山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

（甲种本·下册）

王爱云 主编

石油大学出版社

山东省高等教育面向21世纪

教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

（甲种本·下册）

主　　编　王爱云

副主编　马军英

张　燕

张立琴

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/王爱云主编. —东营:石油大学出版社,2001.7

ISBN 7-5636-1427-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.王…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第06348号

高等数学(甲种本·下册)

出 版 者:石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)

网　　址:http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress

电子信箱:upcpress@sunctr.hdpu.edu.cn

印 刷 者:山东沂南印刷总厂

发 行 者:石油大学出版社(电话 0546-8392062)

开　　本:850×1168　1/32　印张:13.5　字数:349千字

版　　次:2001年12月第1版　2001年12月第1次印刷

定　　价:28.00元(上、下册)

内 容 提 要

全书分上、下两册。上册包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，一元函数积分学，定积分的应用，向量代数与空间解析几何等六章；下册包括多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程等五章。书后均附有习题参考答案。

本书不仅从课程结构上，而且在内容上做了较大的革新，具有结构严谨，系统完整，叙述简洁之特点；其次是注重了联系实际和应用的广泛性，加强了结合实际的内容，数学概念尽量由实际问题引入，尽可能多地将各专业的典型问题选作例题和习题。本书习题数量适当，深度适宜。

本书涵盖了考研高等数学(一)的全部内容。适合师范本科院校物理、计算机类的学生使用。也可供其他有相应数学教学要求的高校使用。

目　录

第七章　多元函数微分学

我们已经讨论了一元函数的微分与积分，由于现实世界中许多变量之间的关系需用多元函数来描述，因而还需要研究多元函数的微积分.

多元函数微分学是一元函数微分学的推广和发展，其基本概念和方法与一元函数既有密切的联系，又有不少本质差别，这些差别在二元函数中全部体现出来，而从二元函数到三元或三元以上的函数，仅会产生一些技术性的困难，却没有什么重大差别，因此研究多元函数，应对二元函数做较详尽的探讨.研究二元函数，一方面要注意二元函数与一元函数形同实异之处，另一方面还要充分利用一元函数的已有结果.

第一节　多元函数的基本概念

为了讨论多元函数，我们先把数轴上点的邻域和区间等概念进行相应地推广，并介绍其他有关概念.

一、区　域

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上一个点，δ 是某一正实数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$是xOy平面上以点P_0为中心、$\delta>0$为半径的圆的内部的点的全体.

从$U(P_0,\delta)$中去掉P_0，称为点P_0的去心δ邻域，记为$\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

P_0的δ邻域或去心δ邻域又简称邻域，在不需指明邻域半径时，又分别简记为$U(P_0)$或$\mathring{U}(P_0)$.

2. 区域

(1) 内点、边界点：

设E是一个平面点集，P是平面上的一个点，若存在$\delta>0$，使$U(P,\delta)\subset E$，则称点P是点集E的内点(图7-1). E的内点的全体构成的集合称为E的内部. 例如$E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$中的任一点都是$E_1$的内点；$E_2=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$中满足$x+y=1$的点$(x,y)$都不是它的内点.

如果点P的任一邻域内既有属于E的点，又有不属于E的点(点P本身可以属于E，也可以不属于E)，则称P为E的边界点(图7-2). E的边界点的全体构成的集合称为E的边界，记为∂E. 例如$\partial E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，$\partial E_2=\{(x,y)\mid x+y=1\}$.

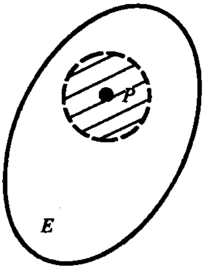

图7-1

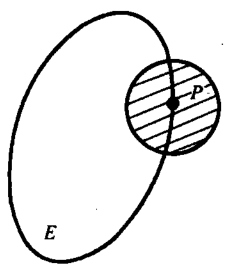

图7-2

(2) 开集、闭集：

若点集E的每一点都是E的内点，则称E是开集. 若点集E包含它的全部内点和边界点，则称E为闭集. 如E_1是开集，E_2是闭集.

