


经济数学(一)

C *ALCULUS*

微积分

孙激流 沈大庆\主编

 首都经济贸易大学出版社

经济数学(一)

微 积 分

主 编 孙激流 沈大庆
副主编 王希云 殷秀清 张清利

首都经济贸易大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分/孙激流,沈大庆主编.—北京:首都经济贸易大学出版社,2004.10
ISBN 7-5638-1219-9

I.微… II.①孙… ②沈… III.微积分—高等学校—教材 IV.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 100622 号

微积分

孙激流 沈大庆 主编

出版发行 首都经济贸易大学出版社
地 址 北京市朝阳区红庙(邮编 100026)
电 话 (010)65976483 65065761 65071505(传真)
E-mail publish @ cueb. edu. cn
经 销 全国新华书店
照 排 首都经济贸易大学出版社激光照排服务部
印 刷 北京通州区永乐印刷厂
开 本 787 毫米×980 毫米 1/16
字 数 566 千字
印 张 29.5
版 次 2004 年 10 月第 1 版 第 1 次印刷
印 数 1~3 000
书 号 ISBN 7-5638-1219-9/O·27
定 价 37.00 元

图书印装若有质量问题,本社负责调换

版权所有 侵权必究

前 言

本教材是为适应财经类高校教学改革的形势,按照教学大纲的基本要求编写的。参加本教材编写工作的都是有多年教学实践的教师,他们在编写过程中结合自己的经验并参考了大量国内外的资料,使本教材在众多的同类教材中具有独特的优势,主要表现在以下几方面:

第一,更注重数学学科的系统性和科学性。在教材内容的结构上,许多地方打破了传统的权威教材的框架,增加了一些必要的概念和结论,改变了通行的一些“似是而非”的证明和表述方法,使整个体系更为严密完整,衔接更为流畅自然。这些在极限、微分、积分、级数理论等方面都有所体现。

第二,更注重经济类学生的特点。根据大纲对经济类学生的要求以及学生的现状,在教材中尽量避免繁复的或需用更多数学基础的定理证明,但对证明过程能够体现微积分理论基本思想和基本方法的重要定理大多都给出了证明。这样便于学生从整体上把握教材的内容,加深对重要内容和方法的理解与掌握。

第三,更注重微积分学科的实用性。教材每部分内容都讲述了微积分的应用实例,特别是在经济方面的应用。这有益于学生学以致用,并提高学习本课程及后续课程的兴趣。

第四,更注重兼顾各个层次学生的不同需要。本教材内容丰富,并有大量例题。教师可根据对不同层次学生的要求,选取其中的部分内容讲授。习题由浅入深,分为A类习题和B类习题,各类习题都包括填空题、选择题和计算证明题。A类习题相对容易,符合教学大纲对学生的基本要求。B类习题相对难,适合有更大兴趣的学生练习。此外,每章最后还编排了典型例题分析,其中的例题具有灵活性、综合性,都有一定难度,大多与考研水平相当。

第五,注重与教学软件结合。本教材最后一章介绍了数学软件 Mathematica 的使用,帮助有余力的学生进一步理解和掌握教材内容,为学生能更生动活泼主动地学习提供了新的方法和工具。

能在教学改革大潮中编写一本适应形势发展需要,有利于提高学生抽象思维

能力和自身素质,有利于学生用所学知识解决实际问题,有利于学生学习后续课程,有利于学生一生发展的好教材是我们最大的心愿。我们希望本教材能在这方面作出一定的贡献,同时希望读者提出宝贵的意见。

本教材的第一章,第二、三章,第七、九、十章分别由首都经济贸易大学的沈大庆、殷秀清、孙激流编写;第四、五、八章由太原理工大学的王希云编写;第六章由北京广播电视大学的张清利编写。主编为孙激流、沈大庆,副主编为王希云、殷秀清、张清利。首都经济贸易大学的李星梅、陶桂平、梅超群、张琳、刘强、孙阳在编写过程中也做了大量的工作,并验算了全部习题,在这里向他们一并表示感谢。

最后特别感谢北京师范大学蔡俊亮教授为本教材的出版给予的多方面帮助。

编 者

2004年8月

目 录

第一章	函数与极限	(1)
§ 1.1	函数	(2)
§ 1.2	反函数	(5)
§ 1.3	基本初等函数	(7)
§ 1.4	复合函数	(12)
§ 1.5	极限	(13)
§ 1.6	关于极限的若干定理	(24)
§ 1.7	无穷小量与无穷大量	(34)
§ 1.8	函数的连续性	(41)
§ 1.9	闭区间上连续函数的性质	(45)
	典型例题分析	(47)
	习题一	(48)
第二章	导数与微分	(57)
§ 2.1	导数概念	(57)
§ 2.2	基本初等函数的导数	(64)
§ 2.3	求导法则	(66)
§ 2.4	微分	(74)
§ 2.5	高阶导数与高阶微分	(80)
§ 2.6	导数概念在经济学中的应用	(84)
	典型例题分析	(90)
	习题二	(93)

