

山东省高等教育面向21世纪  
教学内容和课程体系改革系列教材

# 高等数学

(甲种本·下册)

王爱云 主编

石油大学出版社

山东省高等教育面向 21 世纪  
教学内容和课程体系改革系列教材

# 高等数学

(甲种本·下册)

主 编 王爱云  
副主编 马军英  
张 燕  
张立琴

石油大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/王爱云主编. —东营:石油大学出版社,  
2001.7

ISBN 7-5636-1427-3

I. 高… II. 王… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第06348号

## 高等数学(甲种本·下册)

---

出版者:石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)

网 址: <http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpres>

电子信箱: [upcpres@sunctr.hdpu.edu.cn](mailto:upcpres@sunctr.hdpu.edu.cn)

印刷者:山东沂南印刷总厂

发行者:石油大学出版社(电话 0546-8392062)

开 本: 850×1168 1/32 印张:13.5 字数:349千字

版 次: 2001年12月第1版 2001年12月第1次印刷

定 价: 28.00元(上、下册)

# 高等数学丛书编委会

主任 刘晓华

副主任 管恩瑞 陈焕贞

李光芹 刘庆华

编委 (按姓氏笔画为序)

王秀红 王爱云 吕蕴霞

宋 枚 张 燕 张立琴

孟 晗 杨振光 姚炳学

钟红心 徐传芳 嵇清亮

## 内 容 提 要

全书分上、下两册。上册包括函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,一元函数积分学,定积分的应用,向量代数与空间解析几何等六章;下册包括多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程等五章。书后均附有习题参考答案。

本书不仅从课程结构上,而且在内容上做了较大的革新,具有结构严谨,系统完整,叙述简洁之特点;其次是注重了联系实际和应用的广泛性,加强了结合实际的内容,数学概念尽量由实际问题引入,尽可能多地将各专业的典型问题选作例题和习题。本书习题数量适当,深度适宜。

本书涵盖了考研高等数学(一)的全部内容。适合师范本科院校物理、计算机类的学生使用。也可供其他有相应数学教学要求的高校使用。

# 目 录

第七章 多元函数微分学.....	(1)
第一节 多元函数的基本概念.....	(1)
一、区 域(1) 二、多元函数概念(4) 三、多元函数的极限(6) 四、多元函数的连续性(9) 习题7-1(11)	
第二节 偏导数 .....	(12)
一、偏导数(12) 二、偏导数的几何意义(15) 三、高阶偏导数(16) 习题7-2(18)	
第三节 全微分及其应用 .....	(19)
一、全微分的概念(19) 二、函数可微的条件(20) 三、全微分在近似计算中的应用(25) 习题7-3(27)	
第四节 多元复合函数的微分法 .....	(28)
一、多元复合函数的求导法则(28) 二、全微分形式不变性(33) 习题7-4(35)	
第五节 方向导数与梯度 .....	(36)
一、方向导数(36) 二、梯度(39) 习题7-5(42)	
第六节 隐函数的求导公式 .....	(43)
一、由一个方程所确定的隐函数的求导公式(43) 二、由方程组所确定的隐函数的求导公式(45) 习题7-6(50)	
第七节 多元函数微分法的应用 .....	(51)
一、几何应用(51) 二、多元函数的极值与最大	

	值、最小值(56) 习题7-7(65)	
	*第八节 二元函数的泰勒公式 .....	(66)
	习题7-8(70) 第七章总习题(70)	
<b>第八章</b>	<b>重积分</b> .....	(72)
	第一节 重积分的概念与性质 .....	(72)
	一、重积分的概念(72) 二、二重积分的性质(78)	
	习题8-1(79)	
	第二节 二重积分的计算 .....	(81)
	一、利用直角坐标计算二重积分(81) 二、利用极	
	坐标计算二重积分(88) *三、二重积分的换元法	
	(93) 习题8-2(99)	
	第三节 三重积分的计算.....	(102)
	一、利用直角坐标计算三重积分(103) 二、利用	
	柱面坐标计算三重积分(110) 三、利用球面坐标	
	计算三重积分(115) *四、三重积分的换元法	
	(120) 习题8-3(123)	
	第四节 重积分的应用.....	(125)
	一、几何应用(125) 二、物理应用(130) 习题8-4	
	(140) 第八章总习题(141)	
<b>第九章</b>	<b>曲线积分与曲面积分</b> .....	(144)
	第一节 对弧长的曲线积分.....	(144)
	一、概念与性质(144) 二、计算方法(147) 习题	
	9-1(153)	
	第二节 对坐标的曲线积分.....	(153)
	一、概念与性质(153) 二、计算方法(161) 习题	
	9-2(166)	
	第三节 对面积的曲面积分.....	(168)
	一、概念与性质(168) 二、计算方法(170) 习题	
	9-3(175)	

