走向IMO

数学奥林匹克试题集锦（2005）

顾问 裘宗沪

2005年IMO中国国家集训队教练组
选拔考试命题组 编

全国高中联赛
CMO（冬令营）
女子奥林匹克
西部奥林匹克
国家队集训
国家队选拔考
IMO
……

华东师范大学出版社

走向IMO

(2005)

数学奥林匹克试题集锦

2005年IMO中国国家集训队教练组
选拔考试命题组
编

图书在版编目(CIP)数据

走向 IMO：数学奥林匹克试题集锦：2005/2005 年 IMO 中国国家集训队教练组，选拔考试命题组编. —上海：华东师范大学出版社，2005. 8

ISBN 7-5617-4413-7

Ⅰ. 走…　Ⅱ. ①2…②选…　Ⅲ. 数学课-中学-试题　Ⅳ. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 089777 号

走向 IMO

数学奥林匹克试题集锦(2005)

编　　者　2005 年 IMO 中国国家集训队教练组、选拔考试命题组
策划组稿　倪　明
责任编辑　徐惟简　陈信漪
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购)电话 021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东　中南地区 021-62458734
　　　　　华北　东北地区 021-62571961
　　　　　西南　西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http：//www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　890×1240　32 开
插　　页　4
印　　张　7
字　　数　152 千字
版　　次　2005 年 8 月第一版
印　　次　2005 年 8 月第一次
书　　号　ISBN 7-5617-4413-7/O·155
定　　价　15.00 元

出 版 人　朱杰人

前　言

本书以2005年国家集训队的测试题和国家队的训练题为主体，搜集了2004年8月至2005年7月间国内主要的数学竞赛及2005年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了2005年俄罗斯和美国数学奥林匹克的试题与解答. 这些试题大多是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

2005年国家集训队教练组由华东师大熊斌、中国科大王建伟、苏州大学余红兵、上海大学冷岗松和上海格致中学郑仲义组成，国家队选拔考试命题组的成员为：熊斌、王建伟、陈永高、冷岗松、余红兵、李伟固、朱华伟、郑仲义. 在集训期间参与培训的专家还有冯志刚、陶平生和冯祖鸣等. 应华东师大出版社倪明先生的提议，继续将2004～2005年度的中国数学奥林匹克的一些主要活动的情况以及试题和解答汇编成册（华东师大出版社已经出版了前两年的《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦》)，介绍给广大数学爱好者和数学奥林匹克教练员，为他们提供一份参考资料.

在过去的一年中，教练组和往年一样，得到了裘宗沪、王杰、潘承彪等专家们的鼓励、支持和指导，得到了吴建平先生的各方面的帮助，在此，对他们表示衷心的感谢. 同时也感谢美国队领队冯祖鸣先生为我们提供了2005年美国数学奥林匹克试题.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造性的工作.本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2004年全国高中数学联赛及加试由李胜宏整理，2005年中国数学奥林匹克由熊斌整理，2004年第3届中国女子数学奥林匹克由朱华伟整理，2004年第4届中国西部数学奥林匹克由刘诗雄整理，2005年中国东南地区数学奥林匹克由冷岗松整理，2005年国家集训队测试题由郑仲义整理，2005年中国国家队选拔考试题由余红兵整理，2005年国家队培训题由王建伟整理，2005年国际数学奥林匹克(第46届IMO)由熊斌整理.2005年俄罗斯数学奥林匹克由苏淳和李伟固提供，2005年美国数学奥林匹克的解答由冯志刚提供.

囿于作者的水平，加上编写时间仓促，不足和错误在所难免，请广大读者朋友批评指正，不吝指教.

2005年IMO中国国家集训队教练组

选拔考试命题组

2005年7月

目　录

2004 年全国高中数学联赛

2004 年全国高中数学联赛与加试由中国数学会普及工作委员会和海南省数学会负责命题.

联赛试题由 6 个选择题、6 个填空题和 3 个解答题组成，满分 150 分. 加试试题共 3 个大题，每题 50 分. 各省市总分成绩居前的同学荣获一等奖(全国共 1 000 名)，他们具有免试直升大学的资格.

