奇妙的方格

奇妙的方格

邵龙章　黄荣基 编著

上海科技教育出版社

(沪)新登字116号

奇妙的方格

邵龙章　黄荣基　编著

上海科技教育出版社出版发行
(上海冠生园路393号)
各地新华书店经销　宜兴第二印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张4　字数88000
1994年1月第1版　1994年1月第1次印刷
印数1—2200
ISBN7-5428-0736-6
G·693
定价:2.40元

目　　录

一、国际象棋盘上的长方形数

1．有多少正方形？

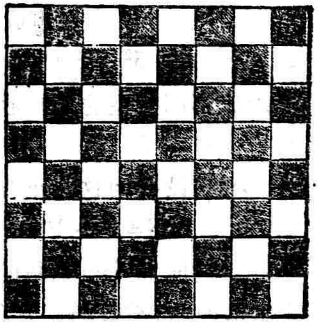

图 1-1

图 1-1 的国际象棋盘是由64个小方格组成的．要数其中有多少个不同类型的正方形，那么就应使用分类计数法．容易看出，面积为 1 的正方形有64个，即8^2个；而面积为 4 的正方形的个数是多少呢？我们可用这样的计数方法：先计算第一、第二行面积为 4 的正方形的个数（7 个），图 1-2 中的网格部分是其中两个的公共部分．

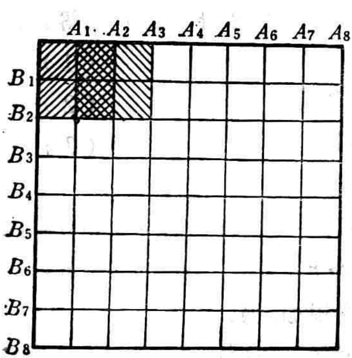

图 1-2

接着在第二、第三行，第三、第四行等，也都与第一、第二行相同，故面积为 4 的正方形的个数共有7^2个．

现在计算面积为 9 的正方形个数．参照上法，应有6^2个．即第一、二、三行，有 6 个；第二、三、四行，第三、四、五行等也一样．可见，面积为16的正方形个数为5^2个；用类似的方法

可得面积为25的正方形个数为4^2个；面积为36的正方形个数为3^2个；面积为49的正方形个数为2^2个；面积为64的正方形个数为1^2个.

故，国际象棋盘上共有正方形的个数为：

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2\\&=1+4+9+16+25+36+49+64\\&=204.\end{aligned}$$

由8^2个小正方形组成不同类型的正方形的个数是：$(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2)$个正方形.那么，由 n^2 个小正方形组成不同类型的正方形应有多少个呢？有头脑的学生，一定会得出：$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$个的结论.

现在设 S 为这些正方形个数的和，那么，

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2.$$

这是前 n 个自然数的平方和. 对此可进行推导，得出一个求前n项自然数的平方和的公式.

$\because \quad (n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$

$\therefore \quad (n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

若 n 分别取$1,2,3,\cdots,(n-1),n$，可得下面 n 个等式，

即：$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$ （1）

$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$ （2）

$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$ （3）

……………………

$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1$ $(n-1)$

$(n+1)^3-n^3=3n^2+3\cdot n+1$ (n)

我们将以上 n 个等式左右分别相加，得：

$$\begin{aligned}(n+1)^3-1=&3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\&+3(1+2+\cdots+n)+n\end{aligned}$$

$$\therefore \quad 3(1^2+2^2+\cdots+n^2)=(n+1)^3-3(1+2+\cdots+n) -(n+1).$$

容易证明：

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad 3(1^2+2^2+\cdots+n^2)&=(n+1)^2-\frac{3n(1+n)}{2}\\&\quad-(n+1)\\&=\frac{(n+1)}{2}(2n^2+n)\\&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \qquad (*)$$

用公式(*)来计算国际象棋盘上有多少个正方形就更方便了.即把 $n=8$代入(*)，得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)&=\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17=4\times 3\times 17\\&=204(\text{个}).\end{aligned}$$

在围棋盘中，$n=18$，代入公式(*)，可得围棋盘中正方形的个数为：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\times 18\times(18+1)\times(2\times 18+1)\\&=3\times 19\times 37\\&=2109(\text{个}).\end{aligned}$$

在中国象棋盘中，如果不包括河界，$n=8$，这与国际象棋盘所含的小方格数相同，也是204个.

