概率统计
复习与习题全解

·同济三版·

同济大学概率统计教研室　编

同济大学出版社

概率统计复习与习题全解

·同济三版·

同济大学概率统计教研组 编

同济大学出版社

内容提要

本书按照同济大学概率统计教研组编著的《概率统计》(第三版)(同济大学出版社)的章节顺序编写.全书共有九章.每章中包含三节内容:第一节为基本要求和内容提要;第二节为增补例题,这部分的例题主要选自近几年数学一、数学三、数学四的硕士研究生的入学考试试题;第三节为教材的习题全解.

本书可与教材《概率统计》配合使用,也可作为全国硕士研究生入学考试的复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计复习与习题全解/同济三版/同济大学概率统计教研室编. 上海:同济大学出版社,2005.7

ISBN 7-5608-2959-7

Ⅰ.概… Ⅱ.同… Ⅲ.① 概率论—高等学校—解题 ② 数理统计—高等学校—解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 036195 号

概率统计复习与习题全解·同济三版

同济大学概率统计教研组 编

责任编辑 李炳钊 责任校对 郁 峰 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 同济大学印刷厂印刷

开　本 787mm×960mm 1/16

印　张 17.25

字　数 345 000

印　数 1—5 100

版　次 2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷

书　号 ISBN 7-5608-2959-7/O·271

定　价 19.80 元

前　言

概率论与数理统计是随机数学的两个分支，它们在各个领域中都有极其广泛的应用，目前在高等学校普遍设立了这一课程，而且作为理、工、医、农、经济类等许多学科研究生入学考试的一个重要组成部分．因此，帮助学生掌握和应用这门学科的知识是一项十分有意义的工作．而能较好掌握这门学科的精髓，加深理解基本理论的一个非常重要的环节是加强习题的练习．本书就是为教师和学生提供一本习题参考书而编写．

本书按照同济大学概率统计教研组主编的《概率统计》(第三版)(同济大学出版社)的章节顺序编写．全书共有九章(教材中第六章由于没有习题，故略去了)．每章中包含三节内容：第一节为基本要求和内容提要，其中基本要求部分是根据高等工科类本科数学基础课程教学“概率统计基本要求”(教学大纲)而编写的．需要说明的是这是一个较低的要求，因此在内容提要部分不只限于基本要求中的内容，同时还增加了较高要求的一部分内容，以供读者自由取舍；第二节为增补例题，这部分的例题主要选自近几年来数学一、数学三、数学四的硕士研究生入学考试试题，大部分题都是综合题；第三节为教材《概率统计》(第三版)(同济大学出版社)的习题全解，在解题过程中对一些难题给出了相当详细的解答．

本书可作为高等院校本科生(包括理工类与经济类)学习概率统计课程的参考书，也可作为准备参加全国硕士研究生入学考试的考生复习概率统计的辅导书．

本书由同济大学应用数学系蒋凤瑛编写完成，在编写过程中，曾得到了杨筱菡老师的帮助，在此向她致谢．限于编者的水平，本书的不足之处，衷心希望同行和广大读者批评指正．

编者于同济园
2005.3

目　　录

[注]　教材中的第六章现代概率论基础简介，由于没有安排习题，因此对有关内容不作介绍。

第一章　随机事件与概率

§1.1　基本要求与内容提要

(一) 基本要求

1. 了解随机现象，了解样本空间的概念，**理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系与运算**.

2. 了解事件频率的概念，**理解概率的统计定义**．了解概率的古典定义，会计算简单的古典概率．

3. **理解概率的公理化定义和概率的基本性质**，了解概率加法定理．

4. 了解条件概率的概念、概率的乘法定理．了解全概率公式，会应用贝叶斯(Bayes)公式解决比较简单的问题．

5. **理解事件的独立性概念**．

6. 了解贝努利(Bernoulli)概型和二项概率的计算方法．

(二) 内容提要

1. 随机试验与样本空间

具有下列三个特性的试验称为**随机试验**：

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但事先知道每次试验所有可能的结果；

(3) 每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

试验的所有可能结果所组成的集合为样本空间，用 Ω 表示，其中的每一个结果用 e 表示，e 称为样本空间中的样本点，记作$\Omega=\{e\}$.

2. 随机事件

在随机试验中，把一次试验中可能发生也可能不发生、而在大量重复试验中却呈现某种规律性的事情称为随机事件(简称事件)．通常把必然事件(记作 Ω)与不可能事件(记作 ϕ)看作特殊的随机事件.

