高等学校21世纪计算机教材

线性代数

Linear Algebra

苏醒侨　芦陈辉　编著

冶金工业出版社

线性代数

Linear Algebra

高等学校21世纪计算机教材

线性代数

苏醒侨　卢陈辉　编著

冶金工业出版社

2004

内容简介

本书系统地介绍了线性代数的基本理论，内容包括线性方程组、行列式、矩阵的基本运算、可逆矩阵、线性空间、线性映射与线性变换、矩阵的特征问题、二次型以及欧氏空间等。本书取材适当、层次结构清楚、概念清晰，配有形式多样的习题，并提供相应答案，便于教与学。

本书可用作大专院校线性代数课程的入门教材，也可以作为理工类专业教师与学生的教学参考用书，还可以供相关行业的科研和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 苏醒侨等编著. —北京：冶金工业出版社，2004.9

ISBN 7-5024-3611-1

I. 线… II. 苏… III. 线性代数 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 086885 号

出版人 曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）

责任编辑 程志宏

湛江蓝星南华印务公司印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2004 年 9 月第 1 版，2004 年 9 月第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16； 17.25 印张； 397 千字； 268 页； 1–2500 册

28.00 元

冶金工业出版社发行部 **电话**：（010）64044283 **传真**：（010）64027893

冶金书店 **地址**：北京东四西大街 46 号（100711） **电话**：（010）65289081

前　　言

一、关于本书

线性代数是大学理工科的必修基础课，它是一个成熟的知识体系。随着其他学科的不断发展，新的学科、新的理论的不断出现，线性代数作为一门大学理工科的基础课，其基础地位不但没有被削弱，反而得到加强。学好线性代数这门课是学生为以后进一步学习专业知识的重要前提。

为满足大专院校线性代数课程的教学需要，同时也为广大科研和工程技术人员提供一本实用、系统的学习参考读物，本书作者根据多年教学经验和本学科的最新发展，编写了本书。

线性代数的知识内容非常丰富，编辑本书的过程中，作者针对现实的需要，对该知识结构有所取舍，力求构造一个简明而实用的知识体系，更好的体现线性代数的基础学科的地位亦使读者学到必要的学科基础知识，为今后的学习和工作打下坚实的基础。

二、本书结构

全书共分 10 章，具体的结构安排如下：

第 1 章：线性方程组和矩阵基础。主要介绍了线性方程组和矩阵的基础知识，使读者对线性代数这门课程的研究对象和方法有一个初步的认识。

第 2 章：行列式。主要介绍了行列式的定义和性质，并介绍了行列式的展开方式和计算，最后还讨论了用 Cramer 法则求解方程组。

第 3 章：矩阵的基本运算。主要介绍了矩阵的加法与数量乘法、矩阵的乘法及其性质、矩阵的转置与对称矩阵和一些常用的特殊矩阵。

第 4 章：可逆矩阵。主要介绍了一类非常重要的方阵——可逆矩阵，在深入讨论可逆矩阵的性质的基础上介绍了用矩阵初等行列变换求逆矩阵的方法。

第 5 章：线性空间。主要介绍了数域和 n 维向量的知识，线性空间的定义和性质，向量线性相关与线性无关性，基、维数与秩，向量坐标与基变换，子空间，矩阵的秩等内容。

