高等农业院校試用教材

# 高等数学

北京农业大学編

农学类各专业用

农业出版社

高等农业院校試用教材

# 高 等 数 学

北京农业大学編

农学类各专业用

农 业 出 版 社

高等农业院校試用教材

**高 等 数 学**

北京农业大学編

---

农业出版社出版

北京老錢局一号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 106 号

新华书店科技发行所发行　各地新华书店經售

农业出版社印刷厂印刷

統一书号：13144·69

---

| | |
|---|---|
| 1961 年 8 月北京制型 | 开本 787×1092 毫米 十六分之一 |
| 1961 年 9 月初版 | 字数 341 千字 |
| 1961 年 9 月北京第一次印刷 | 印张 十五 |
| 印数：1—13,240 | 定价：(9) 一元四角 |

# 目　录

# 緒　論

## 1. 数学研究的对象、数学与生产实践及其发展

无論在中学里学的初等数学(主要是代数、三角、几何等)，还是現在学习的高等数学(主要是解析几何、微分学、积分学、微分方程等)，它們研究的对象是什么呢？这个問題可以引用恩格斯的一句話："純数学是以現实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常現实的資料——为对象的"①。这就是說数学是一門研究現实世界中的空間形状和数量关系的学科。恩格斯的这个深刻而又簡明的話，我們可以認为是給数学的最精辟的定义。

一切科学的发展都是和生产实践分不开的。数学也不例外，它的发生和发展也是和生产实践有着密切联系的，恩格斯曾指出："和其他所有科学一样，数学是从人們的实际需要上产生的：是从丈量地段面积和衡量器物容积，从計算时間，从制造工作中产生的"②，并且随着生产实践的发展而不断丰富和发展。因此，唯心主义者把数学認为是人头脑中凭空想出来的，这完全是錯誤的，例如我国最早的算书周髀算經九章算术所談到的內容无一不是和当时的生产实践有密切联系的。整个数学的发展也証明了这个問題。例如算术就是由于均匀負担，粮食交易，劳役分配計算而产生的，由于丈量田地界域，計算河堤土方，仓庫容积等就产生了几何学。三角学的产生和发展也是和农业生产对历书的需要和航海术的发展有关，代数也是由于商业交易发展的需要而逐步形成的。

初等数学发展比較早，初等几何整个系統除了极少部分外，在公元前五一三世紀就已形成，代数作为一門科学来說，它的形成大約在公元后八世紀。三角学的产生也是比較早的，但作为三角函数及其属性的概念直到十六一十七世紀才完成。

十七世紀以后，由于工业生产和自然科学的发展，給数学提出了許多新的問題，而这些問題的解决，旧有的数学方法已經不够用，需要用完全新的观点和方法，于是就逐漸产生并形成了高等数学。

十九世紀以后，特别是近二、三十年来，由于工农业生产和科学技术的飞速发展，特别是原子能、无綫电技术、自动控制、宇宙航行等的发展，要求数学提供更精确的理論和工具，这样就进一步为数学的发展开辟了新的源泉，使整个高等数学內容更加丰富，許多新的分支迅速的成长起来，如計算数学、規划論、概率統計、信息論等等。

数学不仅来源于实践，而且数学知識，是否是眞理还有待于回到实践中去检驗并为生产

① 恩格斯："反杜林論"，人民出版社 1956 年版 37 頁。
② 恩格斯："反杜林論"，人民出版社 1956 年版 38 頁。

实践服务，推动生产的发展，正如毛主席教导我們的："通过实践而发現眞理，又通过实践而証实眞理和发展眞理。从感性認識而能动地发展到理性認識，又从理性認識而能动地指导革命实践，改造主观世界和客观世界"①。数学的发生发展，数学与实践的关系也完全是如此。

## 2. 初等数学与高等数学，数学的特点

初等数学研究的主要对象是常量，如图形的面积、体积、方程的根等等，而研究的方法則主要从静止的观点去研究客观世界，但客观世界的各种現象都是在不断运动、不断变化、互相制約、互相联系着的。因此，要更深一步的研究客观世界的数量关系和空間形式就必須用新的观点即运动的观点来研究客观事物的量的变化和它們之間的关系。高等数学正是这样形成并发展起来的，它研究的对象是以变量(可变化的量)和变量間的依从关系（函数关系）为主。因此，初等数学发展到高等数学乃是数学发展的一个飞跃，只有高等数学才比初等数学更深刻更全面的研究客观世界的量的规律，数学中引进变量乃是数学史上一件大事，恩格斯曾写道："……变数是数学的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学"②。并且說："只有微分学才能使自然科学有可能用数学来表明状态，并且也表明过程，即运动"③。同时也要注意，在研究变量变化过程的时候有时也把它固定在某一时刻看成常量，用常量的方法去研究。另外在研究常量时有时把它看成取同一値的变量去研究，因此，初等数学与高等数学不能截然分开。