第四节	对坐标的曲面积分·····	(176)
	一、概念与性质(176) 二、计算方法(184) 习题 9-4(192)	
第五节	格林公式·····	(193)
	习题9-5(206)	
第六节	高斯公式 斯托克斯公式·····	(207)
	一、高斯公式(207) 二、斯托克斯公式(214) 习 题9-6(220)	
第七节	通量与散度 环量与旋度·····	(222)
	一、通量与散度(222) 二、环量与旋度(229) 习 题9-7(236) 第九章总习题(237)	
<b>第十章</b>	<b>无穷级数</b> ·····	<b>(241)</b>
第一节	常数项级数的概念和性质·····	(241)
	一、常数项级数的概念(241) 二、级数的性质 (245) 习题10-1(248)	
第二节	常数项级数的收敛判别法·····	(249)
	一、正项级数及其收敛判别法(249) 二、交错级 数及其收敛判别法(257) 三、任意项级数及其收 敛判别法(259) 习题10-2(263)	
第三节	幂级数·····	(264)
	一、函数项级数的概念(264) 二、幂级数及其收 敛域(265) 三、幂级数的运算与性质(270) 习题 10-3(273)	
第四节	函数展开成幂级数·····	(274)
	一、泰勒(Taylor)级数(274) 二、函数展开成幂级 数(277) 习题10-4(282)	
第五节	幂级数的应用·····	(283)
	一、求数项级数的和(283) 二、近似计算(284) 三、欧拉(Euler)公式(286) 习题10-5(287)	



第六节	傅里叶(Fourier)级数 ····· (288)
	一、三角函数系的正交性(289) 二、函数展开成傅里叶级数(290) 三、奇、偶函数的傅里叶级数(294) 习题10-6(297)
第七节	周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数 ····· (298)
	习题10-7(302)
第八节	有限区间上的函数的傅里叶级数····· (303)
	习题10-8(307) 第十章总习题(307)
<b>第十一章</b>	<b>常微分方程</b> ····· (310)
第一节	常微分方程的基本概念····· (310)
	一、两个实例(310) 二、微分方程的基本概念(312) 习题11-1(313)
第二节	一阶微分方程····· (314)
	一、可分离变量微分方程及齐次方程(315) 二、一阶线性微分方程及伯努利方程(323) 三、全微分方程(331) 习题11-2(336)
第三节	可降阶的高阶微分方程····· (339)
	一、 $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)})$ 型方程(340) 二、 $y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ 型方程(342) 习题11-3(344)
第四节	高阶线性微分方程····· (345)
	一、线性微分方程及其解的结构(345) 二、常系数齐次线性微分方程(349) 三、常系数非齐次线性微分方程(354) 习题11-4(359)
第五节	欧拉方程····· (361)
	习题11-5(364)
第六节	微分方程的应用····· (364)
	一、一阶微分方程的应用举例(365) 二、二阶微分方程的应用举例(372) 习题11-6(378)

第七节 常系数线性微分方程组求解.....	(379)
一、消元法(379) 二、特征方程法(381) 习题	
11-7(384) 第十一章总习题(385)	
习题参考答案与提示.....	(390)

## 第七章 多元函数微分学

我们已经讨论了一元函数的微分与积分,由于现实世界中许多变量之间的关系需用多元函数来描述,因而还需要研究多元函数的微积分.

多元函数微分学是一元函数微分学的推广和发展,其基本概念和方法与一元函数既有密切的联系,又有不少本质差别,这些差别在二元函数中全部体现出来,而从二元函数到三元或三元以上的函数,仅会产生一些技术性的困难,却没有什么重大差别,因此研究多元函数,应对二元函数做较详尽的探讨.研究二元函数,一方面要注意二元函数与一元函数形同实异之处,另一方面还要充分利用一元函数的已有结果.

