21世纪保险学精算学系列教材

# 利息理论

张连增·编著

南開大學出版社

21世纪保险学精算学系列教材

# 利息理论

张连增 编著

南开大学出版社
天津

**图书在版编目(CIP)数据**

利息理论 / 张连增编著. —天津：南开大学出版社，2005.12

(21 世纪保险学精算系列教材)

ISBN 7-310-02355-2

Ⅰ.利... Ⅱ.张... Ⅲ.利息—理论研究—高等学校—教材 Ⅳ.F032.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 066174 号



南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 16 开本 11.5 印张 2 插页 201 千字

定价:20.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

# 总 序

南开大学是在1979年国内保险业务恢复以后，在全国最早建立保险专业的高校。1984年招收保险专业研究生，1985年招收保险专业本科生，1988年在国内率先招收精算研究生，培养了国内第一批精算研究生，在国内外产生了重要影响。1991年建立了国际保险研究所，是我国综合性大学最早设立的保险研究机构。1994年在国内高校中率先建立风险管理专业方向。1997年招收保险方向博士生。2004年增设保险专业研究生的社会保障方向。目前，正与国际上的保险组织和院校积极合作培养保险专业的本科生和研究生。与此同时，在保持南开大学保险精算教育特色的基础上，积极与国际保险组织合作，引进财产保险教育体系。应当说，二十多年来南开大学保险学科的发展已取得了较大的成就，并已得到社会的认可。

多年来，南开大学保险学系教师在致力于保险人才培养的同时，一直注重保险教材建设，并编写了一批在国内有影响的保险专业教材。如刘茂山教授编写的《保险经济学》，王海柱教授主编的《保险管理学》，刘茂山教授主编的《保险学原理》，江生忠教授主编的《保险会计学》，李秀芳教授主编的《保险精算》，赵春梅副教授、陈丽霞副教授、江生忠教授编写的《保险学原理》，以及我系教师参编的由原中国人民保险公司组织编写的教材《社会主义保险学》、国家人事部考试中心及中国保监会组织编写的《保险理论与实务》、国家教委组织编写的统编教材《保险学》、中国人民银行组织编写的《海上保险》、中国精算师资格考试用书《利息理论》等。近年来，南开大学保险学系教师也出版了多本教材，如李秀芳教授编写的《寿险精算实务》、《中国寿险业资产负债管理研究》，张连增副教授编写的《风险论》，刘茂山教授主编的《国际保险学》，江生忠教授主编的《人身保险市场与营销》、《保险中介教程》、《保险经营管理学》等。此外，我系教师还编写了多本属于保险理论前沿问题的保险专著，同样在国内保险业界产生了重要的影响。应当说，多年来南开大学风险管理与保险学系保险教材与专著的建设对于提高师资水平和教学质量，推动南开大学保险学科的发展发

挥了重要的作用。

对于目前，我们之所以再编写一套“21 世纪保险学精算学系列教材”，其主要原因或考虑是：

一是保险学科属于应用性学科，所以在一段时期后及时更新教材是必要的。目前我国保险专业教材建设虽然在数量上已增加不少，但有些教材的内容与保险业的快速发展相比还是略显陈旧，个别教材的内容还不能反映世界或国内保险业快速发展的现状，呈现理论与实践相脱节的现象，这不仅引起了保险业界的不满，而且保险专业的教师和学生也有同样的感觉。所以，在保险教材数量不少的情况下，写教材、出丛书尽管有可能产生微词，但我们认为还是有必要的。

二是通过丛书，系统地体现南开大学保险教育的特色。南开大学保险学系教师虽已出版多本保险专业教材，但还没有编写一套完整的保险与精算教材丛书。通过编写系统性的教材，目的之一就是希望从整体上推动南开大学保险学科的发展。目前，虽然国内已有部分院校出版了保险专业教材的丛书，但仅是反映某些院校的保险教育状况。此外，在保险教材建设领域，在相隔一段时间增加一套丛书还是有利于保险教育的。需要指出，编写和出版丛书仅是手段而不是最终的目的。所以，我们全体编写人员已达成共识，不能为编写丛书凑数量而忽视质量，不能片面地追求丛书中各书籍在同一时间出版而形成所谓的丛书。当然，我们也希望在不长的时间内能完成该套丛书的编写和出版。