高度的抽象性和应用的一般性广泛性是数学概念的突出特点。但是这种抽象，是由現实世界具体事物抽象而来，并不是唯心主义者所認为的：是純粹主观世界的产物，即头脑凭空想出来的东西。数学的抽象形式只能表面上掩盖它来源于現实世界的实質，实际上它是非常現实的东西。例如：两担小麦加三担小麦等于五担小麦，二头牛加三头牛等于五头牛。我們撇开这些具体的小麦和牛的具体內容經过抽象思維以后，就得到一般的抽象的数学运算：$2+3=5$。恩格斯曾說过："数和形的概念不是从任何地方得来，而仅仅是从現实世界中得来的"。"和数的概念一样，形的概念也完全是从外面世界得来的，而不是在头脑中从純粹的思維中产生出来的。要能达到形的概念，先应当存在具有一定形状的物体，而且应把这些形状拿来比較"④。为了在純粹的状态下研究現实世界的空間形式和数量关系，这种抽象是完全必要的，列宁曾說过："一切科学的(正确的、郑重的、不是胡謅的)抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着現实。从生动的直观到抽象的思維，从思維到实践——这就是認識眞理、認識現实的辯証法道路"⑤。

① 毛泽东选集：第一卷，人民出版社 1951 年版 285 頁。
② 恩格斯："自然辯証法"，人民出版社 1960 年版 217 頁。
③ 恩格斯："自然辯証法"，人民出版社 1960 年版 229 頁。
④ 恩格斯："反杜林論"，人民出版社 1956 年版 37 頁。
⑤ 列宁："黑格尔'邏輯学'一书摘要"，人民出版社 1956 年版 134 頁。

正因为数学的高度抽象性而显現它应用的一般性广泛性，許多数学的定理和公式可以用来研究各种具体的量同样获得成功。例如同一个数学关系式 $y=\frac{1}{2}ax^2$，当把 $x$ 看成时間 $t$，$a$ 看成重力加速度 $g$，$y$ 考虑为距离时，这个式子就变成 $s=\frac{1}{2}gt^2$，这是自由落体下落的路程与时間的关系式；如果把 $x$ 看成物体运动的速度 $v$，$a$ 看成是物体的質量 $m$，$y$ 看成能量 $E$，则上式变成 $E=\frac{1}{2}mv^2$，这是物体的能量与运动速度的关系式；当把 $x$ 看成是电流強度 $I$，$a$ 看成是导綫的电阻 $R$，而 $y$ 代表电流通过时单位时間所产生的热量 $Q$，則又得到式子 $Q=\frac{1}{2}RI^2$，这是电子学上电流通过导綫，电流強度和产生热量的关系。这个例子說明了同一数量規律常常普遍存在于各种物質形态和各种运动形式之中。这也反映了物質世界的同一性，正因为数学是来自現实世界，反映現实世界的客观規律性，因此也表現它另一特点即数学的預見性，如在海王星发現以前，人們就已經从天文計算中預見了它的存在，利用数理統計和偏微分方程的計算，可以进行中长期天气預报，苏联在 1961 年 4 月 12 日第一次实現載人宇宙飞船按指定地点、时間着陆，开辟了人类宇宙航行的新紀元，这也是和数学精密計算的預見性分不开的。

### 3. 我国数学发展簡况，学习高等数学的任务

我們伟大的祖国，有着悠久的文化，古代生产发展比較早，因此数学在我国的发展也是比較早的，有很多貢献，并一直为农业生产服务，例如在公元前一千多年就有了勾股定理的知識，并在农田水利中应用，公元前三一二世紀时就編著了“九章算术”一书，其中就講到田地面积和筑城、建堤、挖沟、修渠等体积的几何計算問題，粮食交易、賦税、运輸、均匀負担等的百分比，配分比例，分数四則等的計算問題，以及开平方、开立方、某些問題的近似計算，方程和联立方程的解法等等，书中記載和解决的問題都是和当时农业生产实践以及社会生活有极密切的联系。

关于圓周率 $\pi$ 的計算在公元四世紀前后，我国就有了极精确的研究，三国时刘徽就已算得 $\pi=3.1416$，南北朝时大数学家祖冲之，曾算得 $\pi$ 介于 3.1415926 及 3.1415927 之間，并把 $\frac{355}{113}$ 和 $\frac{22}{7}$ 叫做圓周率的密率和約率，并确認 $\pi=3.14159265$，在欧洲直到十六世紀德国人喔托才算得此数，比祖冲之晚了一千一百多年。