全国各省市成绩优异的同学才能获得参加次年中国数学奥林匹克的资格，因此，它是我国中学生走向 IMO 需要跨过的第一步.

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 选择题只设 6 分和 0 分两档，填空题只设 9 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时可参照本评分标准适当划分档次评分，5 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1 设锐角 θ 使关于 x 的方程 $x^2+4x\cos\theta+\cot\theta=0$ 有重根,则 θ 的弧度数为(   ).

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

解 因方程 $x^2+4x\cos\theta+\cot\theta=0$ 有重根,故

$$\Delta=16\cos^2\theta-4\cot\theta=0,$$

即

$$4\cot\theta(2\sin2\theta-1)=0.$$

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$,得

$$\sin2\theta=\frac{1}{2},$$

所以

$$2\theta=\frac{\pi}{6} \text{ 或 } 2\theta=\frac{5\pi}{6},$$

于是 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{12}$. 故选 B.

2 已知 $M=\{(x, y)\mid x^2+2y^2=3\}$, $N=\{(x, y)\mid y=mx+b\}$. 若对于所有 $m\in\mathbf{R}$,均有 $M\cap N\neq\varnothing$,则 b 的取值范围是(   ).

(A) $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ (B) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

(C) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ (D) $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

解 对任何 $m\in\mathbf{R}$,均有 $M\cap N\neq\varnothing$,相当于点 $(0, b)$ 在椭

圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1$ 上或它的内部，所以

$$\frac{2b^2}{3}\leqslant 1,\quad 即 -\frac{\sqrt{6}}{2}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故选 A.

3 不等式 $\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$ 的解集为(　　).

(A) $[2, 3)$　　(B) $(2, 3]$　　(C) $[2, 4)$　　(D) $(2, 4]$

解　原不等式等价于 $\begin{cases}\sqrt{\log_2 x-1}-\frac{3}{2}\log_2 x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}>0,\\ \log_2 x-1\geqslant 0.\end{cases}$

设 $\sqrt{\log_2 x-1}=t$，则有

$$\begin{cases}t-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}>0,\\ t\geqslant 0,\end{cases}$$

解得　　$0\leqslant t<1$，　即 $0\leqslant\log_2 x-1<1$，

所以 $2\leqslant x<4$. 故选 C.

4 设点 O 在 $\triangle ABC$ 内部，且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积的比为(　　).

(A) 2　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) 3　　(D) $\frac{5}{3}$

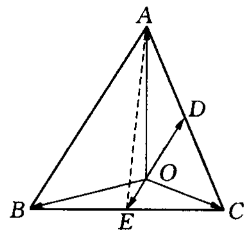
解　如图，设 D、E 分别是边 AC、BC 的中点，则

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD},\qquad ①$$

$$2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=4\overrightarrow{OE}. \quad ②$$

由①②得 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{OE})=\vec{0}$,

即$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OE}$共线,且$|\overrightarrow{OD}|=2|\overrightarrow{OE}|$.



所以

$$\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOC}}=\frac{3}{2},\quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=\frac{3\times 2}{2}=3.$$

故选 C.

5 设三位数 $n=\overline{abc}$,若以 a、b、c 为三条边的长可以构成一个等腰(含等边)三角形,则这样的三位数 n 有(　　).

(A) 45 个　(B) 81 个　(C) 165 个　(D) 216 个

解 a、b、c 要能构成三角形的边长,显然均不为 0,即 $a, b, c\in\{1, 2, \cdots, 9\}$.

(1) 若构成等边三角形,设这样的三位数的个数为 n_1. 由于三位数中三个数码都相同,所以,

$$n_1=C_9^1=9.$$

(2) 若构成等腰(非等边)三角形,设这样的三位数的个数为 n_2. 由于三位数中只有 2 个不同数码. 设为 a、b,注意到三角形腰与底可以置换,所以可取的数码组 (a, b) 共有 $2C_9^2$. 但当大数为底时,设 $a>b$,必须满足 $b<a<2b$. 此时,不能构成三角形的数码如下表,共 20 种情况.

a	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	4, 3 2, 1	4, 3 2, 1	3, 2 1	3, 2 1	2, 1	2, 1	1	1	

同时，每个数码组$(a,\ b)$中的两个数码填上三个数位，有 C_3^2 种情况. 故

$$n_2 = C_3^2(2C_9^2 - 20) = 6(C_9^2 - 10) = 156.$$

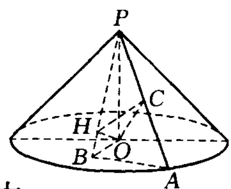
综上，$n = n_1 + n_2 = 165$. 故选 C.