三是注意教材的层次化，写出理论性相对较强的教材。由于保险学科具有应用性的特征，所以目前有些保险教材往往注意教材的应用性而忽视教学的梯度或对象的差异性，以及教材使用对象的层次性，即教材的使用对象不明确，同一教材大学可以用，大专可以用，中专也可以用。事实上，随着我国保险业发展水平的不断提高和经营管理的逐步成熟，培养多层次的保险人才又重新成为保险教育界所面临的一个现实问题，设立保险专业的院校既要培养保险大专人才，也要培养保险本科生和保险硕士生，此外也需要培养高层次的保险博士生。所以，根据不同层次的保险教育编写具有不同特点的保险专业教材是必要的、合理的。此外，编写保险教材，还应把握院校教育与公司教育的差异和特点。公司在职教育固然有其特殊性和必要性，不能被院校教育所替代，而院校教育同样也应有自己的地位和特点，不能变成公司在职教育。所以在教材建设上，两者同样也不能互相替代。最后，需要指出，保险学科虽然具有实践性和应用性的特征，但这并不能否定保险学作为一个独立的学科所应具有的理论性，即使涉及保险业务的一门教材同样存在一定的原理和理论。所以，编写院校保

险教材，强调理论性是合理的。就该套丛书而言，我们的指导思想就是：该丛书的使用对象是高等院校保险专业的本科生，并强调教材的理论性。

参加编写该套教材的作者主要是南开大学风险管理与保险学系的教师，他们大多数人是年轻教师，具有很好的教育背景，并具有较丰富的教学经验和较强的科研能力。此外，为提高教材的质量，我们还邀请了武汉大学、中国对外经贸大学、天津财经大学、广州金融学院等其他院校的部分教师参与我们的教材编写。在编写体制上完全实行主编负责制，由主编确定大纲，组织编写人员，并在最后定稿。当然，在写作过程中，为提高教材的质量，也会有些交流和沟通，并请一些相关的教师进行审阅。

如何进行教材建设，并写出经得起时间考验的经典或好教材，对教师来说是一个永恒的课题。所以，该套教材的推出难免还是存在这样或那样的问题，以至影响到该丛书没有达到我们的初衷。对此，敬请读者批评指正，我们不胜感激。

最后，我们要感谢南开大学出版社的同志，他们为该套教材的出版投入了很大的精力，对此我们深表感谢！

南开大学风险管理与保险学系主任

江生忠教授

2005 年 6 月 1 日于南开大学

# 前 言

本书的目的，是作为高等学校财经类利息理论课程的本科生教材；即使仅具有初等微积分知识的读者，也可以将其作为自修本课程的读物。

严格地说，本书是关于利息的数学理论，它不从经济学的角度讨论利率是如何确定和改变的，而仅限于在给定的利率下，如何计算金融业务中的利息以及借款人向贷款人偿还本金和利息的各种方法。利息理论是精算学中最基础的部分之一，它的基本原理在绝大多数后继课程中都有应用和体现，如寿险精算、养老金精算、投资学、利率风险管理等。从更广泛的角度看，利息理论在金融、保险、会计等领域都有基本的重要性。

S. G. Kellison 的教材是关于利息理论的经典之作。在过去的十年里，国内也出版了多种利息理论方面的书，但作为本科生教材而言，它们都不如 Kellison 的教材更细致；作为专著，它们虽然或多或少地涉及一些应用，但与投资学、利率风险管理方面的专著相比，又显得不足。