在代数方面关于方程的解法，特别是高次方程近似根的求法，賈宪和秦九韶的貢献較英国人忽那氏得到同一方法早了五百多年。此外，如二項式定理、同余式計算等发現也都比欧洲人为早。

我国古代数学发展是較早的，劳动人民对数学的貢献也是极多的，但由于长期的封建統治，生产力的发展长期停滞不前，因之数学的发展受到很大限制。近百年来由于帝国主义、封建主义和官僚資本主义的反动統治，生产力得不到发展，数学发展也受到了严重的阻碍。

解放以后，在党和毛主席的英明領导下，在优越的社会主义制度下，我国工农业生产都有了飞速的发展，这样就为我国数学以及一切科学的发展奠定了物質基础，使数学在中国的

发展开始了新的紀元。特别是一九五八年大跃进以来，在总路綫、大跃进、人民公社三面紅旗的光輝照耀下，全国掀起了轰轰烈烈的技术革新、技术革命运动，广大数学工作者經过党的教育方針和毛泽东思想的学习，进一步貫徹了理論联系实际的方針，紛紛深入工农业生产实践与广大工农羣众相結合，大搞羣众运动，运用数学工具，直接为我国社会主义建設服务，使我国数学的发展出現了蓬蓬勃勃的嶄新局面。許多解放前还是空白或薄弱的部分，如計算数学、微分方程、概率統計、运筹学等等，几年来都有了很大的发展，并且直接为我国社会主义建設解决各种問題，如大型水利工程中应力分布，不稳定流，气象学中长期数値預报，大型建筑物中的薄壳問題，运筹学在生产中的应用，原棉纖維的品質指标，最高洪峯的估算問題等等，其中如运筹学已經把它广泛的运用到交通运輸、物資調拨、邮电、基本建設、工农业生产等各个方面，为国家节省了大量的資金和人力。并从实践中总結出不少新的运筹学理論，使运筹学几年来在我国得到了飞跃的发展。

无疑的，随着我国社会主义建設的不断发展，数学在我国的发展从理論到实践都将走上更高的水平，为我国社会主义建設做出更大的貢献。

为了坚决貫徹党中央提出的国民經济以农业为基础，全党全民大办农业，大办粮食的方針，迅速的发展我国农业，对于农业科学工作者来說，掌握高等数学这一有力工具是十分重要的，因为在近代的农业科学的研究和发展中，物理学、化学是它很重要的基础，而这些科学上的数量性的規律必須用数学关系来表达。同时在农业科学的許多分支中，凡是从量的方面研究其过程或状态时也必然要用到数学。因此，数学是农业科学的重要基础理論之一，我們可以說沒有初等数学和高等数学給我們的知識，我們就不可能进行农业科学上的严正的工作。迦利略曾經說过：“自然科学要用数学語言来記录”。恩格斯也教导我們：“……对于辯証法的同时是唯物主义的自然观，須要有数学的与自然科学的知識”①。

几年来我国广大数学工作者，深入农业生产实践，在使数学直接为农业生产服务、发展农业生产方面取得了一定成績，証明了在人民公社的优越制度下，数学直接为农业生产服务前途也是无限广闊的。例如在农业生产中的場地設置、劳力組織、作物布局、物資运輸、产量計算、公社規划、以及农业“八字宪法”中的数量規律等等，都有数学用武之地。同时实践証明，农民的丰富生产經驗中有很多数量規律，認眞总結这些經驗也必然是发展数学理論的一个重要源泉。因此，农业工作者学好高等数学，无論对掌握近代先进农业科学理論来說还是对直接为农业生产服务发展我国的社会主义农业生产，都具有重要意义。

① 恩格斯：“反杜林論”，人民出版社 1956 年版 7 頁。

# 第一章　計算方法初步

我們在物理以及化学的实驗中，或是在田間对某种作物的生长发育情况进行一些观察或技术测定时，就会得到大量的反映客观事物的数量特性的数，而且还要对这些数进行大量的运算。但是这些数常常需要通过各种测量仪器的测量而得到，由于测量仪器本身的精确性，以及进行测量的人的技术水平的限制，测得的这些数往往与眞正反映客观事物数量特性的数，有一定的誤差，它只能是近似的数。另一方面，我們对这些近似数进行运算时，往往只要求精确到一定程度就可以了。过多的計算不但沒有必要，而且还会造成很大的人力物力和时間的浪費。怎样使計算簡捷而准确，这一章里将要介紹它的一些初步知識。

