用。通过本课程的学习，使学生在掌握数学基础的同时，提高抽象思维能力，并牢固掌握在科学研究及工程实践中对离散量的基本分析方法，从而不断提高创新意识，全面加强学生运用数学方法分析问题和解决问题的实践能力。学习线性代数课程，不仅可以培养人们的抽象思维和数学建模能力，而且能培养人们对研究对象进行有序化、代数化、可解化的处理能力。正如数学大师笛卡儿（R. Descartes）在其名著《思维的法则》中所指出的：一切问题可以化为数学问题，一切数学问题可以化为代数问题，一切代数问题可以化为方程组求解问题。线性代数所体现的几何观念与代数方法之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等，对于强化学生的数学训练，增强科学智能是非常有用的。在计算机广泛应用的今天，计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术无不以线性代数为其理论和算法的基础内容。

线性代数课程普遍被学生认为是比较困难的一门课程。主要的困难是太抽象。线性代数确实是学生从比较具体的数学到抽象

的公理化的数学的一个重要过渡，一个必须通过的难关。能不能使它变容易一些？如果降低难度，学生学不到应有的知识，达不到应有的知识水平，难关并没有过去。能不能既让学生学起来容易一些而又不降低教学质量甚至提高教学质量，最终达到适合地方高校工、理（非数学）、经、管各科大学生教学培养要求？这是我们编撰这本教材要努力解决的主要问题，当然也是这门课程的建设目标。

《简明线性代数》的编撰者都是研究生导师和科研骨干，具有多年的教学经验和良好的教学效果。2003 年起承担多项教育部和广东省新世纪高校基础课程教改项目。这些项目都包含尝试进行线性代数课程的教学内容和课程体系改革。结合多年来从事科研和教学、包括开展数学建模和考研辅导的经验，我们尝试从以下四方面进行本课程的改革和建设：

1. 多从具体问题出发来组织和展开本课程的教学内容和体系。多介绍程序化的基本内容和方法。例如行列式的定义，采用递归定义，由低阶到高阶。

2. 结合课程本身科学内容的特点，适当介绍线性代数在其他学科中的应用实例，如投入产出模型、人口模型、多元函数极值的判定等，主要见附录 2。

3. 用学生乐于接受的生动活泼的语言来编写教材，做到深入浅出。穿插相关的史实，提高学生的学习兴趣。如在每个新概念引入前，都先介绍浅显的例子或问题。

4. 为了满足部分学生参加研究生入学考试的需要，将行列式的排列逆序定义与相关内容以及历年研究生入学线性代数试题收进附录。同时期望学生可以自测学习水平，正确定位。

《简明线性代数》于 2003 年开始编撰。由于本课程是大学最重要的基础课程之一，编撰时采取了既慎重稳妥而又积极改革的态度。既要学生容易接受，又不能降低标准和损害科学性。希望学生既乐于学习，易于学习，又能对本课程最本质的东西掌握得更好。按照这一指导思想，经过对 3 届学生的教学改革实践，逐

步形成了现在的教学内容体系，取得了很好的效果，深受学生欢迎。

《简明线性代数》的主干内容需要36学时，稍增加点难度并添加附录中的内容，特别是应用示例和考研部分，可计划54学时。

本书第一章矩阵与行列式、附录1行列式的排列逆序定义与附录4线性代数简史由袁文俊执笔；第二章线性方程组与矩阵的初等变换与附录3硕士研究生入学线性代数试题与选讲由尚亚东执笔；第三章向量空间初步、第四章特征值与二次型及附录2若干应用问题由邓小成执笔。

在编撰和成书过程中，曾得到教育部重点资助项目《将数学建模思想融入大学数学主干课程教学中的研究与实验》(1283B01071)的子项目《地方高校大学数学教学改革的研究》(03A08)、教育部高等理工教育数学课程教学改革与实践资助项目《一般高等院校数学基础课程教学内容和体系研究与实践》(0723)、广东省新世纪高等教育教学改革工程项目《数学建模融入数学主干课程的研究》(02042)的支持以及广州大学的教学实践配合。本教材的出版还受到广州大学教材出版基金的资助与中国大地出版社的关心和帮助，在此一并表示感谢。由于编撰者的水平有限，错漏与不妥之处在所难免，敬请专家、读者指正。

编　者

2009年3月18日

目 录

第一章　矩阵与行列式

矩阵与行列式是代数研究的主要对象和计算工具，它在数学的其他分支以及自然科学、现代经济学、管理学和工程技术领域等方面具有广泛的应用. 在本课程中，矩阵与行列式是研究线性方程组求解、向量的线性相关性以及线性变换等内容的有力而不可替代的工具. 本章要介绍的矩阵与行列式的基本理论在线性代数中具有重要地位.

第一节　矩阵及其运算

1. 矩阵概念

定义 1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

称为一个 $m\times n$ **矩阵**. 这 $m\times n$ 个数称为该矩阵的**元素**，代表性元素 a_{ij} 位于该矩阵的第 i 行第 j 列，称为该矩阵的 **(i, j) 元**.

