全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测100题

数学一

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100TI (SHUXUEYI)

主编　李永乐

2010

新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测100题

数学一

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100TI (SHUXUEYI)

主编　李永乐

编者：北京理工大学　王式安
北　京　大　学　刘西垣
北　京　大　学　李正元
清　华　大　学　李永乐
北京交通大学　赵达夫
（按姓氏笔画排序）

新　华　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

数学全程预测 100 题(数学一)/李永乐主编

北京:新华出版社,2009.8

全国硕士研究生入学考试用书

ISBN 978—7—5011—8883—3

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 134167 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

数学全程预测 100 题(数学一)

责任编辑:白云覃
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:新华出版社
网　　址:http://www.xinhuapub.com
地　　址:北京石景山区京原路 8 号
邮　　编:100040
经　　销:新华书店
印　　刷:北京云浩印刷有限责任公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:7.5
字　　数:177 千字
版　　次:2009 年 8 月第 1 版
印　　次:2009 年 8 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978—7—5011—8883—3
定　　价:12.00 元

本社购书热线:(010)63077122　　中国新闻书店电话:(010)63072012

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　　电话:(010)82570560

前　言

本书是硕士研究生入学考试强化训练阶段的复习用书。本书是针对考生在前一个阶段，对考研数学的常见题型、方法复习的基础上设计的重要练习题。它是《数学基础过关660题》的姊妹篇。旨在对考生在考前进行系统综合训练，以期巩固、提高复习成果，帮助考生查漏补缺，进而达到考试要求，增强应试能力，提高考试成绩。

我们在认真研究历年试题和新大纲的基础上，对考试的重点、难点以及对考生经常出现的错误加以剖析和归纳整理，用抓住基础、突出重点的方法，设计出不同解题思路层次的试题整合成书。本书**"解答"**——思路清晰、方法步骤详细、解题过程规范；**"评注"**——该题所考查的知识点(或命题意图)，解题思路归纳总结和延伸，常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，注意扩展考生视野和思路。

数学离不开计算，硕士研究生入学考试也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，要提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三落四，犯"低级"错误。

硕士研究生入学考试科目从2003年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了50%，因此数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要。同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历年来差别较大，这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此，希望考生要

根据考试大纲认真踏实、全面系统地复习，心态要平和，戒浮躁，要循序渐进，不断积累，步步提高，面对激烈的竞争，望有志者抓紧、抓细、抓早。

同学们在使用本书时，最好能先自己动手想与算，不要急于看解答。评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 8 月

目　录

高等数学

1 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}.$$

2 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-f(x)\tan x}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-f(x)}{x^2}$.

3 设函数 $f(x)$ 二次可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^3}\right)=3$，求 $f(0), f'(0)$ 与 $f''(0)$.

4 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

5 证明：$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1(n>1)$，在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0,\\ 1, \quad x=0.\end{cases}$ 求证：

(Ⅰ) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数；

(Ⅱ) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加；

(Ⅲ) $y=f(x)$ 的图像是 $(-\infty,+\infty)$ 上的凹弧.

7 证明不等式 $\dfrac{2x}{x+2}<\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ 对任何 $x>0$ 成立.

8 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}ax^3+\dfrac{1}{2}bx^2+2x$，求常数 a,b,c 使得 $f(x)$ 在 $x=-2$

取得极值,且 $x = c$ 是 $f(x)$ 的驻点而不是 $f(x)$ 的极值点.

9 证明:当 $x > 0, a > 0$ 时,$e^{-x}(x^2 - 2ax + 1) < 1$.

10 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内二阶可导,且 $f(a) = 0, f(b) > 0$,又知它在 $x = a$ 处的一阶右导数 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$.

求证:(Ⅰ)在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi) = 0$;

(Ⅱ)在(a,b)内至少存在一点 η,使 $f''(\eta) > 0$.

11 设 $f(x)$ 为非负连续函数,且 $f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = \sin^4 x$,求 $f(x)$ 在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的平均值.

12 计算 $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x\ln^2 x} - \frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$.

13 设 $f(x) = \lim\limits_{t \to \infty} t^2 \sin\dfrac{x}{t}\left[g\left(2x + \dfrac{1}{t}\right) - g(2x)\right]$,$g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$,计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

14 (Ⅰ)求证:若 $f(x)$ 是$[-a,a]$上的连续偶函数,则 $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ)计算定积分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)(1+x^2)}$.

15 求 $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\arcsin x)^n \mathrm{d}x, n = 0,1,2\cdots$

16 计算反常积分:

(Ⅰ)$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(e^x - 2)\mathrm{d}x}{e^{2x} + e^x + 1}$;

(Ⅱ)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\tan x} + \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\right)\mathrm{d}x$.

17 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有连续的导函数,求证:

$$\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

18 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且满足 $f(0)f'(0)\geqslant 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 求证：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(\xi,+\infty)$，使得 $f''(\eta)=0$.