2. 有多少长方形？

现在我们来研究国际象棋盘上有多少个长方形（包括正方形）.

计算长方形比计算正方形复杂一些，但它和计算正方形一样，只要分类计数得法，也是能很快计算出来的.

为了使读者掌握这种分类计数的方法，我们先对由3×3个小方格组成的图形中包含的各种长方形个数进行计算.

我们是这样分类计数的：

（1）正方形是特殊的长方形，所以在长方形中包括$(1^2+2^2+3^2)$个正方形；

（2）计算面积为1×2的长方形个数$(1\times2=2\times1)$（见图1-3）.

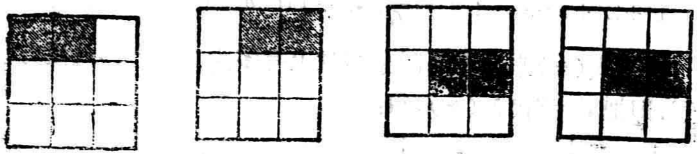

图 1-3

这样的长方形每一行有2个，因为有三行，所以面积为(1×2)的长方形有(2×3)个；而每一列也有面积为(1×2)的长方形2个，所以三列共有(2×3)个. 因此，面积为(1×2)的长方形个数为：$2\times2\times3=2^2\times3$(个).

通过上述的计数方法，易得下面两个结论：

(1) 面积为1×3的长方形的个数是：2×3个；

(2) 面积为2×3的长方形的个数是：2×2个.

因此，由3×3个小方格组成的长方形的总数为：

$$\begin{aligned}S_3&=1^2+2^2+3^2+2^2\times3+2\times3+2^2\\&=1^2+(2^2+2^2)+(3^2+2^2\times3+2\times3)\\&=1^2+2\cdot2^2+3\cdot3^2\\&=1^3+2^3+3^3=36.\end{aligned}$$

以此类推，读者自己可以推得由4×4个小方格组成的图中，包含有长方形的个数为：

$$S_4=1^3+2^3+3^3+4^3=100.$$

根据归纳思想，由$n\times n$个小方格组成的图形中含有长方形的个数为：

$$S_n=1^3+2^3+\cdots\cdots+(n-1)^3+n^3.$$

我们对此公式来加以说明：

(1) $n\times n$个小方格组成的图形中，含有正方形的个数为：$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2$；

(2) 边长为1×2的长方形个数为：1°每一行有$(n-1)$个面积为(1×2)的长方形；2°因为有n行，所以有$n(n-1)$个面积为(1×2)的长方形；3°n列的个数与n行相同，故共有面积为(1×2)的长方形总数为：$2n(n-1)$；

(3) 边长为1×3的长方形个数为：1°每一行有$(n-2)$个面积为(1×3)的长方形；2°因为有n行，所以有$n(n-2)$个面积为(1×3)的长方形；3°n列的个数与n行相同，故共有面积为(1×3)的长方形总数为：$2n(n-2)$；

从而可推得下面的结论：

(4) 1×4的长方形个数为：$2n(n-3)$；

……………………………

(5) $1\times n$的长方形个数为：$2n$；

(6) 边长为2×3的长方形个数为：1°第一、第二两行有这样面积的长方形为$(n-2)$个；2°同样，第二、第三两行，第

三、第四两行，……，第$(n-1)$、第n两行也各有$(n-2)$个面积为(2×3)的长方形.因为有n行，所以有$(n-1)(n-2)$个面积为(2×3)的长方形. 3°n列的个数与n行相同，故共有面积为(2×3)的长方形个数为：$2(n-1)(n-2)$个；