第三章	中值定理与导数应用	(102)
§ 3.1	中值定理	(102)
§ 3.2	洛必达(L. Hospital)法则	(108)
§ 3.3	泰勒公式	(113)
§ 3.4	函数单调性判别法	(119)
§ 3.5	函数的极值与最值	(122)
§ 3.6	曲线凹凸性、拐点的判别	(128)
§ 3.7	函数图象的作法	(130)
	典型例题分析	(136)
	习题三	(140)
第四章	不定积分	(152)
§ 4.1	不定积分的概念与性质	(152)
§ 4.2	基本积分公式与直接积分法	(155)
§ 4.3	换元积分法	(158)
§ 4.4	分部积分法	(166)
§ 4.5	有理函数的积分	(169)
	典型例题分析	(172)
	习题四	(176)
第五章	定积分	(181)
§ 5.1	定积分的概念	(181)
§ 5.2	定积分的基本性质	(188)
§ 5.3	微积分学基本定理	(193)
§ 5.4	定积分的计算	(198)
§ 5.5	广义积分(初步)	(204)
§ 5.6	定积分的应用	(210)
	典型例题分析	(223)
	习题五	(227)

第六章 无穷级数..... (237)

§ 6.1 无穷级数的概念与性质 (237)
§ 6.2 正项级数 (242)
§ 6.3 任意项级数 (248)
§ 6.4 幂级数 (252)
§ 6.5 函数的幂级数展开 (259)
典型例题分析 (268)
习题六 (270)

第七章 二元函数微分学 (276)

§ 7.1 空间解析几何简介 (276)
§ 7.2 二元函数 (291)
§ 7.3 偏导数与全微分 (298)
§ 7.4 复合函数与隐函数微分法 (310)
§ 7.5 二元函数的极值与最值问题 (317)
§ 7.6 二重积分 (327)
§ 7.7 二重积分的计算 (332)
§ 7.8 广义二重积分(初步) (343)
§ 7.9 二重积分的应用 (344)
典型例题分析 (350)
习题七 (354)

第八章 微分方程..... (365)

§ 8.1 微分方程的基本概念 (365)
§ 8.2 一阶微分方程 (368)
§ 8.3 高阶线性微分方程 (378)
§ 8.4 可降阶的高阶微分方程 (389)
§ 8.5 微分方程在经济学中的应用 (393)
典型例题分析 (395)
习题八 (401)

第九章	差分方程简介	(408)
§ 9.1	差分方程的概念	(408)
§ 9.2	一阶常系数线性差分方程	(410)
§ 9.3	二阶常系数线性差分方程	(414)
	典型例题分析	(417)
	习题九	(419)
第十章	Mathematica 的使用	(421)
§ 10.1	Mathematica 简介	(421)
§ 10.2	Mathematica 在高等数学中的应用	(434)

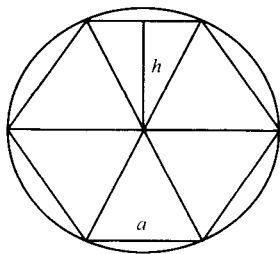
第一章 函数与极限

世间一切事物都在不停地变化,而变化的事物间又相互联系、相互依赖.为在数量上把握这种事物变化和事物之间联系的规律性,在数学上产生了变量和函数的概念.在初等数学中我们已经对函数有了一些了解,微积分学中研究的主要对象仍是函数.那么,在微积分学中对函数的研究与初等数学中对函数的研究有什么不同呢?我们先看一个能够体现微积分学中解决问题的思想和方法的例子.