## §1—1　近似数的誤差及其四則运算

### 1. 近似数及其誤差

在日常生活中，我們經常遇到很多数。譬如說某班有 25 人参加劳动，共运肥 6,540 斤，这就有两个数。但是他們并不完全相同，象表示人数的 25 这种計数的数是一个个数出来的。因此是个准确的数。而表示运肥量的数 6,540，由于称肥用的秤只能表示到斤或两的单位，因此可能实际的运肥量是 6,540.4 斤或是 6,539.6 斤，6,540 斤只是一个近似的数值。此外，当我們計算半径为 1 尺的圓的周长时，用到数 $\pi = 3.14159265\cdots$。但通常只能取一个近似的数 3.14 或 3.1416 等来代替。

在实际中，很多量的眞正的数值 $A_0$ 是难以求得的，往往只可能用一个近似的数值 $A$ 来表示它，一般記为：

$$A \approx A_0$$

$A_0$ 叫做**眞值**，$A$ 叫做 $A_0$ 的**近似数**。显然，$A$ 不一定等于 $A_0$，我們把数 $|A - A_0|$ 叫做近似数 $A$ 的“**絕对誤差**”。但由于 $A_0$ 往往是未知的，故 $A$ 的絕对誤差也是一个未知的数。为了有效的表示近似数的誤差情况，我們作进一步的研究。

近似数 $A$ 的絕对誤差虽然是未知的，但往往是可以估計的。例如用刻度标明到毫米的米尺去量某軸承的直径，測得直径在 3.9 厘米到 4.0 厘米之間，若用这两个数的平均数 3.95 厘米作为軸承直径的近似值，則它的絕对誤差一定不超过 0.05 厘米。在一般情况下，我們能够确定近似数 $A$ 与眞值 $A_0$ 之差不超过某一个数 $\delta_A$，即

$$|A - A_0| < \delta_A$$

$\delta_A$ 叫做近似数 $A$ 的**最大絕对誤差，簡称絕对誤差**。由于眞值 $A_0$ 一定在 $A + \delta_A$ 与 $A - \delta_A$ 之間，故有时表示为：

$$A_0 = A \pm \delta_A$$

絕对誤差 $\delta_A$ 的大小还不能恰当的説明以 $A$ 表示 $A_0$ 时的准确度。例如，測量一块上千亩地的大面积丰产田时，它的絕对誤差为几个平方米，甚至是十几个、几十个平方米，也都是可以允許的。但如果我們測量的是某建筑物占地的面积时，那时一个平方米的絕对誤差也是不能允許的。因此，我們在研究誤差时，除了要考虑絕对誤差以外，还需要考虑另外一种誤差——相对誤差。我們把絕对誤差与近似数的絕对値之比

$$\frac{|A - A_0|}{|A|}$$

叫做近似数 $A$ 的"**相对誤差**"。相应地把数

$$\Delta_A = \frac{\delta_A}{|A|}$$

叫做近似数 $A$ 的**最大相对誤差**，簡称**相对誤差**。

**例 1** 求 $\pi$ 的近似数 3.14 的絕对誤差和相对誤差。

**解** 由 $\pi = 3.14159265\cdots$ 得 $|3.14-\pi| = |3.14-3.14159265\cdots| = 0.00159265\cdots$。所以可取絕对誤差 $\delta_A = 0.0016$，由此得相对誤差为

$$\Delta_A = \frac{0.0016}{3.14} = 0.05\%$$

**例 2** 用螺旋測微計測量鉄板的厚度时，已知絕对誤差不超过 0.001 厘米。現測得一鉄板的厚度为 $A_1 = 0.25$ 厘米，則其相对誤差为

$$\Delta_{A_1} = \frac{0.001}{0.25} = 0.4\%$$

若再測量另一块較厚的鉄板，得其厚度为 $A_2 = 2.50$ 厘米，則其相对誤差为

$$\Delta_{A_2} = \frac{0.001}{2.50} = 0.04\%$$

事实上，我們不难理解，对于 0.001 厘米的絕对誤差来說，在測量这两块不同厚度的鉄板时，后者比前者的誤差要小。

## 2. 有 效 数 字

为了更簡便地估計近似数的誤差，我們引进有效数字的概念。

**定义** 当近似数 $A$ 的絕对誤差，不超过 $A$ 的末位数字 $x$ 所在位数的半个单位时，則除了 $A$ 左端的 0 以外，$x$ 以前的所有数字都叫做**有效数字**。例如，若近似数 0.0502 的絕对誤差是 0.00007，則 50 都是有效数字，称 0.0502 是具有两位有效数字。5 前面的两个 0 和 2 都不是有效数字。如果絕对誤差为 0.00003，則 502 均为有效数字，称为具有三位有效数字。又如，例 2 中两块鉄板厚度的絕对誤差为 $0.001 < 0.005 = 0.01 \times \frac{1}{2}$，所以 0.25 厘米为具有两位有效数字的近似数。2.50 厘米为具有三位有效数字的近似数。

