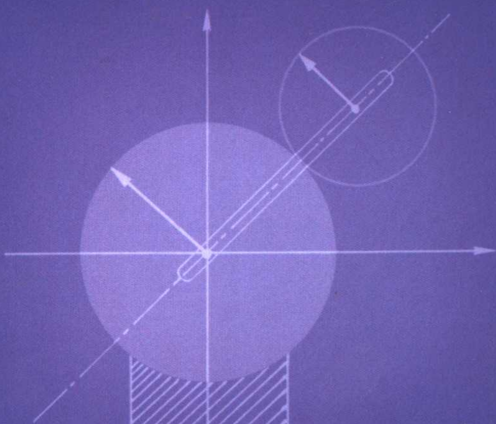
理论物理学习辅导丛书

周衍柏 编

理论力学教程（第二版）

学习辅导书

张宏宝



高等教育出版社

理论物理学习辅导丛书

周衍柏　编

理论力学教程
（第二版）
学习辅导书

张宏宝

高等教育出版社

内容简介

本书是为《理论力学教程》(第二版)配套的学习辅导书。书中对教材中全部习题给出了分析和解题思路,以及解题的详细过程。本书有助于学生学习和理解理论力学的内容。

本书可供以《理论力学教程》(第二版)作为教材的师生作为教学和学习参考书使用,也可供其他高等学校理工科相关专业的师生和社会读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学教程(第二版)学习辅导书/张宏宝.—北京:高等教育出版社,2004.11

ISBN 7-04-015574-5

Ⅰ.理… Ⅱ.张… Ⅲ.理论力学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 106347 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市南方印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2004 年 11 月第 1 版
印　　张	5.625	**印　　次**	2004 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	140 000	**定　　价**	8.70 元

物料号:15574-00

目　　录

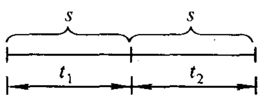
第一章　质点力学

1.1　沿水平方向前进的枪弹，通过某一距离 s 的时间为 t_1，而通过下一等距离 s 的时间为 t_2. 试证明枪弹的减速度(假定是常数)为

$$\frac{2s(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$$

证　由题可知示意图如题 1.1.1 图：

设开始计时的时刻速度为 v_0，由题可知枪弹作匀减速运动，设减速度大小为 a.



题 1.1.1 图

则有：

$$\begin{cases} s = v_0 t_1 - \dfrac{1}{2}at_1^2 & ① \\ 2s = v_0(t_1+t_2) - \dfrac{1}{2}a(t_1+t_2)^2 & ② \end{cases}$$

由式①我们可知

$$v_0 = \frac{s}{t_1} + \frac{1}{2}at_1 \qquad ③$$

把③代入②得

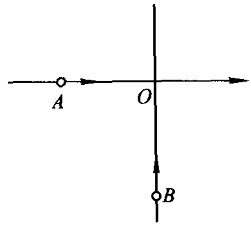
$$a = \frac{2s(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$$

证明完毕.

1.2　某船向东航行，速率为 15 km/h，在正午经过某一灯塔. 另一船以同样速度向北航行，在下午 1 时 30 分经过此灯塔. 问在什么时候，两船的距离最近？最近的距离是多少？

解　由题可知，以灯塔为坐标原点建立直角坐标如题 1.2.1

图．设 A 船经过 t_0 小时向东经过灯塔，则向北行驶的 B 船经过 $\left(t_0+1\frac{1}{2}\right)$ 小时经过灯塔．



题 1.2.1 图

任意时刻 A 船的坐标

$$x_A=-(15t_0-15t),y_A=0$$

B 船坐标 $x_B=0,y_B=-\left[15\left(t_0+1\frac{1}{2}\right)-15t\right]$

则 AB 船间距离的平方

$$d^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2$$

即

$$\begin{aligned}d^2&=(15t_0-15t)^2+\left[15\left(t_0+1\frac{1}{2}\right)-15t\right]^2\\&=450t^2-(900t_0+675)t+225t_0^2+225\left(t_0+1\frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

d^2 对时间 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}t}=900t-(900t_0+675)$$