本书仍然主要参考 S. G. Kellison 的教材，按照本科生教材的定位，对其内容进行综合、取舍，另外对随机利率的部分材料进行了改写。概括地说，利息理论的基本内容包括：（1）各种利息度量以及时间价值原理。（2）在实务中常见的年金形式。（3）收益率的计算。（4）债务偿还方式分析。（5）债券分析。（6）资产负债匹配与免疫。其中前三部分内容可以视为理论部分，后三部分内容可以视为应用部分。至于随机利率部分，它更多地具有理论意义，一般认为这部分材料可能超出本课程的范围。作者认为，这部分内容已有较长的历史，较早的文献如 P. Boyle 的论文[①]，把这部分材料写入教材，给学生一个开阔视野、提高和加深对本课程理解的机会，是有益的。而且在实务中，随机利率是越来越常见的。当然，对较短时间内的金融投资业务，确定性的利息理论在实务应用中就足够了。另外，随着计算技术的发展，以往一些计算性的困难问题现在

① Boyle, P. (1976): Rates of Returns as Random Variables, Journal of Risk and Insurance, 43, 693~713.

已经处于次要位置。与十多年前相比，现在已有很多数值软件。出于这个原因，虽然本书也介绍了一些数值计算方法，但它们都不是重点。同样地，出于这个原因，本书舍去了不动产抵押利率的近似计算方法。

因此，本书着重介绍利息理论的基本原理和思想。作者认为：把本科教材写得面面俱到，而讲授时剩余很多内容是没有必要的。基于这个考虑，本书力争语言准确简练，表达规范，内容突出要点。本书在各章后都附有习题。希望学习这门课程的学生能尽可能多地独立地做出一些习题，这对切实掌握一门定量的课程至关重要。为了方便教与学，编写了附录“习题解答”，但作者希望，学生们在未经深入地独立练习之前，不要去参考。讲授本书所有内容，应在54课时之内。

编写一本内容正确、表达规范、要点突出、语言准确简练的教材并非易事，它需要一个长期的过程，需要反复总结修正。本书是作者和南开大学风险管理与保险学系2003级几位硕士研究生的合作成果。本书的编写筹划始于2004年6月。起初设想，通过编写本书达到硕士研究生的学术训练目的。初稿完成后，作者历时半年，逐字、数度修改了全部内容，最终写成此书。尽管作者已尽最大努力，但书中恐仍有不当甚至谬误之处，请同行专家及读者不吝指教。

本书的初稿编写人员及其分工如下：闫伟霞，第一章；张策，第二章；张兴，第三章；陆光武，第四章；李科、王丽娜，第五章；张连增，第六章、第七章。特别感谢闫伟霞和王丽娜两位同学的耐心细致的工作。

同时，作者感谢南开大学风险管理与保险学系、南开大学出版社提供的这次机会及其大力支持与帮助。特别感谢本书的责任编辑吴中亚，她细致地审阅了全书，指出了一些内容和形式的不当之处，从而使本书增色不少。

张连增

2005年5月29日

# 目 录

# 第一章　利息的概念与问题

**本章要点**　利息是资金时间价值的表现。本章主要介绍与利息相关的基本概念和求解利息问题的基本方法。

本章必须掌握以下基本概念：利息、现值、终值、实际利率、实际贴现率、名义利率、名义贴现率、利息强度等。理解实际利率、实际贴现率、名义利率、名义贴现率以及利息强度之间的关系。能够求解常见的利息问题，根据不同的情况运用不同的利息表达形式。

## 第一节　利息的基本概念

利息是指资金所有者将资金使用权转让给借款人后所得到的收益。因此，利息也可以看作是租金的一种形式，即借方支付给贷方的损失补偿；这种损失是由于资金使用权的转让而使贷方在一段时间内不能使用该笔资金所导致的。

理论上资金和利息均不必为货币，也不必为同一种商品。例如农夫甲可以将收割机借给农夫乙，乙收割小麦后，甲回收一定数量的小麦。在这个例子中，收割机为资金，而乙交付给甲的小麦则为利息。尽管如此，在几乎所有的实际应用中，资金和利息均可用货币来表示，本书默认这一假设。