19 已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0)$，$B(3,0)$.

（Ⅰ）求证：两坐标轴与该抛物线所围成的面积等于 x 轴与该抛物线所围成的面积；

（Ⅱ）计算上述两个平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比.

20 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

21 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

（Ⅰ）求 $f'(x)$；

（Ⅱ）证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

22 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+(f'(x))^2=2\sin x$，试讨论 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可能取得极值或拐点，并说明理由.

23 设函数 $y(x)$，满足

$$\begin{cases} y'(x)+3\int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t+2x\int_0^1 y(tx)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

试求函数 $y(x)$.

24 设 $u=u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，试利用线性变换 $\xi=x+ay$，$\eta=x+by$ 将方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，求 a,b.

25 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. 当 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ 时满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (*)$$

与 $f(1)=f'(1)=1$，求函数 $f(r)$ 的表达式.

26 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f(0,0)=1, f'_x(0,0)=2$, $f'_y(0,y)=-3$ 以及 $f''_{xx}(x,y)=y, f''_{xy}(x,y)=x+y, f''_{yy}(x,y)=x$，求函数 $f(x,y)$ 的表达式.

27 求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=6$ 上的点与坐标原点 $O(0,0)$ 距离的最大值与最小值.

28 计算二重积分 $\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，函数 $f(x,y)=z(\sqrt{x^2+y^2})$，且函数 $z(r)$ 当 $r\geqslant 0$ 时具有二阶连续导数，并满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

29 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_S(x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中曲面块 S 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 满足 $z\leqslant 1$ 那一部分的内侧.

30 计算曲线积分

$$I=\oint\limits_L(y-z^2)\mathrm{d}x+(z-x^2)\mathrm{d}y+(x-y^2)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与平面 $x+z=2$ 的交线，从 z 轴的正向往负向看去，L 的方向沿逆时针方向。

31 设 Ω 是由曲面 $z=8-x^2-y^2$ 与平面 $z=2x$ 围成的空间区域，求 Ω 的体积 V.

32 设 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t+\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以 $(-1,$

$-1)$,$(1,-1)$ 和$(1,1)$ 为顶点的三角形区域,且 $f(1)=0$,求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

33 设 $f(x)$ 是$[0,1]$上单调递减的正值函数,证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

34 试证抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 上任意点处的切平面与抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围的立体的体积与切点坐标无关.

35 计算$\iiint\limits_{\Omega} |\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1|\,\mathrm{d}V$,其中$\Omega$是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围成的立体.

36 曲线积分

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,$$

其中 AmB 为连接点 $A(1,1)$,$B(2,6)$ 的直线段,AnB 为过 A,B 点及坐标原点的抛物线孤.求 I_1-I_2.

37 计算曲线积分

$$\int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

其中,L 是以$(1,0)$ 为圆心,2 为半径的圆的上半圆周,方向是沿逆时针方向.

38 选取 a 与 b,使得

$$\frac{ax+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

成为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求 $u(x,y)$.

39 设 $f(x)$ 是正值连续函数,D 为圆心在原点的单位圆域,∂D 为 D 的正向边界.

证明:(Ⅰ)$\oint\limits_{\partial D} xf(y)\mathrm{d}y-\dfrac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\oint\limits_{\partial D}-yf(x)\mathrm{d}x+\dfrac{x}{f(y)}\mathrm{d}y$;

(Ⅱ)$\oint\limits_{\partial D} xf(y)\mathrm{d}y-\dfrac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi$.

40 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{S_1+S_2} xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S_1 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上 $x\geqslant 0$ 及 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分,并取前侧;S_2 为 xoy 平面上的半圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0$,取下侧.

41 判断下列正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性:

(Ⅰ)$a_n=n\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}-1,n=1,2,\cdots$

(Ⅱ)$a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^p$,常数 $p>0,n=1,2,\cdots$

42 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 求证:

(Ⅰ)数列$\{a_n\}$满足 $a_0=a_1=1,a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=0,1,2,\cdots)$;

(Ⅱ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛.

43 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,且当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时,$f(x)=\left(\dfrac{\pi-x}{2}\right)^2$,求 $f(x)$ 的傅里叶级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

44 求下列微分方程的通解或满足定解条件的特解:

(Ⅰ)$yy''-(y')^2=y^2\ln y,y(0)=1,y'(0)=-1$;

(Ⅱ)$x^2y''+2xy'+y=3x\ln x$.

45 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛域及和函数.

46 设 $f(x)=\begin{cases} A, & x=0, \\ \dfrac{\int_0^{x^2}(2+t^2)e^{t^2}\,dt}{x^2}, & x\neq 0. \end{cases}$

(Ⅰ) 确定 A,使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有任意阶导数;

(Ⅱ) 求 $f^{(8)}(0)$,$f^{(9)}(0)$.

47 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$ 的和.

48 设 $f(x)$ 具有二阶的连续导数,且满足方程 $f'(x)=f(1-x)$.