### 第一节 多元函数的基本概念

为了讨论多元函数,我们先把数轴上点的邻域和区间等概念进行相应地推广,并介绍其他有关概念.

#### 一、区域

##### 1. 邻域

设  $P_0(x_0, y_0)$  是  $xOy$  平面上一个点,  $\delta$  是某一正实数,与点  $P_0(x_0, y_0)$  的距离小于  $\delta$  的点  $P(x, y)$  的全体,称为点  $P_0$  的  $\delta$  邻域,记为  $U(P_0, \delta)$ ,即

$$U(P_0, \delta) = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \right\}.$$

在几何上,  $U(P_0, \delta)$  是  $xOy$  平面上以点  $P_0$  为中心、 $\delta > 0$  为半径的圆的内部的点的全体.

从  $U(P_0, \delta)$  中去掉  $P_0$ , 称为点  $P_0$  的去心  $\delta$  邻域, 记为  $\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ , 即

$$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta) = \left\{ (x, y) \mid 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \right\}.$$

$P_0$  的  $\delta$  邻域或去心  $\delta$  邻域又简称邻域, 在不需指明邻域半径时, 又分别简记为  $U(P_0)$  或  $\overset{\circ}{U}(P_0)$ .

## 2. 区域

### (1) 内点、边界点:

设  $E$  是一个平面点集,  $P$  是平面上的一个点, 若存在  $\delta > 0$ , 使  $U(P, \delta) \subset E$ , 则称点  $P$  是点集  $E$  的内点(图 7-1).  $E$  的内点的全体构成的集合称为  $E$  的内部. 例如  $E_1 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$  中的任一点都是  $E_1$  的内点;  $E_2 = \{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$  中满足  $x + y = 1$  的点  $(x, y)$  都不是它的内点.

如果点  $P$  的任一邻域内既有属于  $E$  的点, 又有不属于  $E$  的点(点  $P$  本身可以属于  $E$ , 也可以不属于  $E$ ), 则称  $P$  为  $E$  的边界点(图 7-2).  $E$  的边界点的全体构成的集合称为  $E$  的边界, 记为  $\partial E$ . 例如  $\partial E_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ ,  $\partial E_2 = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ .

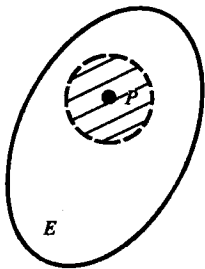


图 7-1

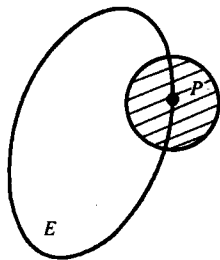


图 7-2

### (2) 开集、闭集:

若点集 $E$ 的每一点都是 $E$ 的内点,则称 $E$ 是开集.若点集 $E$ 包含它的全部内点和边界点,则称 $E$ 为闭集.如 $E_1$ 是开集, $E_2$ 是闭集.

### (3) 连通集、区域:

设 $E$ 是平面点集,如果对 $E$ 中任意两点 $P, Q$ ,总可用完全含在 $E$ 内的折线(即折线上的点都属于 $E$ )连接起来,则称 $E$ 是连通集.如 $E_1, E_2$ 是连通集,点集 $E_3 = \{(x, y) \mid x \cdot y \neq 0\}$ 是非连通集.

连通的开集称为开区域或区域;开区域及它的边界构成的点集称为闭区域.例如 $E_1$ 是开区域, $E_2$ 是闭区域.

### (4) 有界集、无界集:

设 $E$ 是平面点集,若存在某个正实数 $R$ ,使得 $E \subset U(O, R)$ ,其中 $O$ 表示坐标原点,则称 $E$ 为有界点集.否则称为无界点集.例如 $E_1$ 为有界点集, $E_2, E_3$ 为无界点集.