### 一、利息度量

通常来说，任何一项普通的金融业务都可以看作是投资一定数量的资金以产生利息。例如，个人在银行的存款可以看作是在银行的投资，产生一定的利息。

把每项业务开始时投资的金额称为本金，一段时间以后收回的总金额称为积累值（或终值），积累值与本金的差额就是这段时间的利息额。

给定最初投资的本金金额，并假定在一段时间内不再注入或抽回资金，那

么在任意时点的积累值均可确定。在这种情况下，该投资金额的变化完全是由于利息的影响引起的。在以后的章节中我们会逐渐放松这种假设，允许在投资期间增加或减少本金。

理论上讲，投资时间可以用不同的单位来度量，如日、周、月、季度、半年、年等。用来度量时间的单位称为“度量周期”或“周期”。最常用的度量周期是年。如无特别声明，通常认为一个度量周期为一年。

考虑 1 个单位本金的投资，定义该投资在时刻 $t$ 的积累函数为 $a(t)$。这个函数具有以下性质：

1. $a(0)=1$，即在时刻 0，开始投资本金金额为 1。

2. $a(t)$ 是单增函数。

3. 通常情况下，利息是连续积累的，此时利息函数为连续函数。但有时利息只在付息日产生，那么此时利息函数就是间断的。

需要指出的是，函数值 $a(t)$ 随时间 $t$ 的增加而减少说明利息为负。尽管数学上存在这种情况，但是实务中很少碰到。例如，亏本的投资即意味着产生了负利息。

一般地，当本金金额是 $k$ 个单位时，积累函数记为 $A(t)$，它表示本金金额为 $k$ 的投资在时刻 $t\geqslant 0$ 时的积累值，即：

$$A(t)=k\cdot a(t)$$

由上式可知，$A(t)$ 与函数 $a(t)$ 具有相同的性质。

以 $I_n$ 表示从投资日起第 $n$ 个时期所得到的利息金额，那么

$$I_n=A(n)-A(n-1),\ n\geqslant 1$$

注意到 $I_n$ 表示一段时间所得到的利息量，而 $A(t)$表示某特定时刻的积累量。

（一）实际利率

实际利率是度量利息的第一种方式。第一个度量周期的实际利率是指 1 个单位本金在该度量周期内所获得的利息金额，用 $i$ 表示。从积累函数来看，

$$i=a(1)-a(0)$$

$$i=\frac{(1+i)-1}{1}=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)}=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{I_1}{A(0)} \tag{1.1.1}$$

因此，第一个度量周期内实际利率也可定义为利息金额与期初时的本金金额之比。

同样可以定义任何一个度量周期内的实际利率，用 $i_n$ 表示：

$$i_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)}=\frac{I_n}{A(n-1)},\ n\geqslant 1 \tag{1.1.2}$$

由（1.1.2）式可知（1.1.1）式中的 $i$ 表示为 $i_1$ 更合适些。

需要注意的是，此处实际利率中“实际”的含义是指在一个度量周期内只支付一次利息，它与后面要讲的名义利率中的“名义”相对比，后者是指在一个度量周期内多次付息。

（二）单利

下面给出积累函数 $a(t)$ 的两种具体形式，它们分别对应于单利与复利。首先考虑单利。

考虑 1 个单位的本金投资，它在每一个度量周期内产生的利息都是相同的。此时，在第一个度量周期期末积累值为 $1+i$，第二个度量周期期末积累值为 $1+2i$，依此类推，积累值函数为线性函数。对任意正数 $t$，

$$a(t)=1+it,\ t\geqslant 0 \tag{1.1.3}$$

称（1.1.3）式对应的利息增长方式为单利。

在单利方式下，在整个投资时期内，每一个度量周期产生的利息均为常数 $i$，但是实际利率是不同的。以 $i_n$ 表示第 $n$ 个度量周期的实际利率，由（1.1.2）式得：

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{[1+in]-[1+i(n-1)]}{1+i(n-1)}=\frac{i}{1+i(n-1)}$$