第 6 章：线性映射与线性变换。主要介绍了线性映射与线性变换的定义、线性映射的性质以及线性变换的矩阵等内容。

第 7 章：矩阵的特征问题。主要介绍了矩阵的特征值和特征向量相关知识，相似矩阵与相似对角化矩阵的知识，以及正交矩阵和实对称矩阵的相关知识。

第 8 章：二次型。主要介绍了二次型的矩阵表示，化二次型为标准形，惯性定理和二次型的规范形，正定二次型和正定矩阵以及其他二次型等内容。

第 9 章：欧氏空间。主要介绍了欧氏空间的概念，标准正交基及正交变换等内容。

第 10 章：主要引入六套综合测试题，以帮助读者掌握并巩固所学知识。

三、本书特点

本书以线性方程组为主线，以行列式和矩阵为工具阐明线性代数的基本概念、理论和

方法，强调矩阵基本方法的应用。考虑到线性代数课程概念多、结论多、内容抽象、逻辑性强的特点，尽量以提出问题或简单实例引入概念，力求处理上深入浅出、通俗简单、难点分散。对重点定理和方法，提供较多的例题加以剖析、引导，帮助学生较好地理解、掌握和运用。本书配有形式多样的习题，并提供相应答案，便于练习。

四、本书适用对象

本书可用作大专院校线性代数课程的入门教材，也可以作为理工类专业教师与学生的教学参考用书，还可以供相关行业的科研和工程技术人员学习参考。

本书由苏醒侨和芦陈辉两人合作完成，其中苏醒侨主要负责第 2、3、4、5 章的编写，芦陈辉负责完成了第 1、6、7、8、9 章的编写。

由于作者水平有限，成书时间仓促，书中错误遗漏之处在所难免。敬请广大读者不吝指正。

虽然经过严格的审核、精细的编辑，本书在质量上有了一定的保障，但我们的目标是力求尽善尽美，欢迎广大读者和专家对我们的工作提出宝贵建议，联系方法如下：

电子邮件：service@cnbook.net

网址：www.cnbook.net

本书与小节习题和章末练习相应的参考答案可在本网站免费下载，此外，还有一些其他相关书籍的介绍，可以方便读者选购参考。

编　者

2004 年 7 月

目　录

第 1 章　线性方程组和矩阵基础

在解决现实问题的数学建模过程中，通常涉及到大量的变量和常量，这就需要列出相应的线性方程组。要解决这些线性问题需要将与它们对应的线性方程组变换成容易解决的形式。本章将讨论一种非常实用的方法——高斯消元法。这个方法是将线性问题或者其等价形式的矩阵化简为行阶梯矩阵，利用这种矩阵就可以轻易得到问题的解。

1.1　线性方程组

在平面几何中，有一个如下形式的方程：

$$ax+by=c$$

其中 a、b 不同时为 0，表示一条直线，所以叫做关于变量 x、y 的线性方程。当一个线性方程含有三个变量的时候，则对应一个在三维空间中的平面。当一个线性方程含有大量变量时，个数记为 n，在 x 下面引入下标 $1,2,\cdots,n$，即用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示。那么关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程可用如下形式表示：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

当关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有多个方程时，为方便起见对系数引入双下标，此时则是一个线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ij}x_j\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

在以上的方程组中 a_{ij} 表示第 i 个方程组的第 j 个变量的系数，b_i 在这个方程中则表示一个常量。

在这里的 $a_{11},a_{12},\ldots a_{1n}$ 不能将它们读作“a 十一”，“a 十二”，而是读“a 一一”，“a 一二”，因为这里的 a_{11} 表示第一个方程的第一个未知量 x_1 的系数，这里的 a_{12} 表示第一个方程的第二个未知量 x_2 的系数。a_{ij} 在线性代数中是很常用的，也是一个最基本的，读者要熟悉这一概念。

以上关于 n 个未知变量的 m 个方程，通常称之为 $m\times n$ 的线性方程组。

解 $m\times n$ 的线性方程组如上面所提到的方程组(1)可以得到一串的数值，记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，当用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 分别代替原来的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时，就得到 m 个等式：

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n=b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{ij}\alpha_j\cdots+a_{in}\alpha_n=b_i \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n=b_m \end{cases}$$

此时称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $m\times n$ 的线性方程组的一个解。回答一个线性方程组是否有解并用