AB 船相距最近，即 $\frac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}t}=0$，所以

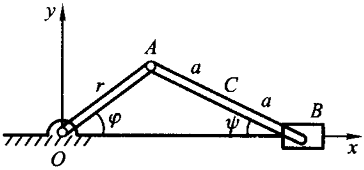
$$t-t_0=\frac{3}{4}\ \mathrm{h}$$

即午后 45 分钟时两船相距最近．

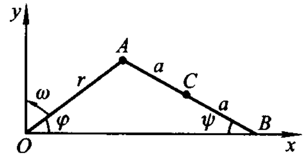
$$\begin{aligned}\text{最近距离 } s_{\min}&=\sqrt{\left(15\times\frac{3}{4}\right)^2+\left(15\times\frac{3}{4}-15\times\frac{3}{2}\right)^2}\ \mathrm{km}\\&=15.9\ \mathrm{km}\end{aligned}$$

1.3 曲柄 $\overline{OA}=r$，以匀角速 ω 绕定点 O 转动，如题 1.3.1 图．此曲柄借连杆 AB 使滑块 B 沿直线 Ox 运动．求连杆上 C 点的轨道方程及速度．设 $\overline{AC}=\overline{CB}=a$，$\angle AOB=\varphi$，$\angle ABO=\psi$．

解 (1) 如题 1.3.2 图，由题分析可知，点 C 的坐标为



题 1.3.1 图



题 1.3.2 图

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi + a\cos\psi & ① \\ y = a\sin\psi & ② \end{cases}$$

又由于在$\triangle AOB$中，有$\dfrac{r}{\sin\psi} = \dfrac{2a}{\sin\varphi}$（正弦定理），

所以
$$\sin\varphi = \frac{2a\sin\psi}{r} = \frac{2y}{r} \qquad ③$$

联立①②③运用$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

由①可得
$$\cos\varphi = \frac{x - a\cos\psi}{r} = \frac{x - \sqrt{a^2 - y^2}}{r} \qquad ④$$

④^2 + ③^2 = 1，得

$$\frac{4y^2}{r^2} + \frac{x^2 + a^2 - y^2 - 2x\sqrt{a^2 - y^2}}{r^2} = 1$$

得
$$3y^2 + x^2 + a^2 - r^2 = 2x\sqrt{a^2 - y^2}$$

化简整理可得

$$4x^2(a^2 - y^2) = (x^2 + 3y^2 + a^2 - r^2)^2$$

此即为 C 点的轨道方程.

(2) 要求 C 点的速度，即先对①②式分别求导

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\omega\sin\varphi - \dfrac{r\omega\cos\varphi}{2\cos\psi}\sin\psi \\ \dot{y} = \dfrac{r\omega\cos\varphi}{2} \end{cases}$$

其中 $\omega = \dot{\varphi}$

又因为
$$r\sin\varphi = 2a\sin\psi$$

对两边分别求导

故有 $$\dot{\psi}=\frac{r\omega\cos\varphi}{2a\cos\psi}$$

所以 $$V=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

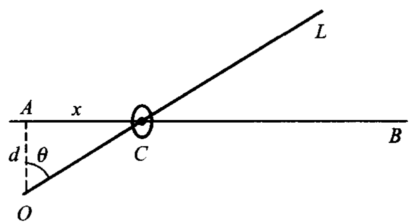
$$=\sqrt{\left(-r\omega\sin\varphi-\frac{r\omega\cos\varphi}{2\cos\psi}\sin\psi\right)^2+\frac{r^2\omega^2\cos^2\varphi}{4}}$$

$$=\frac{r\omega}{2\cos\psi}\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)}$$

1.4 细杆 OL 绕 O 点以匀角速 ω 转动，并推动小环 C 在固定的钢丝 AB 上滑动．图中的 d 为一已知常数，试求小环的速度及加速度的量值．

解 如题 1.4.1 图所示，OL 绕 O 点以匀角速度转动，C 在 AB 上滑动，因此 C 点有一个垂直杆的速度分量

$$v_{\perp}=\omega\times\overline{OC}=\omega\sqrt{d^2+x^2}$$



题 1.4.1 图

C 点速度 $$v=\frac{v_{\perp}}{\cos\theta}=v_{\perp}\sec\theta=\omega d\sec^2\theta=\omega\frac{d^2+x^2}{d}$$

又因为 $$\dot{\theta}=\omega$$

所以 C 点加速度 $$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\omega d\cdot2\sec\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$=2d\omega^2\sec^2\theta\tan\theta=\frac{2\omega^2x(d^2+x^2)}{d^2}$$

1.5 矿山升降机作加速度运动时，其变加速度可用下式表示：

$$a=c\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right)$$

式中 c 及 T 为常数，试求运动开始 t 秒后升降机的速度及其所走

过的路程.已知升降机的初速度为零.