引进有效数字的概念，使我們可以很容易的估計近似数的誤差，但有时給了近似数例如

36,500 后，还很难确定后面两个零是否是有效数字。为了确定起見，我們常用 $3.65\times10^4$ 和 $3.650\times10^4$ 分别表示近似数是具有三位或四位有效数字。例如例 2 中，鉄板的厚度分别地用 $2.5\times10^{-1}$ 厘米及 $2.50\times10^0$ 厘米来表示。

由于具有有效数字的近似数的絕对誤差必小于末位数所在位数的半个单位，因此，我們可以很容易的根据近似数的有效数字位数来估計其絕对誤差与相对誤差。例如，具有四位有效数字的近似数 5.412，其絕对誤差为 0.0005，故相对誤差为 $\frac{0.0005}{5.412}<\frac{0.0005}{1.000}=0.05\%=5\%\times10^{-2}$；又如具有三位有效数字的近似数 84.3，其絕对誤差为 0.05，故相对誤差为 $\frac{0.05}{84.3}<\frac{0.05}{10.0}=0.5\%=5\%\times10^{-1}$；具有两位有效数字的近似数 0.21，其絕对誤差为 0.005，故相对誤差为 $\frac{0.005}{0.21}<\frac{0.005}{0.10}=5\%$；…。依此类推，我們得到具有 $n$ 位有效数字的近似数的相对誤差必小于 $5\%\times10^{2-n}$。这样，我們将可以根据不同准确度的要求，确定近似数中有效数字所应具有的位数。例如，要求近似数的相对誤差小于 $0.5\%=5\%\times10^{-1}$，只要它具有三位有效数字就可以了，若要求近似数的相对誤差小于 $5\%\times10^0$，只要它具有两位有效数字就可以了。一般地，要求近似数的相对誤差小于 $5\%\times10^{2-n}$，則只要它具有 $n$ 位有效数字就可以了。另外我們不难証明，应用四舍五入法后所得到的近似数，它的所有数字都是有效数字。因此，在实际应用中，通常都用有效数字作为近似数。

**例 3**　若 3.14 是 $\pi$ 的近似数，則由于 $|3.14-\pi|=0.00159\cdots<0.005=0.01\times\frac{1}{2}$，即 3.14 的絕对誤差小于第三位数 4 所在位数——百分位的半个单位。所以 3.14 是 $\pi$ 的具有三位有效数字的近似数。事实上 3.14 是由 3.1415926… 的小数位后第三位用四舍五入法舍入后得到的。同理可得 3.1416 具有五位有效数字，3.14159 具有六位有效数字等等。

### 3. 有效数字的四則运算

(1) 加法和减法运算　首先，我們看两个近似数加、减法运算的例子。

**例 4**　求 $2.53\times10^1+4.42\times10^{-1}+2.741\times10^0$。

**解**　写出草算式如下：

```
    2 5 . 3 ? ? ?
      0 . 4 4 2 ?
+)    2 . 7 4 1 ?
-----------------
    2 8 . 5 ? ? ?
```

式中"?"表示有誤差的数字。

**例 5**　求 $7.83\times10^2-5.72\times10^1$

**解**　写出草算式如下：

```
    7 8 3 . ? ?
-)    5 7 . 2 ?
---------------
    7 2 6 . ? ?
```

从这两个例可以看到近似数(这里指的是有效数字构成的近似数,以后所談的都是这样的近似数,不再另加說明)的和或差的末位数字的位数,不小于相加或相减的近似数的有效数字末位数中的最大者。所以,在加或減运算中,只需将所有近似数的末位有效数字取齐。这样可省略去一些不必要的运算。例如,例 4 的运算可化簡为:

$$\begin{array}{r} 25.3 \\ 0.4 \\ +)\ 2.7 \\ \hline 28.4 \end{array}$$

显然,这样运算的結果与例 4 比較会有一定的誤差。因此,为了保証得到的末位数字是有效的数字,所以一般規定:参与运算的数,要比所要求的有效数字的位数多取一位①,最后,再将所得結果的末位数用四舍五入法舍入。

**例 6** 求 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ 的和,要求小数位后具有两位有效数字。

**解** $\sqrt{2}=1.4142\cdots$, $\sqrt{3}=1.7321\cdots$, $\sqrt{5}=2.2361\cdots$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\approx 1.414+1.732+2.236=5.382\approx 5.38$$