已知一个圆的周长为 L , 半径为 R , 求这个圆的面积 S . 先作圆的内接正 n 边形, 用内接正 n 边形的面积

$$S_n = \frac{1}{2} nah = \frac{1}{2} lh$$

(其中 l 是正 n 边形的周长, h 是边心距, a 是边长) 作为 S 的近似值. 当内接正 n 边形的边数 n 愈大时, S_n 与 S 愈接近. 那么让 n 无限增大, 即要多大可以有多大 (记为 $n \rightarrow \infty$), 这时正 n 边形的周长 l 就会无限接近圆的周长 L , 边心距 h 则无限接近圆的半径 R , 而 S_n 无限接近 S . 这种无限接近的“量变”、“渐变”最终会引起“质变”、“突变”: l 变成了 L , h 变成了 R , S_n 变成了 S . 在微积分学中把这种变化的结果记为



$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} lh = \frac{1}{2} LR = S$$

称之为当 n 趋于无穷大时 S_n 的极限.

这个例子说明微积分学解决问题时, 使用了不同于初等数学的“极限”思想和“取极限”的方法. 可以这样说, 微积分学是以极限理论为基础研究函数的一门数学学科. 因此, 函数和极限是微积分学的两个最基本的概念.

§ 1.1 函数

一、变量

所谓变量就是变化的量,可以变动的量,或说在某一过程中可以取不同值的量.我们今后只考虑取值是实数的变量.一个变量的所有取值构成的数集称为这个变量的变域.常量是一种特殊的变量,是在所考察的过程中,始终只取同一个数的变量.

二、函数

同一问题中经常会出现几个变量,且它们相互联系、相互依赖.微积分学中不是孤立地研究每一个变量,而是着重研究变量之间的确定的依赖关系.

【例1】在自由落体运动中,路程变量 S 随时间变量 t 而变,它们之间的依赖关系可由公式

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

表示.

2 【例2】某厂生产某产品,日固定成本为 100 元,生产一个单位产品的成本为 5 元,该厂日成本变量 y 随产品的日产量变量 x 的变化而变化,它们之间的依赖关系可由公式

$$y = 100 + 5x$$

表示.

【例3】 x 是取值为小于等于 10 的自然数的变量,变量 y 为小于等于 x 的素数的个数, y 与 x 的依赖关系可用下面的对应来表示:

$$x = 1 \text{ 时}, y = 0;$$

$$x = 2 \text{ 时}, y = 1;$$

$$x = 3, 4 \text{ 时}, y = 2;$$

$$x = 5, 6 \text{ 时}, y = 3;$$

$x=7,8,9,10$ 时, $y=4$.

【例 4】出租车的运价规定是:不超过 3 公里是 10 元;3 公里到 15 公里之间,每公里 1.6 元;15 公里以上每公里 2.4 元.那么,运费变量 y 与运载公里数变量 x 之间的依赖关系可表示为

$$y = \begin{cases} 10 & 0 < x \leq 3 \\ 10 + 1.6(x - 3) & 3 < x \leq 15 \\ 10 + 1.6 \times 12 + 2.4 \times (x - 15) & 15 < x \end{cases}$$

两个变量之间的相互依赖关系比比皆是,函数的概念就是从中抽象出来的.

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个值 x , 按照某种对应规则 f , 都可以确定变量 y 的惟一一个值, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 并记为 $y=f(x), x \in D$. x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 D 称为函数的定义域, 也可记为 $D(f)$. 由 $x=x_0$ 按对应规则 f 确定的 y 的取值, 记做 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$, 称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值. 所有函数值构成的集合 $\{y|y=f(x), x \in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域, 记做 Z 或 $Z(f)$.

函数 $y=f(x)$ 中的“ f ”表示对应规则, 称为定义在 D 上的 y 与 x 的函数关系, 它仅仅是一个记号, 完全可以用别的记号来表示, 如 g, h, F, φ, \dots , 但应注意, 不同的函数关系必须用不同的记号.

确定一个函数, 主要是函数关系和定义域, 两个函数只有当定义域相同且函数关系相同时才是相同的. 至于同一函数中的自变量和因变量用什么记号是无关紧要的. 当然, 同一个函数中的自变量和因变量应有所区别.

变量之间的函数关系常常可以用一个数学解析公式来表示(如例 1、例 2), 但有些函数关系却不能或很难用一个数学解析公式来表示(如例 3). 另外, 还有一些函数关系需要用不同的几个解析公式“分段”来表示(如例 4), 这样的函数称为分段函数.

如果可以用一个解析公式表示的函数, 没有给出定义域, 一般就认为其定义域是使解析公式有意义的自变量的取值所构成的集合.

【例 5】求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0) \quad (2) y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

解 (1) 为使 $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 有意义, x 的取值应满足 $a^2 - x^2 > 0$, 即 $x^2 < a^2$.

解得: $-a < x < a$

所以 $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 的定义域为 $(-a, a)$.