解 由题可知,变加速度表示为

$$a=c\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right) \quad ①$$

由加速度的微分形式我们可知

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad ②$$

把②代入①即得

$$\mathrm{d}v=c\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right)\mathrm{d}t$$

对等式两边同时积分

$$\int_0^v \mathrm{d}v = c\int_0^t\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right)\mathrm{d}t$$

可得:

$$v=ct+\frac{2T}{\pi}c\cos\frac{\pi t}{2T}+D \quad (D\text{ 为常数})$$

代入初始条件:$t=0$ 时,$v=0$

故 $D=-\frac{2T}{\pi}c$

即 $v=c\left[t+\frac{2T}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{2T}-1\right)\right]$

又因为 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

所以 $\mathrm{d}s=c\left[t+\frac{2T}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2T}t-1\right)\right]\mathrm{d}t$

对等式两边同时积分,可得:

$$s=c\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{2T}{\pi}\left(\frac{2T}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2T}-t\right)\right]$$

1.6 一质点沿位矢及垂直于位矢的速度分别为 λr 及 $\mu\theta$,式中 λ 及 μ 是常数.试证其沿位矢及垂直于位矢的加速度为

$$\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r},\ \mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)$$

解 由题可知质点沿位矢速度

$$v_{//} = \lambda r \qquad ①$$

沿垂直于位矢速度

$$v_{\perp} = \mu\theta \qquad ②$$

又因为 $v_{//} = \dot{r} = \lambda r$,即

$$\dot{r} = \lambda r \qquad ③$$

$$v_{\perp} = \dot{\theta} r = \mu\theta,\ 即\ \dot{\theta} = \frac{\mu\theta}{r} \qquad ④$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{i}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\boldsymbol{j})(取位矢方向\ \boldsymbol{i},垂直位矢方向\ \boldsymbol{j})$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{i}) = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\boldsymbol{i} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\boldsymbol{j}) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\boldsymbol{j} + r\frac{d\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{j} + r\ddot{\theta}\boldsymbol{j} - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{i}$$

故 $\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{j}$

即 沿位矢方向加速度 $a_{//} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ⑤

垂直位矢方向加速度 $a_{\perp} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ ⑥

对③求导 $\ddot{r} = \lambda\dot{r} = \lambda^2 r$ ⑦

对④求导 $\ddot{\theta} = -\frac{\mu\theta}{r^2}\dot{r} + \frac{\mu}{r}\dot{\theta}$

$$= \mu\theta\left(\frac{\mu}{r} + \lambda\right) \qquad ⑧$$

把③④⑦⑧代入⑤⑥式中可得

$$a_{//} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

$$a_{\perp} = \mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$$

1.7 试自

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

出发,计算 $\ddot{x}$ 及 $\ddot{y}$. 并由此推出径向加速度 a_r 及横向加速度 a_θ.

解　由题可知$\begin{cases} x = r\cos\theta & ① \\ y = r\sin\theta & ② \end{cases}$

对①求导　$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta}$　③

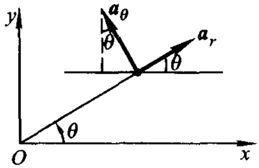
对③求导　$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta$　④

对②求导　$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$　⑤

对⑤求导　$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta$　⑥

对于加速度 a，我们有如下关系见题 1.7.1 图.

即　$\begin{cases} \ddot{x} = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta & ⑦ \\ \ddot{y} = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta & ⑧ \end{cases}$



题 1.7.1 图

对⑦⑧两式分别作如下处理：⑦ × $\cos\theta$，⑧ × $\sin\theta$，

即得$\begin{cases} \ddot{x}\cos\theta = a_r\cos^2\theta - a_\theta\sin\theta\cos\theta & ⑨ \\ \ddot{y}\sin\theta = a_r\sin^2\theta + a_\theta\sin\theta\cos\theta & ⑩ \end{cases}$

⑨ + ⑩得　$a_r = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta$　⑪

把④⑥代入⑪

得

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

同理可得

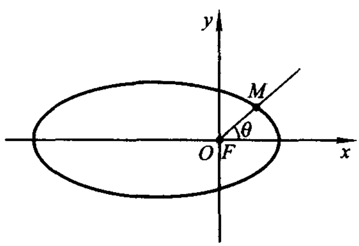
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

1.8　直线 FM 在一给定的椭圆平面内以匀角速 ω 绕其焦点 F 转动. 求此直线与椭圆的交点 M 的速度. 已知以焦点为坐标原点的椭圆的极坐标方程为

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

式中 a 为椭圆的半长轴，e 为偏心率，都是常数.