**例 7** 已知 $\lg 5=0.69897\cdots$, $\lg 2=0.30103\cdots$。求 $\lg\frac{5}{2}$ 的近似数,要求在小数位后具有三位有效数字。

**解** $\lg\frac{5}{2}=\lg 5-\lg 2\approx 0.6990-0.3010=0.3980=0.398$。

(2) 乘法与除法运算

先来看两个例子。

**例 8** 設有两个分别具有三位和四位有效数字的近似数,試求其乘积的有效数字位数。

**解** 用"×"表示有效数字,"?"表示有誤差的数字,依題意做草算式如下:

$$\begin{array}{r} \times\ \times\ \times\ ? \\ \times)\ \times\ \times\ \times\ ? \\ \hline ?\ ?\ ?\ ? \\ \times\ \times\ \times\ ?\ \ \\ \times\ \times\ \times\ ?\ \ \ \ \\ \times\ \times\ \times\ ?\ \ \ \ \ \ \\ \boxtimes\ \times\ \times\ \times\ ?\ \ \ \ \ \ \ \ \\ \hline \boxtimes\ \times\ \times\ \times\ ?\ ?\cdots \end{array}$$

其中⊠这一位,当乘数与被乘数的首位数的乘积大于 10 时将会出现。

**例 9** 設有两个分别具有两位和三位有效数字的近似数,試求其商的有效数字位数。

---

① 这里指的"一般情况"是指参与运算的数的数目不超过 20 个。假如有更多的数参与运算,则所取有效数字位数必须相应的增加。

**解** 用与上例相同的符号作草算式如下：

```
            × × ?
× ×. ?) × × × ?
        × × ?
          × ? ?
          × × ?
            ? ? ?
            ? ? ?
             ·   ·
```

从这两个例子可以看到，近似数的积与商所保留的有效数字的位数，决定于原来两个近似数中有效数字位数少的一个；因此，在求近似数的积和商时，只需把参与运算的近似数的有效数字位数都取成与少的一个相同。这样，就可以省略一些不必要的計算。

当把有效数字位数取齐后，作乘法运算时，其乘积的有效数字位数有时可能比被乘数及乘数两者的位数都少。例如，近似数 104 与 0.89 的乘积为 92.56，由于 0.89 的絕对誤差为 0.005，故它們乘积的絕对誤差为 $0.005\times104=0.52$。即它們乘积为 $92.56\pm0.52$。但将 104 与 0.89 取齐位数以后，計算的結果为 $100\times0.89=89$，显然，在个位上就有了誤差，只能得到一位有效数字。所以，一般規定参与运算的近似数所取有效数字的位数，都比所要求的位数多一位，然后再将所得結果的末位数，用四舍五入法舍入。

**例 10** 求 $\sqrt{2}\pi$ 的具有三位有效数字的近似数。

**解** $\sqrt{2}=1.4142\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$。取四位有效数字后分别为

$$\sqrt{2}\approx1.414;\ \pi\approx3.142。$$

所以

$$\sqrt{2}\pi\approx1.414\times3.412=4.442788\approx4.44$$

**例 11** 求 $15.281\div32.547$ 具有三位有效数字的商。

**解** 取四位有效数字后，再求其商，即

$$15.281\div32.745\approx15.28\div32.75=0.4665\cdots\approx0.467。$$

**例 12** 求 $\dfrac{\sqrt{5}}{\pi}$ 的近似値，使其相对誤差不超过 0.5%。

**解** 要使相对誤差不超过 0.5%，那末 $\dfrac{\sqrt{5}}{\pi}$ 商的近似数只要具有三位有效数字就可以了，所以我們取：

$$\sqrt{5}=2.236\quad\pi=3.142$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\pi}\approx\frac{2.236}{3.142}=0.7116\cdots=0.712。$$

## §1—2 图算法初步

图算法是簡捷算法的一种，它主要是利用一定的图綫，通过較簡单的操作而直接得到复杂运算的答案。这种方法既簡便又能广泛的应用。

### 1. 用等分尺进行加、減法运算的原理

做两支刻度单位相同的等分尺，如图1—1。下面将利用它們来求和或差。例如求和 $8+14$ 时，先将上尺向右移动8个单位，使上尺刻度为0之处与下尺刻度为8之处相对准，如图1—2；那末，从上尺刻度14之处，可看到下尺与之对准的刻度为22。22就是8与14之和。