最简便的方法来求解一个线性方程组的课程就叫线性代数。

以下介绍相容线性方程组和不相容线性方程组。

定义 1：如果一个线性方程组存在解，那么称之为相容线性方程组，否则称之为不相容线性方程组。

例如以下的线性方程组及其图形。

（1）$x_1 - x_2 = 2$，方程的图形如图 1-1 所示。

（2）$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$，方程组的图形如图 1-2 所示。

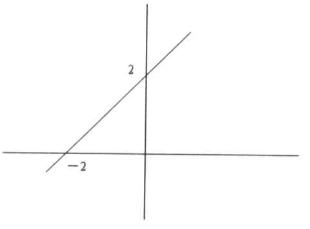

图 1-1

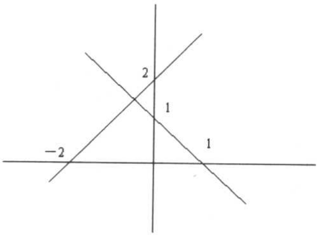

图 1-2

（3）$x_1 + x_2 + x_3 = 1$，方程的图形如图 1-3 所示。

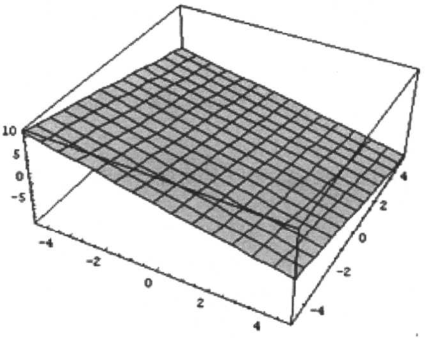

图 1-3

（4）$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$，方程组的图形如图 1-4 所示。

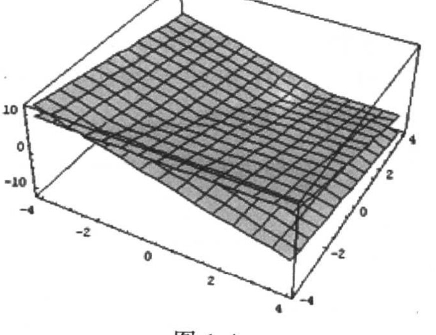

图 1-4

以上给出的四个线性方程组均是相容的。第一个线性方程组的解为图 1-1 中 $x_1 + x_2 = 2$

直线上的任意点。第二个线性方程组的解为图 1-2 中两条直线的交点。第三个线性方程组的解为图 1-3 中 $x_1+x_2+x_3=1$ 平面上的任意点。第四个线性方程组的解为图 1-4 中两个平面的相交直线上的任意点。

现在来考虑如下的线性方程组及相应的图形：

（5）$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2=1 \\ 3x_1+x_2=2 \end{cases}$，方程组的图形如图 1-5 所示。

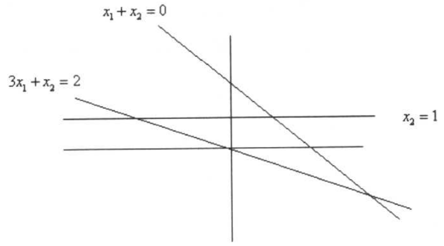

图 1-5

此线性方程组表示三条直线，但是这三条直线并没有交于同一点。因此原线性方程组无解，也就是说这是一个不相容的线性方程组。

更进一步地说，两条平行直线或者两个平行平面永不相交。

如：

（6）$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ 2x_1+2x_2=2 \end{cases}$，方程组的图形如图 1-6 所示。

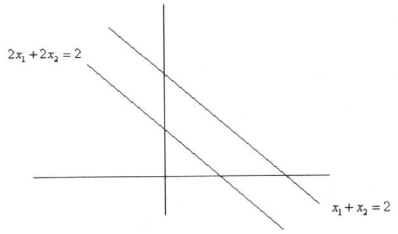

图 1-6

（7）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=10 \end{cases}$，方程组的图形如图 1-7 所示。

