大学数学名师导学丛书

微积分

名师导学

（文科）

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书

微积分

名师导学

文　科

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

本册编写　郑素文

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是以大学文科《微积分》的教学大纲为依据，结合大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成。内容简练明确，易学易用，解决问题透彻明了。本书的结构特点是，在每章的开头首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题和自测。

本丛书具有三"导"合一的特点：集中知识要点"导"学，典型例题与习题"导"讲，知识点学习和自测紧密"导"练。

本书适合学习《微积分》的大学文科学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分名师导学．文科/《大学数学名师导学丛书》编写组 编．—北京：中国水利水电出版社，2005

(大学数学名师导学丛书)

ISBN 7-5084-2560-X

Ⅰ．微…　Ⅱ．大…　Ⅲ．微积分—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 127698 号

书　　名：	大学数学名师导学丛书 **微积分名师导学(文科)**
作　　者：	《大学数学名师导学丛书》编写组　编　本书编写　郑素文
出版发行：	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号 100044) 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010)63202266(总机)、68331835(营销中心)
经　　销：	全国各地新华书店和相关出版销售网点
排　　版：	雪光科技发展有限公司
印　　刷：	北京市优美印刷有限责任公司
规　　格：	787mm×1092mm　16 开本　22.75 印张　418 千字
版　　次：	2005 年 1 月第一版　2005 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：	0001—6000 册
定　　价：	**30.00** 元

《大学数学名师导学丛书》编写组

主　　编： 牛庆银

副 主 编： 董玉才

编写人员： 牛庆银　董玉才　杨万利
郑素文　刘文学　陈建华

前言

大学数学是高等院校的重要基础课程。在教学改革后，由于授课时间的减少，很多学生陷入了“上课能听懂，课后解题却不知如何下手，考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境，我们对辅导方式进行了积极创新，希望以有效的名师指导式辅导，使学生轻松学数学，牢固并灵活地掌握知识，从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成，由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本套丛书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测，供学生灵活运用所学知识进行实践，使学生“知其然，更知其所以然”，巩固所学知识，从而协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点：

1）**集中知识要点“导”学**。通过把知识要点串联在一起，将大纲和知识要点分层讲解，方便学生查找，有的放矢地学习，避免遗漏。

2）**典型例题与习题“导”讲**。针对典型例题和习题，结合知识点进行精讲，给出多种解题思路、方法，使学生能触类旁通，从而轻松学习、解题和通过考试。

3）**知识点学习和自测紧密“导”练**。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2004 年 6 月

目 录

第一章　函　数

一、知识要点

集合　集合的表示法　全集　空集　子集　集合的并、交、差、补　集合的运算规律　集合的笛卡尔乘积　实数　数轴　绝对值　区间　邻域　函数　自变量　因变量　定义域　值域　函数的图形　多值函数　函数的表示法　分段函数　隐函数　函数的奇偶性　函数的周期性　函数的单调性　函数的有界性　反函数　复合函数　基本初等函数　初等函数　函数图形的迭加、翻转及平移

二、知识要点分析

1. 集　合

(1)集合的定义

一般来说,集合是具有某种属性的事物的全体,或是一些确定对象的汇总,构成集合的事物或对象,称为集合的对象.

(2)集合的记法

通常,我们用大些字母 $A,B,C\cdots$表示集合,用小写字母 $a,b,c\cdots$表示集合的元素. $a\in A(a\notin A)$表示元素 a 属于(不属于)集合 A.

(3)集合的表示法

列举法:按任意顺序列出集合的所有元素,并用{}括起来.

描述法:设 $P(a)$为某个与 a 有关的条件或法则,A 为满足 $P(a)$的一切 a 构成的集合,则记为 $A=\{a\mid P(a)\}$.

(4)全集与空集

由所研究的所有事物构成的集合称为全集,记为 U.不包含任何元素的集合称为空集,记为 Φ.

(5)子集

子集:如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记

为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

相等:如果集合 A 和 B,有 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

性质:

①$A\subset A$;

②$\forall A,\Phi\subset A$;

③如果 $A\subset B,B\subset C$,则 $A\subset C$.

(6)集合的运算

集合的并:设有集合 A 和 B,由 A 和 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的并,记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

集合的并具有的性质:

①$A\subset A\cup B,B\subset A\cup B$;

②$\forall A,A\cup\Phi=A,A\cup U=U,A\cup A=A$.