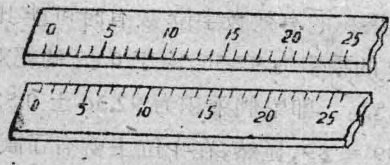

图 1—1

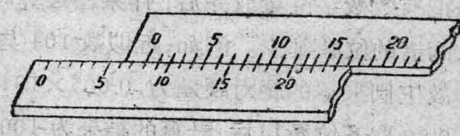

图 1—2

实質上，这是在下尺距刻度0为8个单位长的位置上，加上了上尺14个单位长（当然也是下尺的14个单位长）。因此，对应上尺刻度14处的下尺刻度，就应該是 $8+14=22$ 个单位长。同样若求 $8+2=?$ 时，可在下尺8个单位长的基础上，加上上尺的2个单位长，因而上尺刻度为2之处对应的下尺刻度就是10，即 $8+2=10$。一般求和 $a+b$ 时，只需将上尺的0与下尺刻度 $a$ 对准，馬上可在上尺刻度 $b$ 处得到下尺对应的刻度 $a+b$。当然，若将上尺刻度0与下尺刻度 $b$ 对准，那么在上尺刻度 $a$ 处，同样地得到下尺对应的刻度 $b+a$。如果求差22—14则先将上尺的刻度14与下尺的刻度22对准，从上尺的刻度0处，即可看到下尺与之对应的刻度为8，如图1—2，8就是所求之差。这就是說在下尺的22个单位长中減去上尺的14个单位长，就得到下尺中的 $22-14=8$ 个单位长的刻度。一般地，求差 $b-a(b>a)$ 时，我們可将上尺的 $a$ 与下尺的 $b$ 对准，然后在上尺的0处就得到下尺的对应刻度为 $b-a$。

这种运算方法虽然很簡捷，但在求三位以上的数字的加減法时，就要求刻度更为精密些。有时也可估計其答案，但得到的第三位数将有一定的誤差，这个誤差将不超过第二位数的半个单位。所以用图可作两位有效数字的加減法运算。

### 2. 对数尺及对数計算尺的原理

在一直綫的一側用等分的刻度表示对数值，而在另一側相应地标出真数值，这样构成的标尺就叫做对数尺。图1—3就是以10为底的对数尺。这样我們就可以很快地查出不同对数值所对应的真数值；相反的，也可以对不同真数值，查出其相应的对数值。例如，由图1—3

可查得 4 的对数为 0.602，而 0.903 所对应的眞数为 8 等。

图 1—3 中上部标尺的每一刻度所标出的眞数的值，并不表示該刻度与原始綫的距离。这一距离应該等于該眞数值的对数值。利用对数尺这一特点，再根据对数的性质：

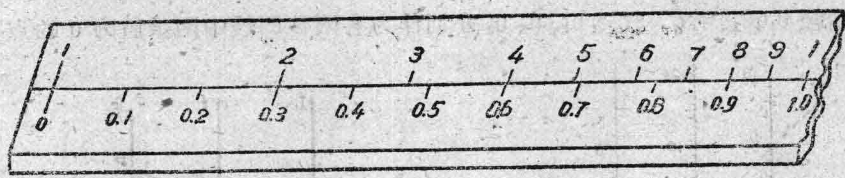


图　1—3

$$\log_{10}(x\cdot y)=\log_{10}x+\log_{10}y \quad 和 \quad \log_{10}\left(\frac{x}{y}\right)=\log_{10}x-\log_{10}y$$

我們可以把求两个数的积或商的运算，通过两支具有相同刻度的对数尺来簡化。首先做两支有相同刻度的对数尺，如图 1—4。当求积 2.5×2.4 时，我們将上尺刻度为 1 之处对准下尺刻度 2.5，那么从上尺刻度为 2.4 处得到下尺与之相应的刻度为 6，如图 1—5。

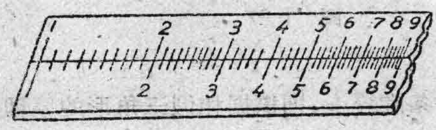


图　1—4

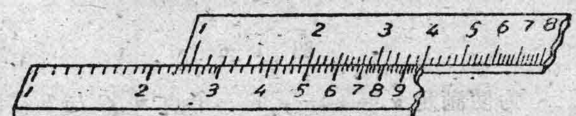


图　1—5

数 6 就是所求之积，即 $2.5\times2.4=6$。事实上，当我們将上尺刻度 1 对准下尺的 2.5 时，就等于使等分尺上的刻度 $\log_{10}1=0$，对准下尺刻度 $\log_{10}2.5$，并在 $\log_{10}2.5$ 个单位的位置上，加上 $\log_{10}2.4$ 个单位长，即查出上尺的眞值 2.4。这样在下尺就应該有 $\log_{10}2.5+\log 2.4=\log_{10}(2.5\times2.4)=\log_{10}6$ 个单位长，故得到了标記着眞值的刻度 6。