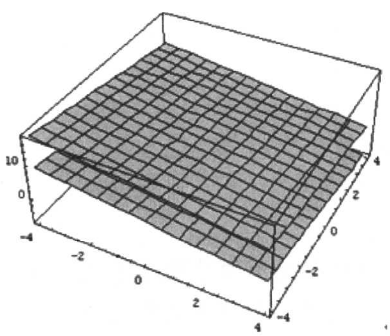

图 1-7

所以它们均是不相容的线性方程组。

定义 2：如果线性方程组 S 与线性方程组 S' 具有相同的解，那么称这两个线性方程组是等值线性方程组。

1.2 高斯消元法和初等变换

1.2.1 高斯消元法简介

这里介绍的求线性方程组解的高斯消元法本质上就是读者在高中时所学的变量消元法。此方法是将原来的 $m \times n$ 的线性方程组化简，使每一个方程的第一个非零系数均处于上一个方程的第一个非零系数的右边。不失一般性，将第一个方程的第一个系数记为 1。称这种线性方程组为阶梯形线性方程组。

例如：

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_2+3x_3=3 \\ 5x_3=4 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3+6x_4=4 \\ x_1+5x_3+22x_4=7 \\ x_4=9 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1+6x_2+7x_3+3x_4+2x_5=7 \\ x_2+7x_3+55x_4+4x_5=98 \\ x_4+x_5=3 \\ x_5=10 \end{cases}$$

而以下则不是阶梯形线性方程组：

$$(4)\begin{cases} x_2+4x_3=3 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=6 \\ x_3=0 \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} x_2+x_3+4x_4=3 \\ 2x_1+x_2+2x_3+5x_4=7 \\ x_3+x_4=1 \\ x_4=9 \end{cases}$$

$$(6)\begin{cases} 4x_2+2x_3+8x_4+x_5=2 \\ x_1+x_2+x_3+5x_4+4x_5=2 \\ x_3+2x_4+4x_5=3 \\ 2x_4+x_5=3 \end{cases}$$

1.2.2 线性方程组的初等变换

将一个线性方程组化简成阶梯形的运算步骤主要有以下三种类型。

（1）将线性方程组的第 i 个方程与第 j 个方程互换，记为 $R_i \leftrightarrow R_j$。

（2）将线性方程组的第 i 个方程乘以非零常数 α，记为 αR_i。

（3）将线性方程组的第 j 个方程加上第 i 个方程的 α 倍，记为 $R_j+\alpha R_i$。

这些变换叫做初等变换。对一个线性方程组作任意多次的初等变换，所得到的新线性方程组与原线性方程组是等值的，即具有相同的解。

接下来来介绍将一个线性方程组化简为阶梯形线性方程组的步骤。

假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $m\times n$ 的线性方程组的未知变量。

（1）找出 x_1 的系数不为零的方程，设为第 i 个方程，将线性方程组的第 i 个方程与第 1 个方程互换，即作 $R_1\leftrightarrow R_i$。

（2）作初等变换 αR_i，将 x_1 的系数化为 1。

（3）作初等变换 $R_i+\alpha R_1$， $i>1$，将第 1 个方程之外的所有 x_1 消去。

（4）将第 1 个方程暂且放一边，对剩下的已经消去 x_1 的方程重复步骤（1）~（3）的操作。从 x_2 开始逐个消去未知变量，直到剩下一个方程。消去变量的过程到此结束。

（5）从最后一个方程开始解方程，之后逐个解出上一个方程的解，最终得到所有方程的解。

【例 1-1】解如下线性方程组：

$$\begin{cases} 3x+y+z=8 & (1) \\ -x+2y+2z=9 & (2) \\ -2x+4y+z=9 & (3) \end{cases}$$