解　以焦点 F 为坐标原点，运动如题 1.8.1 图所示，则



题 1.8.1 图

M 点坐标 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

对 x, y 两式分别求导

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

故 $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2$

$= \dot{r}^2 + r^2\omega^2$

如图所示的椭圆的极坐标表示法为

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

对 r 求导可得 （利用$\dot{\theta} = \omega$）

$$\dot{r} = \frac{e\sin\theta\omega}{a(1-e^2)}r^2$$

又因为 $\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)} + \frac{e\cos\theta}{a(1-e^2)}$

即 $\cos\theta = \frac{a(1-e^2) - r}{re}$

所以 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{a^2(1-e^2)^2 + r^2 - 2ar(1-e^2)}{r^2e^2}$

故有 $v^2 = \frac{e^2\omega^2r^4}{a^2(1-e^2)^2}\sin^2\theta + r^2\omega^2$

$= \frac{e^2\omega^2r^4}{a^2(1-e^2)^2}\left[1 - \frac{a^2(1-e^2)^2 + r^2 - 2ar(1-e^2)}{r^2e^2}\right] + r^2\omega^2$

$= \frac{r^2\omega^2}{a^2(1-e^2)}\cdot\left[\frac{e^2r^2 - r^2 + 2ar(1-e^2)}{1-e^2}\right]$

$= \frac{\omega^2r^2}{b^2}(2a-r)r$

即 $v = \frac{r\omega}{b}\sqrt{r(2a-r)}$

（其中 $b^2 = (1-e^2)a^2$， b 为椭圆的半短轴）

1.9 质点作平面运动，其速率保持为常数. 试证其速度矢量

$\boldsymbol{v}$ 与加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 正交.

证 质点作平面运动,设速度表达式为

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$$

令 θ 为位矢与 x 轴正向的夹角,所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + v_x \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + v_y \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} - v_y\dot{\theta}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + v_x\dot{\theta}\right)\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} &= \left[\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} - v_y\dot{\theta}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + v_x\dot{\theta}\right)\boldsymbol{j}\right]\cdot(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}) \\ &= v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} - v_x v_y\dot{\theta} + v_y \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + v_x v_y\dot{\theta} \\ &= v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_y \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

又因为速率保持为常数,即

$$v_x^2 + v_y^2 = C,C\text{ 为常数}.$$

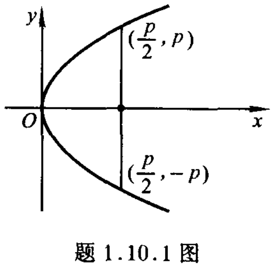
对等式两边求导 $2v_x\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + 2v_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = 0$

即速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 正交.

1.10 一质点沿着抛物线 $y^2 = 2px$ 运动.其切向加速度的量值为法向加速度量值的 $-2k$ 倍.如此质点从正焦弦的一端 $\left(\dfrac{p}{2}, p\right)$ 以速度 u 出发,试求其达到正焦弦另一端时的速率.

解 由题可知运动轨迹如题 1.10.1 图所示.



题 1.10.1 图

则质点切向加速度 $a_{\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

法向加速度 $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{\rho}$

而且有关系式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2k\frac{v^2}{\rho} \quad ①$$

又因为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ②$$

$$y^2=2px,$$

所以

$$y'=\frac{p}{y} \quad ③$$

$$y''=-\frac{p^2}{y^3} \quad ④$$

联立①②③④

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2kv^2\frac{\frac{p^2}{|y^3|}}{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ⑤$$

又

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dot{y}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

把 $y^2=2px$ 两边对时间求导得

$$\dot{x}=\frac{y\dot{y}}{p}$$

又因为

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$$

所以

$$\dot{y}^2=\frac{v^2}{1+\frac{y^2}{p^2}} \quad ⑥$$

把⑥代入⑤

$$\frac{v}{\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=-2kv^2\cdot\frac{\frac{p^2}{y^3}}{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

即可化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-2kp\frac{\mathrm{d}y}{y^2+p^2}$$

对等式两边积分

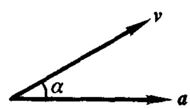
$$\int_u^v \frac{dv}{v} = -2kp\int_p^{-p} \frac{dy}{y^2+p^2}$$

所以　$v = ue^{-k\pi}$

1.11　质点沿着半径为 r 的圆周运动,其加速度矢量与速度矢量间的夹角 α 保持不变.求质点的速度随时间而变化的规律.已知初速度为 v_0.

解　由题可知速度和加速度有关系如题1.11.1图.