3. 事件的关系及运算

(1) **包含**　若事件 A 发生，一定导致事件 B 发生，那么，称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2) **相等**　若两事件 A 与 B 相互包含，即 $A\supset B$，且 $B\supset A$，那么，称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

(3) **和事件** “事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”,这一事件称为 A 与 B 的和事件,记作 $A\cup B$;“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件发生”,这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(4) **积事件** “事件 A 与事件 B 同时发生”,这一事件称为 A 与 B 的积事件,记作 $A\cap B$(简记为 AB);“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”,这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(简记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(5) **互不相容** 若事件 A 和 B 不能同时发生,即 $AB=\phi$,那么称事件 A 与 B 互不相容(或互斥),若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不能同时发生,即 $A_iA_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant n)$,那么,称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容.

(6) **对立事件** 若事件 A 和 B 互不相容、且它们中必有一事件发生,即 $AB=\phi$ 且 $A\cup B=\Omega$,那么,称 A 与 B 是对立的. 事件 A 的对立事件(或逆事件)记作 $\overline{A}$.

(7) **差事件** 若事件 A 发生且事件 B 不发生,那么,称这个事件为事件 A 与 B 的差事件,记作 $A-B$(或 $A\overline{B}$).

(8) **交换律** 对任意两个事件 A 和 B 有

$$A\cup B=B\cup A,AB=BA.$$

(9) **结合律** 对任意事件 A,B,C 有

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(10) **分配律** 对任意事件 A,B,C 有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

(11) **德摩根(De Morgan)法则** 对任意事件 A 和 B 有

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

4. 频率与概率的定义

(1) 频率的定义

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次,则比值 n_A/n 称为随机事件 A 的频率,记作 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

(2) 概率的统计定义

在进行大量重复试验中，随机事件 A 的频率具有稳定性，即当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)$常在一个稳定的值 $p(0<p<1)$附近摆动，规定事件 A 发生的频率的稳定值 p 为概率，即$P(A)=p$.

(3) 古典概率的定义

具有下列两个特征的随机试验的数学模型称为古典概型：

(ⅰ) 试验的样本空间 Ω 是个有限集，不妨记作 $\Omega=\{e_1,\cdots,e_n\}$；

(ⅱ) 在每次试验中，每个 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$出现的可能性相同，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

在古典概型中，我们规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的个数}}=\frac{n_A}{n}.$$

(4) 几何概率的定义

如果随机试验的样本空间是一个区域(可以是直线上的区间、平面或空间中的区域)，且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性，那么规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的长度(或面积、体积)}}{\text{样本空间的长度(或面积、体积)}}.$$

(5) 概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω，随机事件 A 是 Ω 的子集，$P(A)$是实值函数，若满足下列三条公理：

公理 1(非负性) 对于任一随机事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

公理 2(规范性) 对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

公理 3(可加性) 对于互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$为随机事件 A 的概率.

5. 概率的性质

由概率的三条公理可导出下面概率的一些重要性质：

(1) $P(\phi)=0$.

(2) (有限可加性)设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 对于任意一个事件 A：

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

(4) 若事件 A,B 满足 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$
$$P(A)\leqslant P(B).$$

(5) 对于任意一个事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.

(6)（加法公式）对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对于任意 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

6. 条件概率与乘法公式

设 A 与 B 是两个事件. 在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率称为条件概率，记作 $P(A|B)$. 当 $P(B)>0$，规定

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

在同一条件下，条件概率具有概率的一切性质.

乘法公式：对于任意两个事件 A 与 B，当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

7. 随机事件的相互独立性

如果事件 A 与 B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

那么，称事件 A 与 B 相互独立.

关于事件 A,B 的独立性有下列两条性质：

(1) 如果 $P(B)>0$，那么，事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(A|B)=P(A)$；如果 $P(A)>0$，那么，事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

这条性质的直观意义是“事件 A 与 B 发生与否互不影响”.

(2) 下列四个命题是等价的：

(i) 事件 A 与 B 相互独立；

(ii) 事件 A 与 $\overline{B}$ 相互独立；

(iii) 事件 $\overline{A}$ 与 B 相互独立；

(iv) 事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

对于任意 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$，相互独立性定义如下：若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 满足

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}),$$

其中，$k=2,\cdots,n,i_1,\cdots,i_k$ 是 $1,\cdots,n$ 中任意 k 个不同的数，则称事件 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立. 这里实际上包含了 2^n-n-1 个等式.

8. 全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式：如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega,P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

贝叶斯公式：如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega,P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则当 $P(B)>0$ 时：

$$P(A_k|B)=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)},k=1,2,\cdots,n.$$

9. 贝努里概型与二项概率

设在每次试验中，随机事件 A 发生的概率 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 n 次重复独立试验中，事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n,$$

称这组概率为二项概率.