集合的交:设有集合 A 和 B,由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交,记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

集合的交具有的性质:

①$A\cap B\subset A,A\cap B\subset B$;

②$\forall A,A\cap\Phi=\Phi,A\cap U=A,A\cap A=A$.

如果 $A\cap B=\Phi$,则称 A,B 是分离的.

集合的差:设有集合 A 和 B,由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的差,记为 $A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

集合的补:全集 U 中所有不属于集合 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记为 A',即

$$A'=\{x\mid x\in U\text{ 且 }x\notin A\}$$

补集具有的性质:$A\cup A'=U,A\cap A'=\Phi$.

(7)集合的运算规律

①交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

②结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

③分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

④摩根律:$(A\cup B)'=A'\cap B',(A\cap B)'=A'\cup B'$.

(8)集合的笛卡尔乘积

设有集合 A 和 B,$x\in A$,$y\in B$,所有二元有序数组(x,y)构成的集合,称为 A 与 B 的笛卡尔乘积,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

2. 实数集

(1)实数与数轴

有理数与无理数统称为实数.具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴.全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系.

(2)绝对值

一个实数 x 的绝对值,记为$|x|$,定义为

$$|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\-x,x<0.\end{cases}$$

绝对值具有的性质:$|x+y|\leqslant|x|+|y|$,$|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

(3)区间

开区间:$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

闭区间:$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开区间:$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

无限区间:

$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$,$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$;

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,即全体实数的集合.

(4)邻域

点 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$;

点 x_0 的去心的 δ 邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$.

3. 函　数

(1)函数的定义

若 D 是一个非空的实数集合,设有一个对应法则 f,使每一个 $x\in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或变量 y 是变量 x 的函数,记为 $y=f(x)$,$x\in D$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域,记为 $D(f)$.全体函数值的集合称为函数的值域,记为 $Z(f)$.

(2)多值函数

非空实数集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的关系称为多值函数.

(3)函数的表示法

常用的函数表示法有公式法、表格法和图表法.

分段函数:对于自变量 x 不同的取值,用两个或两个以上的式子表示的函数.

隐函数:因变量与自变量的对应法则用一个方程表示的函数.

4.函数的性质

(1)函数的奇偶性

给定函数 $y=f(x)$,如果对于 $x\in D(f)$,有 $f(-x)=f(x)$,则称函数$f(x)$为偶函数.

给定函数 $y=f(x)$,如果对于 $x\in D(f)$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数$f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于 x 轴对称.

(2)函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在正的常数 a,使得 $f(x)=f(x+a)$恒成立,则称此函数为周期函数.满足 $f(x)=f(x+a)$的最小正数 a,称为函数的周期.

(3)函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$对于区间(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有$f(x_1)<f(x_2)$,则称此函数在区间(a,b)内是单调增加的;当 $x_1<x_2$ 时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称此函数在区间(a,b)内是单调减少的;

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的;单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

(4)函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in(a,b)$恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是有界的;如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$在区间(a,b)内是无界的.

5.反函数

设 $y=f(x)$是定义在 $D(f)$上的一个函数,值域为 $Z(f)$.如果对每一个 $y\in Z(f)$有一个确定的且满足 $y=f(x)$的 $x\in D(f)$与之对应,其对应规则记作 f^{-1},这个定义在 $Z(f)$上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为 $y=f(x)$的反函数,或称它们互为反函数.

互为反函数的两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

6.复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$,若函数 $u=\varphi(x)$的值域为 $Z(\varphi)$,$Z(\varphi)\cap D(f)$非空,则称 $y=f[\varphi(x)]$为复合函数,x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

7.初等函数

基本初等函数:

(1)常量:$y=c$;

(2)幂函数:$y=x^{a}$(a 为任意实数);

(3)指数函数:$y=a^{x}(a>0,a\neq1)$;

(4)对数函数:$y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$;

(5)三角函数:$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$;

(6)反三角函数:$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\text{arccot}\,x$, $y=\text{arcsec}\,x$, $y=\text{arccsc}\,x$.

初等函数:基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的一切函数.