(Ⅰ) 写出 $f(x)$ 满足的二阶微分方程;

(Ⅱ) 求出满足 $f'(x)=f(1-x)$ 的全部可导函数 $f(x)$.

49 设函数 $f(x)$,$g(x)$ 具有二阶连续导数,又曲线积分

$$\oint_L[y^2f(x)+2ye^x+2yg(x)]dx+2[yg(x)+f(x)]dy=0$$

其中 L 为平面上任意简单封闭曲线.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 和 $g(x)$,使 $f(0)=g(0)=0$;

(Ⅱ) 计算沿任意一条曲线从 $(0,0)$ 点到 $(1,1)$ 点上的积分.

50 设 $f(t)$ 在 $[1,+\infty]$ 上有连续的二阶导数,且 $f(1)=0$,$f'(1)=1$,$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

求 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

线性代数

51 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$

(Ⅰ) 证明:$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵;

(Ⅱ) 证明:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

(Ⅲ) 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

52 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶反对称矩阵

(Ⅰ) 证明:对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,恒有 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$;

(Ⅱ) 证明:对任何非零实数 k,恒有 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵;

(Ⅲ) 证明:若 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是可逆矩阵,n 必是偶数.

53 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & a & 3\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 等价.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

54 已知两个向量组

(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,3)^T$;

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-3,6,-1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(a,0,b,2)^T$

等价,求 a,b 的值,并写出等价时的线性表达式.

55 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,a,7)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,5,3,a+11)^T$ 线性相关,而且向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,0,2,b)^T$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

(Ⅰ) 求 a,b 的值;

(Ⅱ) 试将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出;

(Ⅲ) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.并将向量组中其余向量用该极大线性无关组线性表出.

56 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是三维向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，证明存在非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出.

当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 时，求出所有的向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

57 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，试讨论向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 的线性相关性.

58 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}$ 是任意一个 n 维向量.

（Ⅰ）证明存在不全为0的 k_1,k_2,k_3 使得向量组 $k_1\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,k_3\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3$ 仍线性相关；

（Ⅱ）当 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-3,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(5,1,-1,7)^T$ 时，求出所需要的 k_1,k_2,k_3.

59 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是三阶矩阵，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数）且满足 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

60 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=3\\x_2+x_3-x_4=-1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+3x_4=b+5\\4x_1+4x_3+(a+6)x_4=16\end{cases}$$

讨论参数 a,b 取何值时，方程组无解、有解；当方程组有解时求出其所有的解.

61 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是四阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维列向量，若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是 $(1,2,2,1)^T+k(1,-2,4,0)^T$，又 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$，求方程组 $\boldsymbol{Bx}=3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 的通解.

62 已知方程组(1)$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\\x_2+ax_3-ax_4=0\\x_1+2x_2+3x_4=0\end{cases}$ 与(2)$\begin{cases}x_1+bx_2-2x_3+5x_4=0\\3x_1+7x_2+cx_3+7x_4=0\end{cases}$ 同解

(Ⅰ)求 a,b,c 的值;

(Ⅱ)求方程组满足 $x_1=x_2$ 的全部解.

63 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置,$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量

证明:(Ⅰ)齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解;

(Ⅱ)秩 $r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})$.

64 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,特征向量;

(Ⅱ)求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

65 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T$,其中 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^T$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^T$,且 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆,并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(Ⅲ)求行列式 $|\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}|$ 的值.

66 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\a&2&a\\1&3&3\end{pmatrix}$ 的特征值有重根.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅲ)判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化,并说明理由.

67 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&2\\a&2&a\\-1&1&1\end{pmatrix}$ 可逆,向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征向量,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$.

68 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&2&3\\0&0&a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&b&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ 相似，求 a 与 b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

69 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\4&3&0\\2&b&5\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=5$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，$\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

70 设 $\boldsymbol{A}$ 是各行元素之和均为 0 的 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 是线性无关的 3 维列向量，并满足 $\boldsymbol{A\alpha}=3\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{A\beta}=3\boldsymbol{\alpha}$.

（Ⅰ）证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和对角矩阵相似；

（Ⅱ）如 $\boldsymbol{\alpha}=(0,-1,1)^{T}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,-1)^{T}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

（Ⅲ）用正交变换化二次型 $\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形，并写出所用正交变换.

71 已知二次型 $\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3\,(a<0)$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{py}$ 化二次型为标准形，并写出所用坐标变换；

（Ⅲ）如果 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵，求 k 的值.

72 设 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+2b(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n)$ 其中 $a>0$，$b\neq 0$.

（Ⅰ）若二次型 $\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，求 a，b 的值；

（Ⅱ）当 $n=3$ 时，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 把二次型 $\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形；

（Ⅲ）若 $a=1$，$b=2$ 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

73 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2-5x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3$

（Ⅰ）求坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{cy}$ 化此二次型为规范形；

（Ⅱ）如果 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&\\&-9&\\&&-16\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$；