### 3. 聚点

设 $E$ 是平面上的一个点集, $P$ 是平面上的一个点,如果点 $P$ 的任一邻域内总有无多个点属于 $E$ ,则称 $P$ 为 $E$ 的聚点.显然, $E$ 的内点一定是 $E$ 的聚点,此外, $E$ 的边界点也可能是 $E$ 的聚点.例如 $E_4 = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,点 $(0, 0)$ 既是 $E_4$ 的边界点又是 $E_4$ 的聚点,且它不属于 $E_4$ ;而圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的每个点既是 $E_4$ 的边界点,也是 $E_4$ 的聚点,且这些聚点都属于 $E_4$ .由此可见,点集 $E$ 的聚点可以属于 $E$ ,也可以不属于 $E$ .

### 4. $n$ 维空间

我们知道,数轴上的点与实数有一一对应关系,从而实数的全体表示数轴上一切点的集合,即直线.在平面或空间引入直角坐标系后,平面上或空间中的点,与有序数组 $(x, y)$ 或 $(x, y, z)$ 有一一对应关系,从而有序数组 $(x, y)$ 或 $(x, y, z)$ 的全体表示平面上或空间中一切点的集合,即平面或空间.一般地,设 $n$ 为取定的一自然数,我们称有序 $n$ 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体为 $n$ 维空间,记为 $\mathbf{R}^n$ .每个有序 $n$ 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 $n$ 维空间中的一个点.数

$x_i$  称为该点的第  $i$  个坐标.

$n$  维空间中两点  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  及  $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$  间的距离规定为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

显然,  $n=1, 2, 3$  时, 由上式便得解析几何中在数轴上、平面内、空间内两点间的距离.

前面对平面点集陈述的一系列概念, 可推广到  $n$  维空间中去, 例如,  $n$  维空间内点  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  的  $\delta$  邻域, 定义为  $n$  维空间中的点集

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta, \\ P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \delta > 0\}.$$

以邻域概念为基础, 可定义点集的内点、边界点、区域等一系列概念.

## 二、多元函数概念

客观事物往往是由多种因素确定的, 在研究这些现象时就会遇到多个变量之间的依赖关系.

**例1** 一定质量的理想气体, 其压强  $P$  和容积  $V$  以及绝对温度  $T$  之间满足关系式(称为气态方程)

$$P = \frac{kT}{V} \quad (T > T_0, V > 0, k \text{ 是常数}).$$

当  $T, V$  的值分别给定时, 按照这个关系式,  $P$  就有确定的值与它们对应. 这样, 我们说变量  $P$  是两个变量  $T, V$  的函数.

**例2** 圆柱体的侧面积  $S$ 、底半径  $R$  和高  $H$  之间有关系

$$S = 2\pi RH \quad (R > 0, H > 0).$$

当  $R$  与  $H$  的值分别给定时,  $S$  的对应值就随之确定, 我们称变量  $S$  是两个变量  $R$  与  $H$  的二元函数.

以上是二元函数的实例, 为了给出二元函数的定义, 我们先给

出两个变量的变化域的概念.

设  $x, y$  是有顺序的两个变量, 变量  $x, y$  每取一组数, 就得到  $xOy$  平面上的一个点  $P(x, y)$ . 变量  $x, y$  所能取的一切数组  $(x, y)$  组成的平面点集, 称为  $x, y$  的变化域.

**定义1** 设有三个变量  $x, y, z$ , 变量  $x, y$  的变化域为  $D$ , 若对  $D$  中每个点  $P(x, y)$ , 依照某一对应规律, 变量  $z$  都有确定的值与之对应, 则称  $z$  是  $x, y$  的二元函数(或点  $P$  的函数). 记为

$$z=f(x, y), (x, y) \in D \text{ 或 } z=f(P), P \in D.$$

其中  $x, y$  称为自变量,  $z$  称为因变量,  $D$  称为函数的定义域. 数集  $\{z|z=f(x, y), (x, y) \in D\}$  称为函数的值域. |

类似地, 可以定义三元函数  $u=f(x, y, z)$  以及三元以上的函数. 一般地, 把定义1中自变量  $x, y$  的变化域  $D$  换为自变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的变化域  $D$ , 则可类似定义  $n$  元函数  $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  或  $u=f(P)$ . 这里点  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ . 当  $n=1$  时,  $n$  元函数就是一元函数, 当  $n \geq 2$  时,  $n$  元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域, 对由实际问题给出的函数, 其定义域是使实际问题有意义的自变量的变化域. 如例2中, 自变量  $R, H$  分别表示圆柱体的底半径和高, 按其实际意义, 函数定义域为  $\{(R, H)|R>0, H>0\}$  (图7-3), 这是一个无界开区域. 对于用算式表达的多元函数  $u=f(P)$ , 则以使这个算式有确定值  $u$  的自变量的变化域为这个函数的定义域.