矩阵这个词是由西尔维斯特(Sylvester)于 1850 年首先提出的. 矩阵的基本运算及其理论的系统化应归功于凯莱(Cayley)，他于 1858 年发表的重要论文《矩阵论的研究报告》，奠定了矩阵理论的基础. 通常认为这两位数学家共同奠定了线性代数的基础.

矩阵并不只是一张单纯的数表，更重要的是，矩阵是一个能进行运算

的整体式子. 作为一个整体式子，以数 a_{ij} 为(i, j)元的矩阵记为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

习惯上用黑体大写字母表示矩阵，以上矩阵记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. 当要标明矩阵的行数和列数时，用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$表示，或记作$(a_{ij})_{m\times n}$.

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**. 当要标明方阵的阶数时，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}_n$.

作为形式上的一张矩形数表，矩阵的例子不胜枚举. 这里只介绍线性方程组、线性变换的**系数矩阵**概念.

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为线性方程组(1.1)的**系数矩阵**. 系数矩阵加上常数项的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为线性方程组(1.1)的**增广矩阵**. 在不考虑未知元所用字母及其具体意义时，线性方程组与其增广矩阵一一对应. 当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时，称线性方程组(1.1)为齐次线性方程组，否则称(1.1)为非齐次线性方程组.

从变元 $x_1, \cdots, x_n$ 到变元 $y_1, \cdots, y_m$ 的**线性变换**的一般形式为

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{1.2}$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为线性变换(1.2)的**系数矩阵**. 在不考虑变元所用字母

及其具体意义时，线性变换与其系数矩阵一一对应.

2. 矩阵的线性运算

两个矩阵的行数相等、列数也相等时，就称它们是**同型矩阵**.

如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\,(i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n),$$

那么称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 1.2(加法运算)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，记

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,(i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n),$$

称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

定义 1.3(数乘运算)　称矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积，记作 $k\boldsymbol{A}$.

称 $(-1)\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}$. 规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+(-\boldsymbol{A}).$$

所有元素为 0 的矩阵称为**零矩阵**，用 $\boldsymbol{O}$ 记之. 显然有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O},\ 0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},\ k\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}.$$

矩阵的加法运算与数乘运算统称为**矩阵的线性运算**. 它们满足如下

线性运算律　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，k，l 为数，则成立

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$；

(3) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

3. 矩阵的乘法运算

设有两个线性变换

$$\begin{cases} z_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2, \\ z_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2, \\ y_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2, \end{cases} \tag{1.4}$$

若想求出从 x_1，x_2 到 z_1，z_2 的线性变换，可将(1.4)代入(1.3)，便得

$$\begin{cases} z_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})x_2, \\ z_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})x_2. \end{cases} \tag{1.5}$$

线性变换(1.5)称为由线性变换(1.3)与线性变换(1.4)复合而成的**复合线性变换**. 将线性变换(1.5)的系数矩阵定义为线性变换(1.3)的系数矩阵与

线性变换(1.4)的系数矩阵的乘积，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

观察分析(1.6)式，加以推广，便可得出矩阵乘法运算的一般定义.

定义 1.4　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times l}$，$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{l\times n}$，记

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\,(i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n),$$

称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

只有一行的矩阵称为行矩阵，为避免元素间的混淆，行矩阵也记作

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n).$$

只有一列的矩阵称为列矩阵，习惯上用黑体小写字母表示列矩阵. 按定义 1.4，特别地取矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行［矩阵］与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列［矩阵］作乘积，有

$$(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{il})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{lj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}.$$

由此表明乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的$(i,\ j)$元为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积.

例 1.1　计算 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$.

解　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1\times6+2\times3+3\times(-7) & 1\times4+2\times(-5)+3\times8 \\ -2\times6+0\times3+1\times(-7) & -2\times4+0\times(-5)+1\times8 \\ 3\times6+4\times3+(-1)\times(-7) & 3\times4+4\times(-5)+(-1)\times8 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 18 \\ -19 & 0 \\ 37 & -16 \end{pmatrix}.$$

例 1.2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

解　$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

乘积 $\boldsymbol{AB}$ 存在时，要求 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等．很可能 $\boldsymbol{AB}$ 有意义而 $\boldsymbol{BA}$ 却没有意义．若 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，则它们必为方阵，但可能不同阶．即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 是同阶方阵，但也不一定相等(例 1.2)．总而言之，**矩阵的乘法不满足交换律**．在 $\boldsymbol{AB}$ 中，称用 $\boldsymbol{A}$ **左乘** $\boldsymbol{B}$，或称用 $\boldsymbol{B}$ **右乘** $\boldsymbol{A}$．

矩阵的乘法虽不满足交换律，但仍满足结合律和分配律．

乘法运算律　假设以下有关运算可行，则成立

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

(3) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$．

零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 与数 0 有类似的作用，容易验证

$$\boldsymbol{O}_{m\times l}\boldsymbol{A}_{l\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times l}\boldsymbol{O}_{l\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}.$$

而与数 1 有类似作用的是**单位［矩］阵**(identity matrix)

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

单位矩阵也记作 $\boldsymbol{E}$．容易验证

$$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

例 1.2 表明，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不能断言 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$．由此可知，矩阵的乘法不满足消去律：若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，也不能断言 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$．

利用矩阵的乘法，线性方程组(1.1)可简记作 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}.$$

而线性变换(1.2)可简记作 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$，其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

例 1.3 已知两个线性变换

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 - y_2 - 3y_3, \\ z_2 = y_2 + 2y_3, \\ z_3 = -y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 3x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1 + x_3, \\ y_3 = 3x_2, \end{cases}$$

求从 x_1，x_2，x_3 到 z_1，z_2，z_3 的线性变换.