8.函数图形的简单组合与变换

(1)迭加

将 $y=f(x)$和 $y=g(x)$的图形迭加,即为 $y=f(x)+g(x)$的图形.

(2)翻转

将 $y=f(x)$的图形上下翻转,即为 $y=-f(x)$的图形.

(3)平移

将 $y=f(x)$的图形向上(下)平移距离 $c(c>0)$,即为 $y=f(x)+c(y=f(x)-c)$的图形.

三、学习要求

本章是高等数学的基础知识,主要介绍高等数学的研究对象——函数.

1.熟练掌握集合及其表示法,熟练掌握集合的运算及其性质.

2.理解实数集和数轴的概念和对应关系,熟练掌握和应用区间与邻域.

3.理解函数的概念及其图形,熟练掌握函数的各种表示方法.

4.理解函数的性质(奇偶性、周期性、单调性和有界性等),会判断一些函数的性质.

5.掌握反函数和复合函数的概念,会求函数的反函数和复合函数.

6.熟练掌握基本初等函数的概念、图形及性质,理解初等函数的概念.

7.掌握函数图形的变化与函数表达式变化之间的关系.

四、典型例题与方法解析

1.集合与实数集

例 1 分别用描述法和列举法表示下列集合:

(1)抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 交点的集合 A;

(2)满足不等式 $3<x<5$,但不满足不等式 $x>4$ 的所有整数 x 的集合 B.

【分析】 集合的表示方法有很多,描述法与列举法是两种最常见的方法.根据各自不同的表达方式可以写出所要表达的集合.首先要明确集合中的元素有哪些.

解 (1)描述法:$A=\{(x,y)\mid y=x^2 \text{ 且 } y=x\}$;

列举法:解方程组 $\begin{cases} y=x^2, \\ y=x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \end{cases}\begin{cases} x_2=1 \\ y_2=1, \end{cases}$

则

$A=\{(0,0),(1,1)\}$.

(2)描述法:$B=\{x\mid 3<x<5 \text{ 且 } x\leqslant 4, x\in Z\}$,或 $B=\{x\mid x=4\}$;

列举法:$B=\{4\}$.

【评注】 一般而言,集合都可以用描述法表示,列举法有时难以清楚地表示集合,例如 $C=\{x\mid 3<x<5\}$一般不采用列举法表示,因为集合 C 中的元素难以一一列举.另外,集合也经常采用集合运算法及图示法表示.

例 2 分别用集合的运算法与图示法表示下列集合:

(1)正弦曲线 $y=\sin x$ 与直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 在第一象限的交点的集合 A;

(2)平面上满足 $y\geqslant x$,且 $2>y\geqslant 0$ 的所有点(x,y)的集合 B;

(3)大于 3 的所有实数的集合 C;

(4)与 3 的距离小于 1 的所有实数的集合 D.

【分析】 采用集合的运算,如交、并、补、差等可以表示集合,首先要明确题中给出的一些集合与所要表示的集合的关系.图示法通常是在实数轴或直角坐标系中用点,区间或区域等描绘所要表示的集合.

解 (1)集合的运算法:

设 $P=\{(x,y)\mid y=\sin x\}$, $Q=\{(x,y)\mid y=\dfrac{1}{2}\}$, $W=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$,

则 $A=P\cap Q\cap W$.

图示法:

图 1-1 中点 $P_1,P_2,P_3,P_4,\cdots$即为集合 A.

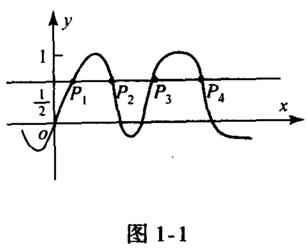

图 1-1

(2)集合的运算法:

设 $P=\{(x,y)\mid y\geqslant x\}$, $Q=\{(x,y)\mid 2>y\geqslant 0\}$,

则 $B=P\cap Q$.

图示法:

图 1-2 中阴影部分所示区域即为集合 B.

(3)集合的运算法：

设 $R=(-\infty,+\infty)$即所有实数，$P=\{x\mid x\leqslant 3\}$，

则 $C=R-P$，实际上 $C=(3,+\infty)=(-\infty,+\infty)-(-\infty,3]$.

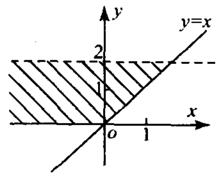

图 1-2

图示法：

图 1-3 中阴影部分所示区间即为集合 C.