§1.2 增补例题

例 1.1 一幢 10 层楼的楼房中的一部电梯，在底层登上 3 位乘客. 电梯在每一层都停，乘客从第二层起离开电梯，假设每位乘客在哪一层离开电梯是等可能的，求没有两位及两位以上乘客在同一层离开的概率.

解 事件 A"没有两位及两位以上乘客在同一层离开"相当于"3 位乘客在不同层离开电梯",因此 A 包含的样本点个数为 $9\times8\times7$,样本空间的个数为 9^3,即所求概率为

$$P(A)=\frac{9\times8\times7}{9^3}=\frac{56}{81}.$$

例 1.2 设 A,B 为两个随机事件,且已知 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A-B)=0.5$. 试求 $P(B|\overline{A})$ 与 $P(B|(A\cup\overline{B}))$.

解 因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

所以 $$P(AB)=P(A)-P(A-B)=(1-0.3)-0.5=0.2,$$

而

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(\overline{A})}=\frac{0.4-0.2}{0.3}=\frac{2}{3};$$

$$\begin{aligned}P(B|(A\cup\overline{B}))&=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB\cup B\overline{B})}{P(A\cup\overline{B})}\\&=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}\\&=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A)+P(AB)}\\&=\frac{0.2}{1-0.4+0.2}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 1.3 设某光学仪器厂制造的透镜,第一次落下时打破的概率为$\frac{1}{2}$,若第一次落下未打破,第二次落下打破的概率为$\frac{3}{4}$,若前两次落下未打破,第三次落下打破的概率为$\frac{8}{9}$. 试求前两次落下未打破,第三次落下打破的概率?

解 设事件 A_i 表示"透镜第 i 次落下打破",事件 B 表示"前两次落下未打破而第三次落下打破". 因为 $B=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,故有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{8}{9}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{8}{9}=\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

例 1.4 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a 为正常数)内掷一点,点落在半圆内

任何区域的概率与区域的面积成正比,试求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

解 半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ 也即样本空间 Ω 的面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$,所求事件 A 为图1-1中阴影部分,区域 A 的面积为 $\frac{1}{2}a^2+\frac{\pi^2 a^2}{4}$,故所求事件概率为

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{\pi^2}{4}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

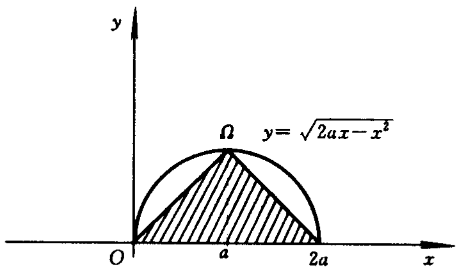

图 1-1

例 1.5 设事件 A,B,C 独立,求证(1) $A\cup B$ 与 C 独立;(2) $A-C$ 与 B 独立.

证 (1)
$$\begin{aligned}P((A\cup B)C)&=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)\\&=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]P(C)\\&=P(A\cup B)P(C),\end{aligned}$$

由事件相互独立性定义知事件 $A\cup B$ 与 C 独立;

(2)
$$\begin{aligned}P((A-C)B)&=P((A-AC)B)=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)\\&=P(A)P(B)-P(A)P(B)P(C)\\&=[P(A)-P(A)P(C)]P(B)=[P(A)-P(AC)]P(B)\\&=P(A-C)P(B),\end{aligned}$$

由事件相互独立性的定义知事件 $A-C$ 与 B 相互独立.

例 1.6 某人忘记了电话号码的最后一个数字,因而他随意地拨号,求拨号不超

过三次而接通所需电话的概率．若已知最后一个数字小于4，那么此概率是多少？

解法 1　设事件 A_i 表示"第 i 次接通"，事件 A 表示"不超过三次接通"，则有

$$A=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

显然 $A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 是互不相容的．因此

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3),$$

而

$$P(A_1)=\frac{1}{10},P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10},$$

故有

$$P(A)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10};$$

故拨号不超过三次而接通所需电话的概率为$\frac{3}{10}$.

当已知最后一位数字小于4时，所求概率为

$$p=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

解法 2　沿用解法1的记号．易知

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P\{\text{拨号 3 次都接不通}\}=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=1-\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{3}{10};\end{aligned}$$

故拨号不超过三次而接通所需电话的概率为$\frac{3}{10}$.