解 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

所求为

$$\begin{cases} z_1 = -x_1 - 3x_2 - 3x_3, \\ z_2 = x_1 + 6x_2 + x_3, \\ z_3 = -3x_2. \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，由 k 个 $\boldsymbol{A}$ 组成的乘积 $\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}$，称为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂**，记作 $\boldsymbol{A}^k$. 规定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$.

方阵幂的性质 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l}$；$(\boldsymbol{A}^k)^l = \boldsymbol{A}^{kl}$.

例 1.4 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 先计算低次幂，观察是否有规律，有规律时，再归纳推算 n 次幂.

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

假设

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2k+2\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

因此

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

例 1.5　设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$，求 A^{2n+1}.

解　$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}=5I$,

$$A^{2n+1}=(A^2)^nA=5^nA=\begin{bmatrix}2\times 5^n & 5^n\\5^n & -2\times 5^n\end{bmatrix}.$$

例 1.6　设 A，B 为 n 阶方阵，试证

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$$

的充分必要条件是 $AB=BA$.

证明　由

$$(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2,$$

即得所证.

当 $AB=BA$ 时，称**矩阵 A 与矩阵 B 可交换**. 当 A 与 B 可交换时，成立

(1) $(AB)^n=A^nB^n$;

(2) $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1})$;

(3) $(A+B)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^rA^{n-r}B^r$.

以上各式可用归纳法证之，证明从略.

例 1.7　设 $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\0 & a & d\\0 & 0 & a\end{bmatrix}$，求 A^n.

解　矩阵 A 可写为 $A=aI+B$，其中

$$B=\begin{bmatrix}0 & b & c\\0 & 0 & d\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

对于矩阵 B 有

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&bd\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}(k\geqslant 3).$$

因$(a\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(a\boldsymbol{I})=a\boldsymbol{B}$，所以 $a\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r(a\boldsymbol{I})^{n-r}\boldsymbol{B}^r\\&=a^n\boldsymbol{I}+na^{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\boldsymbol{B}^2\\&=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b&na^{n-1}c+\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}bd\\0&a^n&na^{n-1}d\\0&0&a^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

注　此例中 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$，$a\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，且 $\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{O}$. 请不要随意地用该例中的方法计算方阵的幂. 一般而言，求方阵的幂，先计算低次幂，有规律可循时，再计算高次幂.

4. 矩阵的转置运算

定义 1.5　把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行作为相同序号的列，形成一个新的矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**(transposed matrix)，记作 $\boldsymbol{A}^T$.

设 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

按定义 1.5，显然有

矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ji})_{n\times m}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的转置矩阵的充分必要条件是

$$b_{ji}=a_{ij}(i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n).$$

转置运算的性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$；

(3) $(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T$；

(4) $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$，穿脱律.

现对性质（4）进行证明.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times l}$，$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{l\times n}$，记

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij}),\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{D}=(d_{ji}),$$

按矩阵的乘法运算知

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\ (i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n),$$

$$d_{ji}=b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{lj}a_{il}\ (i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n).$$

因此
$$d_{ji}=c_{ij}\ (i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n),$$

从而 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^T$，即 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{AB})^T$.

定义 1.6　设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，若 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称［矩］阵.

例 1.8　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

计算 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}&=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\\
&=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}\\
&=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+x_2(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)\\
&\quad+x_3(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\\
&=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.\end{aligned}$$

上述计算结果是变元 x_1，x_2，x_3 的一个二次齐次多项式，在线性代数课程中，称为变元 x_1，x_2，x_3 的二次型. 二次型与对称矩阵紧密相联，相关内容将在第四章中作进一步的介绍.

习　题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$.

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases}x_1=2y_1+y_2,\\ x_2=-2y_1+3y_2+2y_3,\\ x_3=4y_1+y_2+5y_3,\end{cases}\quad \begin{cases}y_1=-3z_1+z_2,\\ y_2=2z_1+z_3,\\ y_3=-z_2+3z_3,\end{cases}$$

求从 z_1，z_2，z_3 到 x_1，x_2，x_3 的线性变换.

3. 计算下列矩阵：

(1)$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n$；(2)$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$；(3)$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}^{2n+1}$.

5. 求与 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$可交换的所有矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

7. 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵. 证明任何方阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

8. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

9. 举反例说明下列命题是错误的：

(1)若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

(2)若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$；

(3)若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.