显然，$i_n$ 是 $n$ 的单调递减函数。因此单利导致递减的实际利率。

**例 1.1.1**　某人将 2000 元存入银行，以单利 8%计息，求 4 年后的积累值是多少？4 年后所产生的利息是多少？

解：4 年后的积累值：

$$A(4)=2000\times[1+(0.08)\times(4)]=2640\ （元）$$

4 年后的利息总量为：

$$I=2640-2000=640\ （元）$$

利息总量也可以用下面的方法求出：

$$I=A(0)\times i\times n=2000\times(0.08)\times(4)=640\ （元）$$

在单利下，一段时间内产生的利息等于本金金额与利率、时间长度的乘积。

（三）复利

在单利情况下，利息不能转化为本金进行再投资。复利是指在投资时期内，本金在一个度量周期内产生的利息在下一个度量周期被计入本金进行再投资。

具体地讲，考虑 1 个单位的本金，在第一个度量周期期末，积累值为 $1+i$，在第二个度量周期开始时，本金和第一度量周期内产生的利息被作为新的本金

金额进行投资，到第二个周期期末时，积累值为$(1+i)+i(1+i)=(1+i)^2$，$(1+i)^2$被进行再投资，第三个周期期末，积累值为$(1+i)^2+i(1+i)^2=(1+i)^3$，依此类推，积累值函数是指数函数。对任意正数$t$，

$$a(t)=(1+i)^t,\quad t\geqslant 0 \tag{1.1.4}$$

称（1.1.4）式对应的利息增长方式为复利。

需要注意的是，在此定义复利方式时，假设利息的再投资率仍是原来的利率。尽管在实务中大部分情况都是如此，但有时利息的再投资率也可能与原来的利率不同。除非特别说明，默认利息的再投资率与原利率相同。

在复利方式下，在整个投资时期内，不同的周期内产生的利息是不同的。事实上，

$$\begin{aligned}I_n&=a(n)-a(n-1)=(1+i)^n-(1+i)^{n-1}\\&=i(1+i)^{n-1}=i\cdot a(n-1)\end{aligned}$$

显然，$I_n$关于$n$单调递增。

在复利方式下，每个周期的实际利率是相同的，这是因为

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{I_n}{a(n-1)}=i$$

下面对单利和复利做一比较。

1. 按定义，在单利方式下，利息不作为投资资金而产生利息；而在复利方式下，本金和到某时刻为止所得到的利息都用来再投资以产生更多的利息。

2. 由二者的积累函数来看，设在第一个周期内的实际利率都是$i$，那么当$t\geqslant 1$时，$(1+i)^t\geqslant 1+it$，所以复利比单利产生更多的利息，从而有更大的积累值；而当$0<t<1$时，$(1+i)^t\leqslant 1+it$，所以单利的积累值大于复利的积累值。另外当$t$较小时，可用单利来近似复利简化计算，即$(1+i)^t\approx 1+it$。

3. 积累函数的增长方式不同。对于单利来说，在相同时间内增长的绝对值为常数，即$a(s+t)-a(t)=s\cdot i$，与时间$t$无关，只依赖于时间长度$s$；对于复利来说，增长的相对比率为常数，即$\dfrac{a(s+t)-a(t)}{a(t)}=(1+i)^s-1$，与时间$t$无关，只依赖于时间长度$s$。

无论从理论上还是从实践上来看，复利比单利更有意义，所以在本书内容中，如果不加特别注明，几乎都是在复利基础上发展起来的。单利的主要意义在于，它提供了处理较短时间内的利息问题的一种很方便的近似方法。

**例 1.1.2** 某人将 2000 元存入银行，以复利 8%计息，那么 4 年后的积累值

为多少？

解：由于$i=8\%$，

$$A(4)=2000(1+8\%)^4=2720.98\ （元）$$

所以4年后的积累值为2720.98元。

把例1.1.2的答案与例1.1.1的答案相比较，例1.1.2中的积累值增加了80.98元，这是由于在较长时期内复利的积累值大于单利的积累值。

（四）现值

本金为 1 的投资在一个度量周期期末将会有$1+i$的积累值。$1+i$称为积累因子。反之，为使一个度量周期期末的积累值为 1，在期初投资的本金额须是$(1+i)^{-1}$。$(1+i)^{-1}$称为贴现因子，记为$v$。