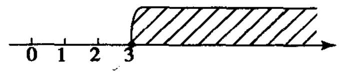

图 1-3

(4)集合的运算法：

首先 $D=\overset{o}{U}(3,1)=\{x\mid 0<|x-3|<1\}$.

设 $P=(2,4)$，$Q=\{3\}$，

则 $D=P-Q$ 或 $D=U(3,1)-Q$，其中 $U(3,1)=\{x\mid |x-3|<1\}$.

图示法：

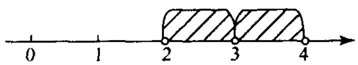

图 1-4

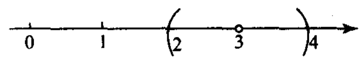

图 1-5

图 1-4 中阴影部分即为集合 D，也可用图 1-5 表示.

【评注】 集合的运算法要求对各集合间的关系要十分清楚，图示法是经常用的一种方法，可用来表示集合，进行集合的运算等.

例 3 如果 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e\}$，$C=\{d,e,f\}$，验证：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

解 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$，$(A\cup B)\cap C=\{d,e\}$，

$A\cap C=\{d\}$，$B\cap C=\{d,e\}$，$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{d,e\}$，

故$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

【评注】 集合的运算的概念与法则应熟练掌握，融汇贯通.

例 4 设 $X=\{x_1,x_2\}$，$Y=\{y_1,y_2\}$，证明 $X\times Y=Y\times X$ 的充分必要条件是 $X=Y$.

【分析】 根据笛卡尔乘积的概念直接运算，必要性可采用反证法.

证 充分性：设 $X=Y=\{x_1,x_2\}$，则 $X\times Y=X\times X=Y\times X$.

必要性：设 $X\times Y=Y\times X$，如果 $X\neq Y$，则 Y 中必有一个元素既不等于x_1，也不等于 x_2，不妨设 $y_2\neq x_1$，且 $y_2\neq x_2$，则

$$X\times Y=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2)\},$$

$$Y\times X=\{(y_1,x_1),(y_1,x_2),(y_2,x_1),(y_2,x_2)\}.$$

由于 $y_1\neq x_1$ 且 $y_1\neq x_2$，因此 $X\times Y\neq Y\times X$，故假设不成立，则有 $X=Y$.

【评注】 如果集合 A,B,C 中的元素均为实数，则 $A\times B$ 中的元素实际上可以看作是平面上的点，而 $A\times B\times C$ 中的元素可以看作是三维空间中的点.

例 5 证明任意两个有理数之间定有另一个有理数.

证 若 a,b 是有理数，则 $\frac{a+b}{2}$ 是介于 a 与 b 之间的有理数.

首先，不妨设 $a<b$，则 $a<\frac{a+b}{2}<b$，即 $\frac{a+b}{2}$ 是介于 a 与 b 之间的数；另外，设 $a=\frac{p}{q}$，$b=\frac{r}{s}$，其中 p,q,r,s 是整数，且 $q\neq 0,s\neq 0$，则

$$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}\right)=\frac{ps+qr}{2qs}\text{是有理数.}$$

【评注】 事实上，任意两个有理数之间定有无限多个有理数，也有无限多个无理数.

例 6 证明贝努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

【分析】 证明关于自然数 n 成立的命题，常常采用数学归纳法，数学归纳法一般有两种，都分为两个步骤. 数学归纳法一：①证明命题对 $n=1$ 或 n 为某一初始值成立；②设命题对任一自然数 $n=k$ 成立，证明命题对 $n=k+1$ 成立；则命题对任一自然数 n 成立. 数学归纳法二：①证明命题对 $n=1$ 或 n 为某一初始值成立；②设命题对一切 $n\leqslant k$ 的自然数成立，证明命题对 $n=k+1$ 成立；则命题对一切自然数 n 成立.

证 采用数学归纳法一.

①显然，当 $n=1$ 时，命题成立；

②设 $n=k$ 时，命题成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$，因为 $x_i>-1$，所以 $1+x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，故

$$(1+x_1)+(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})$$
$$=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).$$

由于 $x_ix_j>0$，所以

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}),$$

即对于 $n=k+1$，命题成立.