(2) 为使 $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 有意义, x 的取值应满足 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, 且 $x \neq 1$, 即满足

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} 1+x \leq 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$$

解得: $-1 \leq x < 1$

所以 $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的定义域为 $[-1, 1)$.

三、函数的图象

如果 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数, 在平面上引进直角坐标系, 对于 D 中的每一个 x , 都可以确定出平面上的一个点 $M(x, y)$, 其中 $y = f(x)$, 让 x 取遍 D 中所有的值, 点 $M(x, y)$ 便形成平面上的一个图形, 这个图形称为 $y = f(x)$ 的图象. 例 1 和例 3 给出的函数图象见图 1-1 和图 1-2.

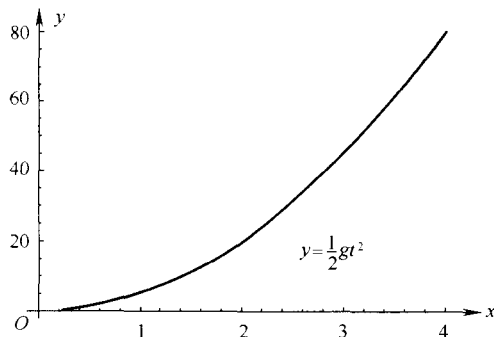


图 1-1

由函数的定义容易知道, 过 x 轴上任一点做一条与 x 轴垂直的直线, 这条直线与函数 $y = f(x)$ 的图象至多有一个交点.

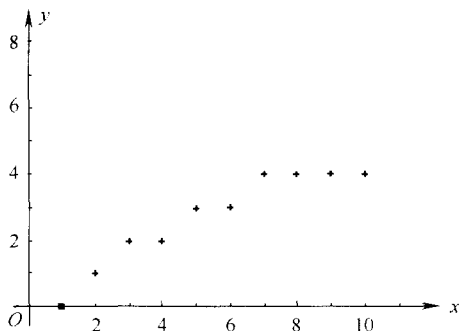


图 1-2

§ 1.2 反函数

在函数的定义中有两个变量,一个是自变量,一个是因变量,一主一从,地位不同.然而,在实际问题中,哪个是自变量,哪个是因变量,并不是绝对的,要依所研究的具体问题而定,如在 § 1.1 的例 2 中,要由已知的产量来确定成本,则 x 是自变量, y 是因变量,它们之间的关系为 $y = 100 + 5x$. 要由已知的成本来确定产量,则 y 是自变量, x 是因变量,它们之间的关系可通过 $y = 100 + 5x$ 解出 x 得到,即

$$x = \frac{y - 100}{5}$$

这说明在一定条件下,函数的自变量与因变量可以相互转化得到一个新的函数,这个函数叫做原来函数的反函数.反函数的一般定义如下:

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z . 如果对于 Z 中的每一个 y 值都存在 $D(f)$ 中惟一的一个满足 $y = f(x)$ 的 x 与之对应,这样确定的定义域为 Z , 值域为 $D(f)$, 以 y 为自变量,以 x 为因变量的函数,称为函数 $y = f(x)$ 的反函数,并记为 $x = f^{-1}(y)$.

不是每一个函数都存在反函数.例如,当某个 $y \in Z, D(f)$ 中满足 $y = f(x)$ 的 x 不止一个时, $y = f(x)$ 就不存在反函数. 根据反函数的定义,容易知道,经过 y 轴上任一点作 x 轴的平行线,而这条直线与 $y = f(x)$ 的图象至多有一个交点时, $y = f(x)$ 一定存在反函数.

如果函数 $y = f(x)$ 存在反函数 $x = f^{-1}(y)$, 则在同一个直角坐标系中两个函

数的图象是同一个图形,不过对 $x = f^{-1}(y)$ 来说,自变量 y 的取值是用纵轴上的点来表示.按照习惯总是用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,那么, $y = f(x)$ 的反函数就可记为 $y = f^{-1}(x)$,其图象与 $y = f(x)$ 的图象(在同一个直角坐标系中)关于 I, III 象限角平分线对称.

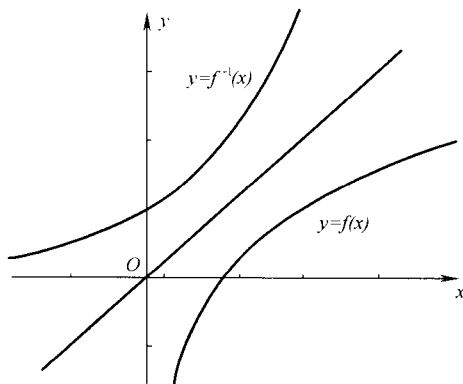


图 1-3

有些函数不存在反函数,但是,如果我们限定了 x 的取值范围,即改变函数的定义域,也可以定义反函数.如 $y = \sin x (-\infty < x < +\infty)$ 没有反函数.但是,如果限定 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,则 $y = \sin x$ 便有反函数,因为任何平行于 x 轴的直线与 $y = \sin x$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象至多有一个交点(见图 1-4).这个反函数我们称之为反正弦函数,记为 $y = \arcsin x$.