(3) 连通集、区域：

设E是平面点集，如果对E中任意两点P、Q，总可用完全含在E内的折线(即折线上的点都属于E)连接起来，则称E是连通集. 如E_1、E_2是连通集，点集$E_3=\{(x,y)|x\cdot y\neq 0\}$是非连通集.

连通的开集称为开区域或区域；开区域及它的边界构成的点集称为闭区域. 例如E_1是开区域，E_2是闭区域.

(4) 有界集、无界集：

设E是平面点集，若存在某个正实数R，使得$E\subset U(O,R)$，其中O表示坐标原点，则称E为有界点集. 否则称为无界点集. 例如E_1为有界点集，E_2、E_3为无界点集.

3. 聚点

设E是平面上的一个点集，P是平面上的一个点，如果点P的任一邻域内总有无限多个点属于E，则称P为E的聚点. 显然，E的内点一定是E的聚点，此外，E的边界点也可能是E的聚点. 例如$E_4=\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$，点$(0,0)$既是$E_4$的边界点又是$E_4$的聚点，且它不属于$E_4$；而圆周$x^2+y^2=1$上的每个点既是$E_4$的边界点，也是$E_4$的聚点，且这些聚点都属于$E_4$. 由此可见，点集$E$的聚点可以属于$E$，也可以不属于$E$.

4. n维空间

我们知道，数轴上的点与实数有一一对应关系，从而实数的全体表示数轴上一切点的集合，即直线. 在平面或空间引入直角坐标系后，平面上或空间中的点，与有序数组(x,y)或(x,y,z)有一一对应关系，从而有序数组(x,y)或(x,y,z)的全体表示平面上或空间中一切点的集合，即平面或空间. 一般地，设n为取定的一自然数，我们称有序n元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体为n维空间，记为$\mathbf{R}^n$. 每个有序n元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为n维空间中的一个点. 数

x_i 称为该点的第 i 个坐标.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

显然，$n=1,2,3$ 时，由上式便得解析几何中在数轴上、平面内、空间内两点间的距离.

前面对平面点集陈述的一系列概念，可推广到 n 维空间中去，例如，n 维空间内点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的 δ 邻域，定义为 n 维空间中的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)}<\delta,$$
$$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\delta>0\}.$$

以邻域概念为基础，可定义点集的内点、边界点、区域等一系列概念.

二、多元函数概念

客观事物往往是由多种因素确定的，在研究这些现象时就会遇到多个变量之间的依赖关系.

例1 一定质量的理想气体，其压强 P 和容积 V 以及绝对温度 T 之间满足关系式(称为气态方程)

$$P=\frac{kT}{V}\qquad(T>T_0,V>0,k\text{ 是常数}).$$

当 T、V 的值分别给定时，按照这个关系式，P 就有确定的值与它们对应. 这样，我们说变量 P 是两个变量 T、V 的函数.

例2 圆柱体的侧面积 S、底半径 R 和高 H 之间有关系

$$S=2\pi RH\qquad(R>0,H>0).$$

当 R 与 H 的值分别给定时，S 的对应值就随之确定，我们称变量 S 是两个变量 R 与 H 的二元函数.

以上是二元函数的实例，为了给出二元函数的定义，我们先给

出两个变量的变化域的概念.

设 x、y 是有顺序的两个变量，变量 x、y 每取一组数，就得到 xOy 平面上的一个点 $P(x,y)$. 变量 x、y 所能取的一切数组 (x,y) 组成的平面点集，称为 x、y 的变化域.