当已知最后一位数字小于4时，所求概率为

$$p=1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

例 1.7　设甲、乙、丙三人同时独立地向同一目标各射击一次，命中率分别为$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，现已知目标被击中，求它由乙命中的概率为多少？

解 设 A_i 分别表示甲、乙、丙命中目标的事件，$i=1,2,3$，则 $P(A_1)=\frac{1}{3}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(A_3)=\frac{2}{3}$，所求概率为

$$P(A_2\mid(A_1\cup A_2\cup A_3))=\frac{P(A_2(A_1\cup A_2\cup A_3))}{P(A_1\cup A_2\cup A_3)}=\frac{P(A_2)}{1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{9}{16}.$$

例 1.8 将一枚硬币独立地掷两次，记事件 A_1 为"掷第一次出现正面"，A_2 为"掷第二次出现正面"，A_3 为"正、反面各出现一次"．试证明 A_1,A_2,A_3 两两独立但不相互独立．

证 由古典概率可得 $P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(A_3)=\frac{1}{2}$，$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_2A_3)=0$.

易见
$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),\ P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),$$

因此 A_1,A_2,A_3 两两独立；

而
$$P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

即证得 A_1,A_2,A_3 不相互独立．

例 1.9 设 A,B 是任意二事件，且 $0<P(A)<1$，证明

$$P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$$

是事件 A 与 B 独立的充要条件．

证 由于 $0<P(A)<1$，知题中两个条件概率都存在．

(1) **必要性** 由事件 A 与 B 独立，知事件 $\overline{A}$ 与 B 也独立，因此 $P(B\mid A)=P(B)$，$P(B\mid\overline{A})=P(B)$，从而

$$P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A}).$$

(2) **充分性** 由 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$，可见

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

上式可推出 $$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB),$$

即 $$P(AB)=P(A)P(B)$$

因此 A 和 B 相互独立.

例 1.10 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表,其中女生的报名表分别为三份、七份和五份. 随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率;

(2) 已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率.

解 设事件 B_i 表示"报名表是第 i 区考生的",$i=1,2,3$;

事件 A_j 表示"第 j 次抽到的报名表是男生表",$j=1,2$. 则 $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$;

$$P(A_1|B_1)=\frac{7}{10},P(A_1|B_2)=\frac{8}{15},P(A_1|B_3)=\frac{20}{25}.$$

(1) 先抽到的一份是女生表的概率为

$$P(\bar{A}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\bar{A}_1|B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90};$$

(2) 据题意所求的概率为

$$P(\bar{A}_1|A_2)=\frac{P(\bar{A}_1A_2)}{P(A_2)},$$

而 $P(\bar{A}_1A_2)$ 可用全概率公式

$$P(\bar{A}_1A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\bar{A}_1A_2|B_i)$$

求得,其中 $P(B_i)$ 同(1)中的值,$P(\bar{A}_1A_2|B_1)=\frac{3\times7}{10\times9}=\frac{7}{30}$,

$$P(\bar{A}_1A_2|B_2)=\frac{7\times8}{15\times14}=\frac{8}{30},P(\bar{A}_1A_2|B_3)=\frac{5\times20}{25\times24}=\frac{5}{30},$$

因此 $P(\bar{A}_1A_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9}$;

$P(A_2)$ 可用下面的全概率公式求得:

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_2|B_i),$$

其中

$$P(A_2|B_1)=\frac{7}{10},P(A_2|B_2)=\frac{8}{15},P(A_2|B_3)=\frac{20}{25},$$

因此
$$P(A_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

最后得到所求的概率为

$$P(\overline{A}_1|A_2)=\frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}.$$

§1.3 习题全解

1.1 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间 Ω 与随机事件 A：

(1) 掷一颗骰子，观察向上一面的点数；事件 A 表示“出现奇数点”；

(2) 对一个目标进行射击，一旦击中便停止射击，观察射击的次数；事件 A 表示“射击不超过 3 次”；

(3) 把单位长度的一根细棒折成三段，观察各段的长度；事件 A 表示“三段细棒能构成一个三角形”.

解 (1) 由于一颗骰子有六个面，每个面上刻有一个数字，分别为 1,2,3,4,5,6. 因此样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$；事件 A 为 $\{1,3,5\}$.

(2) 进行射击可能的次数为 $1,2,\cdots$，因此样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots\}$；事件 A 为 $\{1,2,3\}$.

(3) 以 x,y,z 分别表示三段的长度，则样本空间 $\Omega=\{(x,y,z):0<x,y,z<1,x+y+z=1\}$；事件 $A=\{(x,y,z):0<x,y,z<1,x+y+z=1,x+y>z,y+z>x,x+z>y\}$.

1.2 化简下列各式：

(1) $AB\cup A\overline{B}$；

(2) $(A\cup B)\cup(\overline{A}\cup\overline{B})$；

(3) $(\overline{A\cup B})\cap(A-\overline{B})$.

解 (1) $AB\cup A\overline{B}=A(B\cup\overline{B})=A\Omega=A$；