6 顶点为 P 的圆锥的轴截面是等腰直角三角形，A 是底面圆周上的点，B 是底面圆内的点，O 为底面圆的圆心，$AB \perp OB$，垂足为 B，$OH \perp PB$，垂足为 H，且 $PA = 4$，C 为 PA 的中点，则当三棱锥 O-HPC 的体积最大时，OB 的长是(　　).

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　(B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　(C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

解　因为 $AB \perp OB$，$AB \perp OP$，所以 $AB \perp PB$，面 $PAB \perp$ 面 POB.

又 $OH \perp PB$，所以 $OH \perp HC$，$OH \perp PA$.



又因为 C 是 PA 中点，所以 $OC \perp PA$，因此 PC 是三棱锥 P-HOC 的高，且 $PC = 2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OHC$ 中，$OC = 2$，故当 $HO = HC$ 时 $S_{\triangle HOC}$ 最大，也即 $V_{O\text{-}HPC} = V_{P\text{-}HCO}$ 最大.

此时，$HO = \sqrt{2}$，故 $HO = \frac{1}{2}OP$，所以 $\angle HPO = 30^\circ$，$OB = OP \cdot \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

故选 D.

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

7 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $f(x) = a\sin ax + \cos ax$ $(a > 0)$ 在一个最小正周期长的区间上的图象与函数 $g(x) = \sqrt{a^2 + 1}$ 的图象所围成的封闭图形的面积是________.

解 $f(x)=\sqrt{a^2+1}\sin(ax+\varphi)$，其中 $\varphi=\arctan\frac{1}{a}$，它的最小正周期为$\frac{2\pi}{a}$，振幅为$\sqrt{a^2+1}$. 由 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象围成的封闭图形的对称性，可将这图形割补成长为$\frac{2\pi}{a}$，宽为$\sqrt{a^2+1}$的长方形，故它的面积是$\frac{2\pi}{a}\sqrt{a^2+1}$.

8 设函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，满足 $f(0)=1$，且对任意 x, $y\in\mathbf{R}$，都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$ ________.

解 因为任何 x, $y\in\mathbf{R}$ 有

$$f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2,$$

所以有 $$f(yx+1)=f(y)f(x)-f(x)-y+2.$$

因此 $$f(x)f(y)-f(y)-x+2=f(y)f(x)-f(x)-y+2.$$

即 $$f(x)+y=f(y)+x.$$

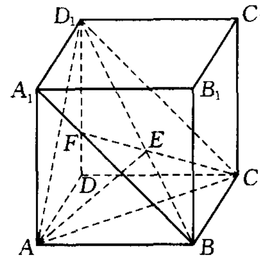
令 $y=0$，得 $f(x)=x+1$.

9 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $A\text{-}BD_1\text{-}A_1$ 的度数是________.

解 连结 D_1C，作 $CE\perp BD_1$，垂足为 E，延长 CE 交 A_1B 于 F，则 $FE\perp BD_1$，连结 AE，由对称性知 $AE\perp BD_1$，所以$\angle FEA$是二面角 $A\text{-}BD_1\text{-}A_1$ 的平面角.

连结 AC，设 $AB=1$，则 $AC=AD_1=\sqrt{2}$，$BD_1=\sqrt{3}$. 在 $Rt\triangle ABD_1$ 中，$AE=\dfrac{AB\cdot AD_1}{BD_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，在 $\triangle AEC$ 中，$\cos\angle AEC=\dfrac{AE^2+CE^2-AC^2}{2AE\cdot CE}$

$=\dfrac{2AE^2-AC^2}{2AE^2}=\dfrac{\frac{4}{3}-2}{\frac{4}{3}}=-\dfrac{1}{2}$，所以



$\angle AEC=120^\circ$，而 $\angle FEA$ 是 $\angle AEC$ 的补角，故 $\angle FEA=60^\circ$.