于是，对任意自然数 n，命题都成立.

例 7 证明下列不等式：

(1)$|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$;

(2)$|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

【分析】 利用三角不等式$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$.

证 (1)由$|x-y|=|x+(-y)| \geqslant |x|-|-y|=|x|-|y|$,

及$|x-y|=|y-x| \geqslant |y|-|x|=-(|x|-|y|)$,即得

$$|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|.$$

(2)$|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x|-|x_1+\cdots+x_n|$,

而

$$|x_1+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2+\cdots+x_n| \leqslant \cdots \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

故

$$|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|).$$

【评注】 关于涉及绝对值不等式的证明往往都是对不等式进行变形,利用公式完成,而且方法也有很多.比如(1)还有以下证法:

由于$|xy|>xy$,则$x^2-2xy+y^2 \geqslant x^2-2|xy|+y^2$,即$(x-y)^2 \geqslant (|x|-|y|)^2$,开方即得$|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$.

例 8 解不等式$\big||x+1|-|x-1|\big|<1$.

【分析】 考查对不等关系的理解与不等式的运算法则.

解 对不等式两端平方,化简得

$$x^2+\frac{1}{2}<|x^2-1|,$$

即

$$x^2-1>x^2+\frac{1}{2} \text{ 或 } x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right).$$

前者显然不成立,所以 $x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$.解之,得

$$x^2<\frac{1}{4}, \text{即} |x|<\frac{1}{2}, \text{或} -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

2.函数关系

例 9 求下列函数的定义域:

(1)$y=\arccos(2^x-3)+\ln\ln x$;

(2)$y=\ln[\cos(\ln x)]$.

【分析】 根据基本初等函数的定义域列出相关的不等式或不等式组,解之即得.

解 (1)根据 $y=\arccos x$ 和 $y=\ln x$ 的定义域,知

$$|2^x-3| \leqslant 1, \text{解之,得 } 1 \leqslant x \leqslant 2;$$

$$\ln x>0, \text{解之,得 } x \geqslant 1,$$

故函数的定义域为$[1,2]$.

(2)解不等式 $\cos(\ln x)>0$,得

$$(2k-\frac{1}{2})\pi<\ln x<(2k+\frac{1}{2})\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

即 $$e^{(2k-\frac{1}{2})\pi}<x<e^{(2k+\frac{1}{2})\pi},$$

故　所求的定义域为

$$\{x\mid e^{(2k-\frac{1}{2})\pi}<x<e^{(2k+\frac{1}{2})\pi},k\text{ 为整数}\}.$$

例 10　设 $y=f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$的定义域.

【分析】由 $y=f(x)$的定义域为$[0,1]$,知 $y=f(x)$中自变量的取值范围应为$[0,1]$.

故 $f(x+\frac{1}{4})-f(x-\frac{1}{4})$中 $x+\frac{1}{4}$和 $x-\frac{1}{4}$的取值范围都应为$[0,1]$,据此列出相关不等式,解之即得.

解　使 $f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$有意义的 x 应满足:

$$\begin{cases}0\leqslant x+\frac{1}{4}\leqslant1,\\0\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4},\\\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4},\end{cases}$$

公共解为$\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$,故函数的定义域为$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

例 11　求下列函数的定义域和值域:

(1)$y=\sqrt{2+x-x^2}$;(2)$y=\ln(1-2\cos x)$.

【分析】　值域即函数值的取值范围,通常要考虑函数值的最大值与最小值,以确定取值范围.

解　(1)由 $2+x-x^2\geqslant0$ 得函数的定义域为$[-1,1]$.

由于 $f(x)=2+x-x^2=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$,其最大值为$\frac{9}{4}$,又由于 $2+x+x^2=0$ 有解,故 $f(x)$的最小值为 0,且 $f(x)$是一抛物线,因此 $y=\sqrt{2+x-x^2}$的值域为$\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

(2)由 $1-2\cos x>0$ 得函数的定义域为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

由于 $f(x)=1-2\cos x$ 的最大值为 $1-(-2)=3$,且 $1-2\cos x>0$,且 $y=\ln(1-2\cos x)$是连续的函数,故函数的值域为$(-\infty,\ln3)$.

【评注】　求函数的定义域和值域的问题所考查的内容包括基本初等函数的