类似地，面积为2×4的长方形个数为：$2(n-1)(n-3)$；

面积为2×5的长方形个数为：$2(n-1)(n-4)$；

…………………………

面积为$2\times n$的长方形个数为：$2(n-1)$；

(7)面积为3×4的长方形个数为：$2(n-2)(n-3)$；

3×5的长方形个数为：$2(n-2)(n-4)$；

…………………………

$3\times n$的长方形个数为：$2(n-2)$；

…………………………

(8)面积为$(n-1)\times n$的长方形个数为：2×2.

若设面积为(1×2)、(1×3)、……、$(1\times n)$的长方形个数为S_1，则：

$$S_1=2n(n-1)+2n(n-2)+\cdots\cdots+2n$$

$$=2n\cdot\frac{(n-1)+(n-1+1)}{2}$$

$$=n^2(n-1);$$

同样，面积为(2×3)、(2×4)、……、$(2\times n)$的长方形总数为S_2，则

$$S_2=2(n-1)(n-2)+2(n-1)(n-3)+\cdots\cdots+2(n-1)$$

$$=2(n-1)\cdot\frac{(n-2)(n-2+1)}{2}$$

$$=(n-1)^2(n-2);$$

面积为(3×4)、(3×5)、……、$(3\times n)$的长方形总数为

S_3，则：

$$S_3=(n-2)^2(n-3);$$

……………………………

面积为 $(n-1)\times n$ 的长方形总数为 S_{n-1}，则

$$S_{n-1}=2^2.$$

这样，由 $n\times n$ 个小方格组成的图形中，含有不同类型的长方形总数为：

$$\begin{aligned}S&=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}\\&=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+n^2(n-1)+(n-1)^2(n-2)\\&\quad+\cdots\cdots+2^2\\&=1^2+(2^2+2^2)+\cdots\cdots+[(n-1)^2+(n-1)^2(n-2)]+[n^2+n^2(n-1)]\\&=1^3+2^3+\cdots\cdots+(n-1)^3+n^3.\end{aligned}$$

$1^3+2^3+\cdots\cdots+(n-1)^3+n^3$ 称为自然数的立方和，它等于 $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

这公式可用排列组合知识解决。由 $n\times n$ 个小方格组成的图形中含有的不同类型的长方形数，可理解为从 $(n+1)$ 条横线中任取其中的两条与 $(n+1)$ 条竖线中任取两条所围成的图形个数。图 1-4 就是其中一例，它由横线 a_1、a_2 与纵线 b_1、b_2 围成。

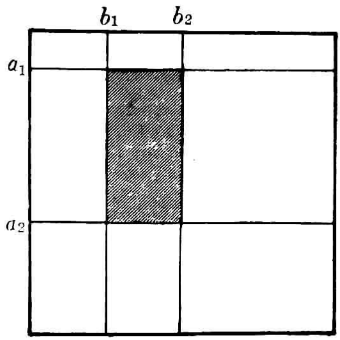

图 1-4

根据组合数的运算：

$$S=C_{n+1}^2\cdot C_{n+1}^2$$

$$=\left[\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

由于前面已详细介绍了分类计数法，故下面我们从组合数着手，给出由 $m\times n$ 个小方格组成的图形中含有的长方形数的公式：

$$S_{m\times n}=C_{m+1}^2\cdot C_{n+1}^2$$

$$=\frac{(m+1)m}{2}\cdot\frac{(n+1)n}{2}$$

$$=\frac{1}{4}mn(m+1)(n+1).$$

中国象棋界河之半是4×8个小方格组成的图形，它里面含有的长方形数为：

$$S_{4\times 8}=\frac{1}{4}\times 4\times 8\times 5\times 9=360(\text{个}).$$

二、方格纸的妙用(一)