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{v^2}{r} = a\sin\alpha \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} = a\cos\alpha \end{cases}$$



题1.11.1图

两式相比可得

$$\frac{v^2}{r\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{dv}{dt}$$

即　$\dfrac{1}{r}\cot\alpha\, dt = \dfrac{dv}{v^2}$

对等式两边分别积分

$$\int_0^t \frac{1}{r}\cot\alpha \cdot dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}$$

即　$\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{v_0} - \dfrac{t}{r}\cot\alpha$

此即质点的速度随时间而变化的规律.

1.12　在上题中,试证其速度可表为

$$v = v_0 e^{(\theta-\theta_0)\cot\alpha}$$

式中 θ 为速度矢量与 x 轴间的夹角,且当 $t=0$ 时,$\theta=\theta_0$.

证　由题1.11可知质点运动有关系式

$$\begin{cases} \dfrac{v^2}{r} = a\sin\alpha & ① \\ \dfrac{dv}{dt} = a\cos\alpha & ② \end{cases}$$

所以$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\omega$,联立①②,有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\cdot\omega=\frac{v^2}{r\sin\alpha}\cos\alpha .$$

又因为 $v=\omega r$,

所以 $\quad \frac{\mathrm{d}v}{v}=\cot\alpha\,\mathrm{d}\theta$

对两边分别积分,利用初始条件 $t=0$ 时,$\theta=\theta_0$,

$$v=v_0\mathrm{e}^{(\theta-\theta_0)\cot\alpha}$$

1.13 假定一飞机从 A 处向东飞到 B 处,而后又向西飞回原处.飞机相对于空气的速度为 $\boldsymbol{v}'$,而空气相对于地面的速度则为 $\boldsymbol{v}_0$. A 与 B 之间的距离为 l. 飞机相对于空气的速度 v'保持不变.

(a) 假定 $v_0=0$,即空气相对于地面是静止的,试证来回飞行的总时间为

$$t_0=\frac{2l}{v'}$$

(b) 假定空气速度为向东(或向西),试证来回飞行的总时间为

$$t_B=\frac{t_0}{1-v_0^2/v'^2}$$

(c) 假定空气的速度为向北(或向南),试证来回飞行的总时间为

$$t_N=\frac{t_0}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}$$

证 (a) 当 $v_0=0$,即空气相对地面是静止的,有 $\boldsymbol{v}_{绝}=\boldsymbol{v}_{相}+\boldsymbol{v}_{牵}$.

式中 $\boldsymbol{v}_{绝}$ 指质点相对静止参考系的绝对速度,$\boldsymbol{v}_{相}$ 指质点相对运动参考系的速度,$\boldsymbol{v}_{牵}$ 指运动参考系相对静止参考系的速度.

可知飞机相对地面参考系速度:$\boldsymbol{v}_{绝}=\boldsymbol{v}'$,即飞机在 AB 间作匀速直线运动.所以飞机来回飞行的总时间 $t_0=\frac{2l}{v'}$.

(b) 假定空气速度向东,则当飞机向东飞行时速度

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_0$$

飞行时间

$$t_1=\frac{l}{v'+v_0}$$

当飞机向西飞行时速度

$$v_2=\boldsymbol{v}_{相}+\boldsymbol{v}_{牵}=v'-v_0$$

飞行时间 $t_2=\frac{l}{v'-v_0}$

故来回飞行时间

$$t=t_1+t_2=\frac{l}{v'+v_0}+\frac{l}{v'-v_0}$$

$$=\frac{2v'l}{v'^2-v_0^2}$$

即

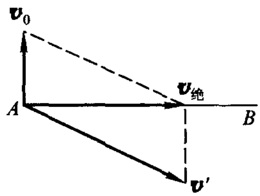
$$t=\frac{\frac{2l}{v'}}{1-\frac{v_0^2}{v'^2}}=\frac{t_0}{1-\frac{v_0^2}{v'^2}}.$$

同理可证,当空气速度向西时,来回飞行时间 $t=\frac{t_0}{1-\frac{v_0^2}{v'^2}}$

(c) 假定空气速度向北.有速度矢量关系如题 1.13.1 图

$$\boldsymbol{v}_{绝}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$$

$$v=\sqrt{v'^2-v_0^2}$$



题 1.13.1 图

所以来回飞行总时间

$$t=\frac{2l}{\sqrt{v'^2-v_0^2}}$$

$$=\frac{\frac{2l}{v'}}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}=\frac{t_0}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}$$

同理可证空气速度向南时,来回飞行总时间仍为 $t=\frac{t_0}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}$.