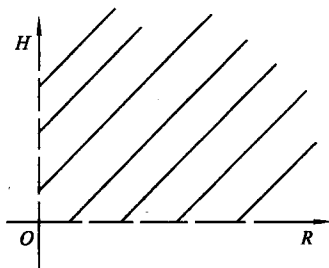


图7-3

**例3** 求函数  $z=\ln(x^2+y^2-2x)+\ln(4-x^2-y^2)$  的定义域, 并将定义域用平面图形表示.

**解** 要使  $z$  有确定的值, 则须

$$x^2+y^2-2x>0 \text{ 且 } 4-x^2-y^2>0.$$

解得函数定义域为  $\{(x, y)|2x<x^2+y^2<4\}$ . 定义域图形如

图 7-4.

设二元函数  $z=f(x,y)$  的定义域为  $D$ , 在空间直角坐标系中, 对于  $D$  中每一点  $P(x,y)$ , 依照函数关系  $z=f(x,y)$ , 就有空间一点  $M$  与之对应,  $M$  的坐标为  $(x,y,f(x,y))$ . 在空间中, 点集

$$\{(x,y,z) | z=f(x,y), (x,y) \in D\}$$

称为二元函数  $z=f(x,y)$  的图形. 一般说来, 它是三维空间中的一张曲面(图 7-5).

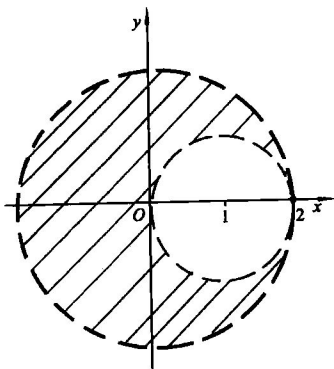


图 7-4

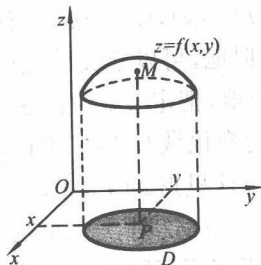


图 7-5

例如, 由空间解析几何知道, 线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一张平面, 函数  $z=x^2+y^2$  的图形就是旋转抛物面.

当函数的自变量个数  $n>2$  时,  $n$  元函数就没有直观的几何图像了.

另外, 多元函数也有单值函数和多值函数之分, 而多值函数也往往转化为单值函数来讨论. 以后如无特别声明, 总假定所讨论的函数是单值的.

### 三、多元函数的极限

二元函数的极限定义与一元函数极限定义类似.



**定义2** 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 $D$ ,点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $D$ 的聚点, $A$ 是一个常数,若对任意给定的正数 $\epsilon$ ,总存在正数 $\delta$ ,使得对于满足不等式 $0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 的一切点 $P(x,y) \in D$ ,都有 $|f(x,y) - A| < \epsilon$ ,则称 $A$ 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的极限. 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = A \quad \text{或} \quad f(x,y) \rightarrow A (\rho \rightarrow 0),$$

其中 $\rho = |PP_0|$ . **|**

为了区别一元函数的极限,我们把二元函数的极限叫做二重极限.

**例4** 证明  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0, (x^2 + y^2 \neq 0)$ .

**证** 因为

$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| = |x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2$ , 所以, 对任给的 $\epsilon > 0$ , 取 $\delta = \sqrt{\epsilon}$ , 则当

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$$

时, 总有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

成立, 从而  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$ .

根据二元函数极限定义不难看到, 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在二重极限, 是指 $xOy$ 坐标面上的动点 $P(x,y)$ 在函数定义域 $D$ 中以任意方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 相应地函数 $f(x,y)$ 都无限接近常数 $A$ , 因此, 如果动点 $P(x,y)$ 在 $D$ 中以某种方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,  $f(x,y)$ 不趋于一个确定的常数, 或以某两种方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,  $f(x,y)$ 趋于不同的常数, 则可断定 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时 $f(x,y)$ 的二重极限不存在.