这一节我们讲一些方格纸的用途，方格纸可应用在对阵、集合论、格点多边形、概率等数学分支．总之，方格纸的妙用可多啦！

1．对　阵

初三(1)班与(2)班举行乒乓球对抗赛．每班出3人，均穿红、黄、蓝三种颜色球衣．已知一次对阵中(1)班穿红球衣的运动员对(2)班穿黄球衣的运动员，而且没有同一色球衣的运动员对阵，你能根据这些情况，列出这次对阵两个班级运动员出场的情况吗？

初看起来，上述提出的对阵逻辑不太好理解，但如果我们能借助方格，把它列成方阵，分类加以考虑，这个问题就变得简单了(如图2-1)．

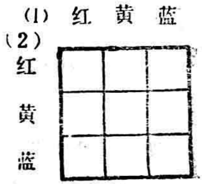

图 2-1

我们知道，(1)班、(2)班运动员可能对阵有3×3=9种．由于同一种颜色球衣的运动员不可能对阵，这样就排除了三种可能性．我们在方格上涂上阴影线，以表示不对阵(如图2-2)．

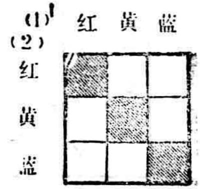

图 2-2

因为(1)班穿红球衣的运动员与(2)班穿黄球衣的运动员对阵，我们就可在这一格上打一个“√”．而有“√”的这一行和

这一列就不可能打再“√”了，故其余两格也只能涂上阴影线（如图 2-3）.

这样，在第三行与第三列中均只有一个空格，当然应打上“√”(如图 2-4).最后一个空格显然应打上阴影线(如图 2-5).这样，

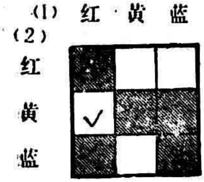

图 2-3

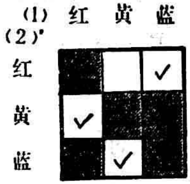

图 2-4

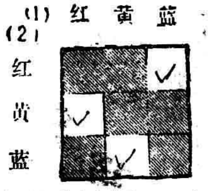

图 2-5

（1）班穿红球衣的运动员与（2）班穿黄球衣的运动员对阵；

（1）班穿黄球衣的运动员与（2）班穿蓝球衣的运动员对阵；

（1）班穿蓝球衣的运动员与（2）班穿红球衣的运动员对阵.

如果（1）班与（2）班的运动员各出四人对阵，均穿红、黄、蓝、白四种颜色运动衣．已知（1）班穿红球衣的运动员与（2）班穿黄球衣的运动员对阵；（1）班穿黄球衣的运动员与（2）班穿白球衣的运动员对阵．而且没有穿同一颜色的运动员相对阵.根据这些，你能列出它们的对阵表吗？

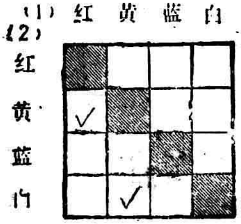

图 2-6

仿照上法，画方格对阵表（图 2-6).

把第二行、第四行、第一列、第二列其余各空格均涂上阴影线(图 2-7).

由图 2-7知，第三列第一格应为“√”；第三行最后一格必为“√”(见图 2-8).

最后可得对阵表(图 2-9).

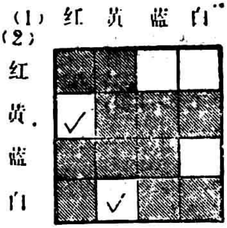

图 2-7

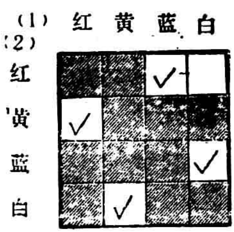

图 2-8

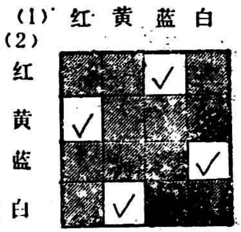

图 2-9

这一类问题可推广到 n 个人对阵. 问题是已知条件要增加，就像上面四人对阵要比三人对阵增加一个已知条件一样.