定义1 设有三个变量 x、y、z，变量 x、y 的变化域为 D，若对 D 中每个点 $P(x,y)$，依照某一对应规律，变量 z 都有确定的值与之对应，则称 z 是 x、y 的二元函数（或点 P 的函数）. 记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D \text{ 或 } z=f(P),P\in D.$$

其中 x,y 称为自变量，z 称为因变量，D 称为函数的定义域. 数集 $\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数的值域. ▌

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数. 一般地，把定义1中自变量 x、y 的变化域 D 换为自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的变化域 D，则可类似定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 或 $u=f(P)$. 这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 当 $n=1$ 时，n 元函数就是一元函数，当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域，对由实际问题给出的函数，其定义域是使实际问题有意义的自变量的变化域. 如例2中，自变量 R、H 分别表示圆柱体的底半径和高，按其实际意义，函数定义域为 $\{(R,H)|R>0,H>0\}$（图7-3），这是一个无界开区域. 对于用算式表达的多元函数 $u=f(P)$，则以使这个算式有确定值 u 的自变量的变化域为这个函数的定义域.

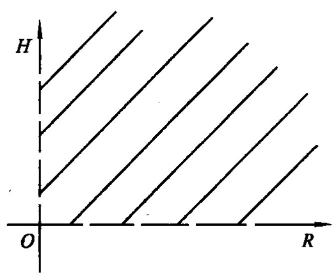

图7-3

例3 求函数 $z=\ln(x^2+y^2-2x)+\ln(4-x^2-y^2)$ 的定义域，并将定义域用平面图形表示.

解 要使 z 有确定的值，则须

$$x^2+y^2-2x>0 \text{ 且 } 4-x^2-y^2>0.$$

解得函数定义域为 $\{(x,y)|2x<x^2+y^2<4\}$. 定义域图形如

图 7-4.

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，在空间直角坐标系中，对于 D 中每一点 $P(x,y)$，依照函数关系 $z=f(x,y)$，就有空间一点 M 与之对应，M 的坐标为 $(x,y,f(x,y))$. 在空间中，点集

$$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形. 一般说来，它是三维空间中的一张曲面(图 7-5).

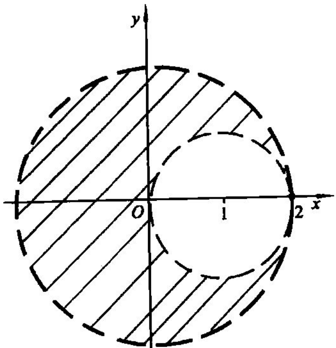

图 7-4

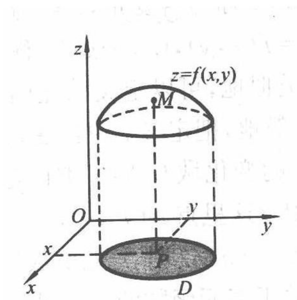

图 7-5

例如，由空间解析几何知道，线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一张平面，函数 $z=x^2+y^2$ 的图形就是旋转抛物面.

当函数的自变量个数 $n>2$ 时，n 元函数就没有直观的几何图像了.

另外，多元函数也有单值函数和多值函数之分，而多值函数也往往转化为单值函数来讨论. 以后如无特别声明，总假定所讨论的函数是单值的.

三、多元函数的极限

二元函数的极限定义与一元函数极限定义类似.

定义2 设函数$z=f(x,y)$的定义域为D，点$P_0(x_0,y_0)$是D的聚点，A是一个常数，若对任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于满足不等式$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$的一切点$P(x,y)\in D$，都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称$A$为函数$z=f(x,y)$当$x\to x_0,y\to y_0$时的极限. 记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A \quad 或 \quad f(x,y)\to A(\rho\to 0),$$

其中$\rho=|PP_0|$. ▍

为了区别一元函数的极限，我们把二元函数的极限叫做二重极限.

例4 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0,(x^2+y^2\neq 0)$.

证 因为

$\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2$，所以，对任给的$\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立，从而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

根据二元函数极限定义不难看到，函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$存在二重极限，是指xOy坐标面上的动点$P(x,y)$在函数定义域D中以任意方式趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，相应地函数$f(x,y)$都无限接近常数A，因此，如果动点$P(x,y)$在D中以某种方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$不趋于一个确定的常数，或以某两种方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$趋于不同的常数，则可断定$x\to x_0,y\to y_0$时$f(x,y)$的二重极限不存在.