10 设 p 是给定的奇质数，正整数 k 使得 $\sqrt{k^2-pk}$ 也是一个正整数，则 $k=$ ________.

解 设 $\sqrt{k^2-pk}=n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $k^2-pk-n^2=0$，$k=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2+4n^2}}{2}$，从而 p^2+4n^2 是平方数，设为 m^2，$m\in\mathbf{N}^*$，则 $(m-2n)(m+2n)=p^2$.

因为 p 是质数，且 $p\geqslant 3$，所以 $\begin{cases}m-2n=1,\\ m+2n=p^2,\end{cases}$ 解得

$$\begin{cases}m=\dfrac{p^2+1}{2},\\ n=\dfrac{p^2-1}{4}.\end{cases}$$

所以 $k=\dfrac{p\pm m}{2}=\dfrac{2p\pm(p^2+1)}{4}$，故 $k=\dfrac{(p+1)^2}{4}$（负值舍去）.

11 已知数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足关系式 $(3-a_{n+1})\cdot(6+a_n)=18$，且 $a_0=3$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{a_i}$ 的值是________.

解 设 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$, $n=0, 1, 2, \cdots$,则

$$\left(3-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\left(6+\frac{1}{b_n}\right)=18,\quad \text{即 } 3b_{n+1}-6b_n-1=0.$$

所以 $\quad b_{n+1}=2b_n+\dfrac{1}{3},\quad$ 即 $b_{n+1}+\dfrac{1}{3}=2\left(b_n+\dfrac{1}{3}\right)$,

故数列$\left\{b_n+\dfrac{1}{3}\right\}$是公比为 2 的等比数列,因此

$$b_n+\frac{1}{3}=2^n\left(b_0+\frac{1}{3}\right)=2^n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times 2^{n+1},$$

$$b_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1).$$

所以
$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum_{i=0}^{n}b_i=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3}(2^{i+1}-1)$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2(2^{n+1}-1)}{2-1}-(n+1)\right]=\frac{1}{3}(2^{n+2}-n-3).$$

12 在平面直角坐标系 xOy 中,给定两点 $M(-1, 2)$ 和 $N(1, 4)$,点 P 在 x 轴上移动,当$\angle MPN$ 取最大值时,点 P 的横坐标为________.

解 经过 M、N 两点的圆的圆心在线段 MN 的垂直平分线 $y=3-x$ 上,设圆心为 $S(a, 3-a)$,则圆 S 的方程为:$(x-a)^2+(y-3+a)^2=2(1+a^2)$.

对于定长的弦在优弧上所对的圆周角会随着圆的半径减小而角度增大,所以,当$\angle MPN$ 取最大值时,经过 M、N、P 三点的圆 S 必与 X 轴相切于点 P,即圆 S 的方程中的 a 值必须满足 $2(1+$

$a^2) = (a-3)^2$，解得 $a=1$ 或 $a=-7$，即对应的切点分别为 $P(1, 0)$ 和 $P'(-7, 0)$.

而过点 M、N、P' 的圆的半径大于过点 M、N、P 的圆的半径，所以 $\angle MPN > \angle MP'N$，故点 $P(1, 0)$ 为所求，所以点 P 的横坐标为 1.

三、解答题(本题满分 60 分，每小题 20 分)

13 一项"过关游戏"规则规定：在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次，如果这 n 次抛掷所出现的点数之和大于 2^n，则算过关. 问：

(1) 某人在这项游戏中最多能过几关？

(2) 他连过前三关的概率是多少？

(注：骰子是一个在各面上分别有 1、2、3、4、5、6 点数的均匀正方体. 抛掷骰子落地静止后，向上一面的点数为出现点数.)

解 由于骰子是均匀的正方体，所以抛掷后各点数出现的可能性是相等的.

(1) 因骰子出现的点数最大为 6，而 $6\times4>2^4$，$6\times5<2^5$，因此，当 $n\geqslant5$ 时，"n 次出现的点数之和大于 2^n"已不可能. 即这是一个不可能事件，过关的概率为 0. 所以最多只能连过 4 关. …5 分

(2) 设事件 A_n 为"第 n 关过关失败"，则对立事件 $\overline{A_n}$ 为"第 n 关过关成功".