2. 记分册在这里

初三(2)班的象棋决赛又将来临，班级体育委员小强准备把去年 5 名棋手决赛的成绩公布出来，以供参考. 但去年决赛的记分册不见了，大家凑在一起，只回忆起这么一点情况：

5 名象棋手进行循环比赛，每两人只比赛一盘，每盘比赛中胜者得 1 分，负者得 0 分，平盘各得$\frac{1}{2}$分. 已知各人所得的总分互不相同，并且：

1）获得第一名的棋手没有平过一盘；

2）获得第二名的棋手没有负过一盘；

3）获得第四名的棋手没有胜过一盘.

“有了！”正当大家无可奈何时，小明高兴地说.

“记分册在哪里？”大家异口同声地问.

“在这里！”小明指了指头脑，于是就给大家说开了：

由于第二名没有负于第一名，第一名又没有下过平盘，故第一名负于第二名.因为每人只有四盘比赛，所以第一名的总分不多于 3 分.另一方面，第二名胜了第一名，他的另外三盘又没有负盘，所以第二名的总分不少于$2\frac{1}{2}$分.由于第一名的总分又必定多于第二名的总分，从而得知第一名的总分只能是 3 分，第二名的总分只能是$2\frac{1}{2}$分.因此，他们每盘比赛的结果马上可以确定，如图 2-10所示.

	1	2	3	4	5	总分
1		0	1	1	1	3
2	1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
3	0					
4	0					
5	0					

图 2-10

因为各人所得总分彼此不同，所以第三名、第四名、第五名的总分最多可能是 2 分、$1\frac{1}{2}$分和 1 分.

实际上，5 个人共要比赛十场，各人所得总分之和应为10分；第一名与第二名的总分和已有5.5分，故其余三人总分之和应是：

10－5.5＝4.5(分).

如果第三名、第四名和第五名中有一人的总分少于各自的最高可能总分，则他们三人的总分之和必小于2＋1.5＋1＝4.5分，产生矛盾，故不可能.因为第四名没有胜盘，但又要得$1\frac{1}{2}$

	1	2	3	4	5	总分
1		0	1	1	1	3
2	1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1	2
4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
5	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		1

图 2-11

分，故他与第三名和第五名下成平盘．剩下的第三名显然要胜第五名．

图2-11就是去年比赛的记分表．

3．90分以上有几个？

高二（1）班有42个同学参加数、理、化统测．得90分以上的同学，数学35人，物理22人，化学29人，其中有10人数、理、化成绩都在90分以上，5个同学数学、物理两门获得90分以上，5个同学物理、化学两门获90分以上．问有多少同学数学、化学两门都获90分以上？

因为42个同学中，有10个同学数、理、化都在90分以上，故可把这10个同学去掉后考虑，剩下的32个同学中，数学获得90分以上的有25人，物理12人，化学19人，但没有一个同学数、理、化三门都在90分以上．又已知5个同学数学、物理两门都在90分以上，另外5个同学物理、化学两门都在90分以上，我们可以采用方格剪贴法算出数学、化学两门都在90分以上的同学人数．方法如下：

1)用25个小方格表示数学统测90分以上的人数（如图2-12）；

用12个小方格表示物理统测90分以上的人数（如图2-13）；

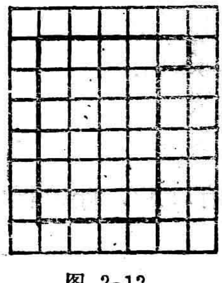

图 2-12

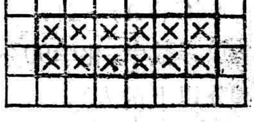

图 2-13