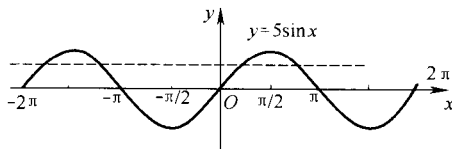


图 1-4

类似地可定义反余弦函数 $y = \arccos x$, 反正切函数 $y = \arctan x$, 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$.

§ 1.3 基本初等函数

下面的函数称为基本初等函数：

1. 常函数

$$y = C \quad (C \text{ 为一常数})$$

常函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值为 $\{C\}$. 其图象是一条平行于 x 轴的直线, 见图 1-5.

2. 幂函数

$$y = x^a \quad (a \text{ 为一给定的实数})$$

幂函数的定义域因 a 的不同而不同.

例如：

$y = x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值为 $[0, +\infty)$;

$y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 值为 $[0, +\infty)$;

$y = x^{-1}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 值为 $(0, +\infty)$;

$y = x^{-2}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值为 $(0, +\infty)$;

如果 a 是无理数, 则规定 $y = x^a$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

图 1-6 给出以上列举的几个函数的图象.

3. 指数函数

$$y = a^x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

指数函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值为 $(0, +\infty)$. 其图象见图 1-7.

4. 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

对数函数是指数函数 $y = a^x$ 的反函数, 定义域为 $(0, +\infty)$, 值为 $(-\infty, +\infty)$. 其图象见图 1-8.

5. 三角函数

(1) 正弦函数

$$y = \sin x$$

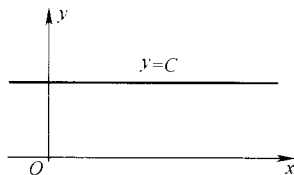


图 1-5

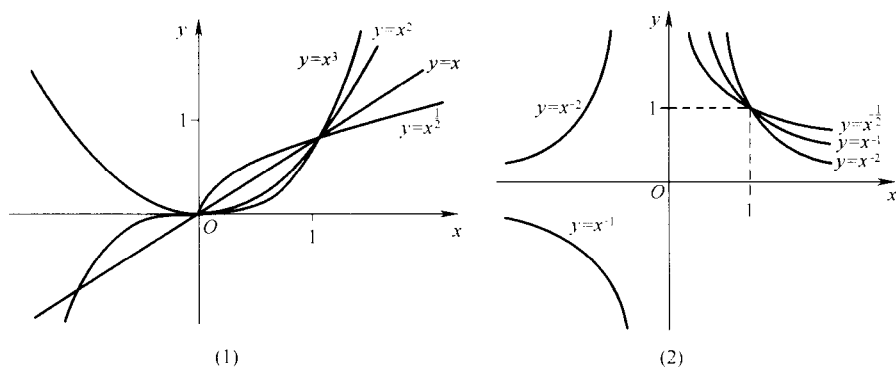


图 1-6

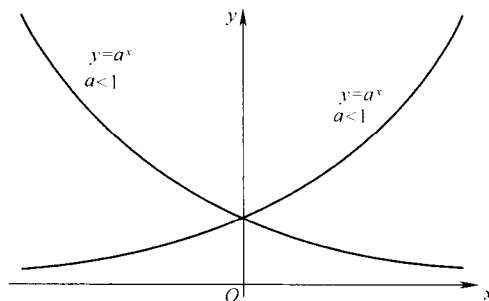


图 1-7

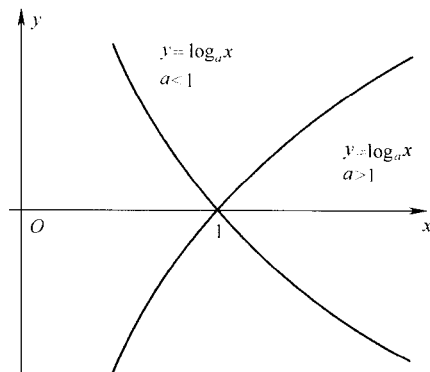


图 1-8