一般地，对应于积累函数$a(t)$，$a^{-1}(t)$就是为使在$t$个周期期末的积累值为1，须在开始时投资的本金金额。$a^{-1}(t)$称为贴现函数。因此，对应于单利或复利，分别有：

单利：$a^{-1}(t)=\dfrac{1}{1+it}$

复利：$a^{-1}(t)=\dfrac{1}{(1+i)^t}=v^t$

为使在$t$个周期期末得到某积累值，而在开始时须投资的本金金额称为该积累值的现值（或贴现值）。因此，积累和贴现是相反的过程，$a(t)$是1个单位的本金在$t$个周期末的积累值，而$a^{-1}(t)$是在$t$个周期末支付1个单位终值的现值。

这里所说的“积累值”严格地讲只与过去的支付有关；“现值”只与将来的支付有关；而对于既可以与过去的支付有关，又可以与将来的支付有关的值，用“当前值”来表示。

**例 1.1.3**　某人为了在第三年年末得到 1000 元，他在开始时必须投资多少本金？设年利率均为 9%，分别用单利和复利进行计算。

解：单利

$$1000a^{-1}(3)=\frac{1000}{1+(0.09)(3)}=787.4\ （元）$$

复利

$$1000a^{-1}(3)=1000v^3=\frac{1000}{1.09^3}=772.18\ （元）$$

（五）实际贴现率

在前面第一部分中实际利率定义为 1 个单位本金在一个度量周期期末产生的利息。相对应地，实际贴现率可定义为使积累值为 1 个单位，须在一个度量周期期初支付的利息用 $d$ 表示，从而期初的本金为 $1-d$。

按定义可得：

$$a^{-1}(1)=1-d$$

从而，

$$\begin{aligned} d &= 1-(1-d)=1-a^{-1}(1) \\ &= \frac{a(1)-a(0)}{a(1)}=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{I_1}{A(1)} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

因此，一个度量周期的实际贴现率也可以定义为该度量周期内获得的利息金额与期末的投资可回收金额之比。

下面的一个实际例子可以帮助理解“实际贴现率”这一概念。设甲以实际利率 6%向某银行借 100 元，期限 1 年，那么在期初银行向甲支付 100 元，在期末，甲归还银行 100 元，外加 6 元的利息，总额为 106 元；如果甲以实际贴现率 6%向银行借 100 元，期限也是 1 年，那么期初时银行收取利息 6 元，从而只付给甲 94 元，在期末时甲归还银行 100 元。

从这个例子可以看出实际利率和实际贴现率的区别。尽管二者在上例中均支付 6 元的利息，但是在实际利率方式下，利息是在期末支付的；而在实际贴现率方式下，利息是在期初支付的。事实上，在实际利率下此人在一年中使用 100 元，而在实际贴现率下使用 94 元。

实际贴现率中“实际”的含义与实际利率中“实际”的含义是相同的，都是相对于“名义”而言的。

实际贴现率与实际利率都是比例数，都是用“利息”除以“投资金额”，区别在于实际利率对应的“投资金额”是期初的“本金”，而实际贴现率对应的“投资金额”是期末的“积累额”。

类似于实际利率，也可定义任一度量周期内的实际贴现率，令 $d_n$ 为从投资日算起第 $n$ 个周期的实际贴现率，根据定义有：

$$d_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n)}=\frac{I_n}{A(n)}, n\geqslant 1$$

这里的 $I_n$ 可称为“贴现金额”。（1.1.5）式中的 $d$ 即为 $d_1$。一般地，类似于 $i_n$，$d_n$ 也可能随不同的周期而变化。然而，在复利下，如果实际利率为常数，那么