当我們求商 4÷1.6 时，将上尺刻度 1.6 与下尺刻度 4 对准，这样在上尺刻度 1 处，得到下尺与之对应的刻度 2.5，2.5 就是所求之商。这事实上就是利用等分尺进行了 $\log_{10}4-\log_{10}1.6=\log_{10}\frac{4}{1.6}=\log_{10}2.5$ 的运算。

上述方法和原理是一般常用对数計算尺的基本原理，我們还可以利用此原理把三角函数 $\sin x$、$\mathrm{tg}\,x$ 等函数的对数值按不同的角度求出，并用与图 1—4 中相同的刻度单位标上，这样我們就能很快地查出反三角函数、三角函数值以及进行 $x\cdot\sin x$、$x\cdot\mathrm{tg}\,x$ 等运算。

### 3. 川形图的簡单制作原理

上面介紹的方法，是利用二支具有相同刻度的尺子来进行四则运算。但有时，由于經常性的用同一算式进行运算，因而可以更为簡单的把不同的函数值，固定在同一图紙的不同图綫上，然后根据这些图綫，求出函数值，例如图 1—6 就是求数 $z=x+y$ 的图綫。当求数 $-5+5$ 时，只需将 $x$ 綫上的 $-5$ 与 $y$ 綫上的点 5 用直綫連接，則此直綫与 $z$ 綫之交点 0 就是所求之答案，見图 1—6 中虛綫所示。讀者可試从图 1—6 中，求出 $5+5$，$(-10)+(-2)$，··· 等等加法运算的結果。

由于图綫是三条平行的直綫組成，故一般称之为川形图。下面我們来介紹其繪作原理。

設直綫 $f_1$、$f$、$f_2$ 分別标記函数 $x$、$z$ 及 $y$ 的值，如图 1—7。又以 $\mu_1$、$\mu$ 及 $\mu_2$ 分别代表直綫 $f_1$、$f$ 及 $f_2$ 上的刻度单位长。$m$ 及 $n$ 分别表示 $f_1$ 到 $f$ 及 $f$ 到 $f_2$ 的垂直距离。现在从直綫 $f_1$、$f$ 及 $f_2$ 的原始綫 $0_1 0 0_2$ 出发，取点 $0_1$、$0$、$0_2$ 分别作为各函数图綫中函数值为 0 的点。

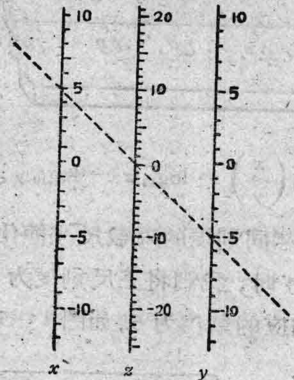

图 1—6

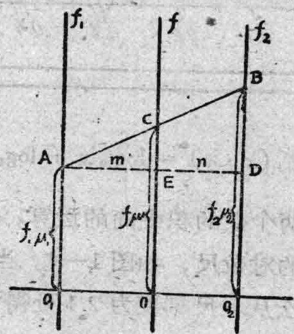

图 1—7

为使满足 $z = x + y$ 的三个点 $A$、$C$ 与 $B$ 在同一条直綫上，则根据相似三角形的原理必需有

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \tag{1}$$

又因为

$$AE = m, \quad AD = m + n$$

$$EC = CO - EO = z\mu - x\mu_1, \; BD = BO_2 - DO_2 = y\mu_2 - x\mu_1$$

将 $AE$, $AD$, $EC$, $BD$ 代入(1)式得

$$\frac{m}{m+n} = \frac{z\mu - x\mu_1}{y\mu_2 - x\mu_1}$$

即

$$(m+n)(z\mu - x\mu_1) = m(y\mu_2 - x\mu_1)$$

$$\mu(m+n)z = nx\mu_1 + my\mu_2$$

$$\mu\frac{m+n}{m \cdot n}z = \frac{\mu_1}{m}x + \frac{\mu_2}{n}y \tag{2}$$

由于 $z = x + y$ 对于任何 $x$, $y$ 及 $z$ 的值都成立。故把(2)式与 $z = x + y$ 比較，得

$$\mu\frac{m+n}{m \cdot n} = \frac{\mu_1}{m} = \frac{\mu_2}{n} = k \neq 0$$

即

$$\mu_1 = km, \quad \mu_2 = kn$$

或

$$m = \frac{\mu_1}{k}, \quad n = \frac{\mu_2}{k}$$