第 n 关游戏中，基本事件总数为 6^n 个.

第 1 关：事件 A_1 所含基本事件数为 2(即出现点数为 1 和 2 这两种情况). 所以过此关的概率为

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

第 2 关：事件 A_2 所含基本事件数为方程 $x+y=a$ 当 a 分别取 2、3、4 时的正整数解组数之和. 即有 $C_1^1+C_2^1+C_3^1=1+2+3=6$(个). 所以过此关的概率为

$$P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-\frac{6}{6^2}=\frac{5}{6}. \quad \cdots\cdots\cdots \ 10 \text{ 分}$$

第 3 关：事件 A_3 所含基本事件为方程 $x+y+z=a$ 当 a 分别取 3、4、5、6、7、8 时的正整数解组数之和. 即有 $C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2+C_7^2=1+3+6+10+15+21=56$(个). 所以过此关的概率为

$$P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-\frac{56}{6^3}=\frac{20}{27}. \quad \cdots\cdots \ 15 \text{ 分}$$

故连过前三关的概率为：

$$P(\overline{A_1})\times P(\overline{A_2})\times P(\overline{A_3})=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{20}{27}=\frac{100}{243}. \quad \cdots\cdots 20 \text{ 分}$$

(说明：第 2、3 关的基本事件数也可以列举出来.)

评注 概率论试题第一次出现在全国高中数学联赛中，相对而言，内容难度不大，像导数及应用这样的内容已经放在中学课本中，在数学竞赛的试题中，也将出现. 希望注意高中数学联赛考试大纲.

14 在平面直角坐标系 xOy 中，给定三点 $A\left(0,\frac{4}{3}\right)$、$B(-1,0)$、$C(1,0)$. 点 P 到直线 BC 的距离是该点到直线 AB、AC 距离的等比中项.

(1) 求点 P 的轨迹方程；

(2) 若直线 L 经过$\triangle ABC$ 的内心(设为 D)，且与点 P 的轨迹恰好有 3 个公共点，求 L 的斜率 k 的取值范围.

解 (1) 直线 AB、AC、BC 的方程依次为 $y=\frac{4}{3}(x+1)$，$y=-\frac{4}{3}(x-1)$，$y=0$. 点 $P(x, y)$到 AB、AC、BC 的距离依次为 $d_1=\frac{1}{5}\mid 4x-3y+4\mid$，$d_2=\frac{1}{5}\mid 4x+3y-4\mid$，$d_3=\mid y\mid$.

依设，$d_1d_2=d_3^2$，得 $\mid 16x^2-(3y-4)^2\mid=25y^2$，即

$$16x^2-(3y-4)^2+25y^2=0,\text{或 } 16x^2-(3y-4)^2-25y^2=0.$$

化简得点 P 的轨迹方程为

$$\text{圆 } S: 2x^2+2y^2+3y-2=0$$

与 $$\text{双曲线 } T: 8x^2-17y^2+12y-8=0.$$ ……… 5 分

(2) 由前知，点 P 的轨迹包含两部分

$$\text{圆 } S: 2x^2+2y^2+3y-2=0, \qquad ①$$

与 $$\text{双曲线 } T: 8x^2-17y^2+12y-8=0. \qquad ②$$

因为 $B(-1, 0)$和 $C(1, 0)$是适合题设条件的点，所以点 B 和点 C 在点 P 的轨迹上，且点 P 的轨迹曲线 S 与 T 的公共点只有 B、C 两点.

$\triangle ABC$ 的内心 D 也是适合题设条件的点，由 $d_1=d_2=d_3$，解得 $D\left(0, \frac{1}{2}\right)$，且知它在圆 S 上.

直线 L 经过 D，且与点 P 的轨迹有 3 个公共点，所以，L 的斜率存在，设 L 的方程为

$$y=kx+\frac{1}{2}. \qquad ③$$

(i) 当 $k=0$ 时，L 与圆 S 相切，有唯一的公共点 D；此时，直