解：首先要将方程（1）的 x 的系数化为 1。这里有多种途径，可以将方程（1）除以 3 或者作初等变换 R_1+R_3。为了避免分数，选择后一种方法，得到一个新的线性方程组：

$$\begin{cases} x+5y+2z=17 & (1') \\ -x+2y+2z=9 & (2') \\ -2x+4y+z=9 & (3') \end{cases}$$

再对新的线性方程组作初等变换 R_2+R_1、 R_3+2R_1，得到：

$$\begin{cases} x+5y+2z=17 & (1'') \\ \quad 7y+4z=26 & (2'') \\ \quad 14y+5z=43 & (3'') \end{cases}$$

最后作初等变换 R_3-2R_2，得到：

$$\begin{cases} x+5y+2z=17 & (1''') \\ \quad 7y+4z=26 & (2''') \\ \quad\quad -3z=-9 & (3''') \end{cases}$$

从后往前计算可以解得此方程组的惟一解：

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

【例 1-2】解如下线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-2x_4=0 & (1) \\ -x_1+x_2+2x_3+x_4=0 & (2) \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=0 & (3) \end{cases}$$

解：作初等变换 R_1+R_2，得到：

$$\begin{cases} x_1+3x_3-x_4=0 & (1') \\ -x_1+x_2+2x_3+x_4=0 & (2') \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=0 & (3') \end{cases}$$

作初等变换 R_2+R_1， R_3-R_1 得到：

$$\begin{cases} x_1+3x_3-x_4=0 & (1'') \\ x_2+5x_3=0 & (2'') \\ -x_2-5x_3+3x_4=0 & (3'') \end{cases}$$

作初等变换 R_3+R_2 得到：

$$\begin{cases} x_1+3x_3-x_4=0 & (1''') \\ x_2+5x_3=0 & (2''') \\ 3x_4=0 & (3''') \end{cases}$$

下面解最后得到的线性方程组。

从最后一个方程可以解得 $x_4=0$

因为 $x_2+5x_3=0$ 含有两个未知变量，不妨设 x_3 为自由变量，记为 t，得：$x_2=-5t$，$x_1=-3t$

由此得到最终的结果：

$$\begin{cases} x_1=-3t \\ x_2=-5t \\ x_3=t \\ x_4=0 \end{cases}$$

从最终的结果可以看出原线性方程有无数个解。

【例 1-3】解如下线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1+10x_2+13x_3=4 & (1) \\ x_1+4x_2+5x_3=0 & (2) \\ -x_1-2x_2-2x_3=1 & (3) \end{cases}$$

解：作初等变换 $R_1 \leftrightarrow R_2$，得到：

$$\begin{cases} x_1+4x_2+5x_3=0 & (1') \\ 2x_1+10x_2+13x_3=4 & (2') \\ -x_1-2x_2-2x_3=1 & (3') \end{cases}$$

作初等变换 R_2-2R_1、R_3+R_1，得到：

$$\begin{cases} x_1+4x_2+5x_3=0 & (1'') \\ 2x_2+3x_3=4 & (2'') \\ 2x_2+3x_3=1 & (3'') \end{cases}$$

将(2")-(3")得到 $3=0$，显然不成立，所以方程组无解，即这是一个不相容的线性方程组。

【例 1-4】k 为何值时，线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 & (1) \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 & (2) \\ x_1-x_2+2x_3=-4 & (3) \end{cases}$$

有惟一解、有无穷多个解、无解？如有解，求出所有解。

解：作初等变换可以将原线性方程组化简为：

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 & (1') \\ 2x_2+(k-2)x_3=8 & (2') \\ \dfrac{(1+k)(4-k)}{2}x_3=k(k-4) & (3') \end{cases}$$

① 当 $k\neq -1$，$k\neq 4$ 时，得惟一解：

$$x_1=\frac{k^2+2k}{1+k},\quad x_2=\frac{k^2+2k+4}{1+k},\quad x_3=\frac{-2k}{1+k}$$

② 当 $k=-1$ 时，由 $(3')$ 得 $0=5$，显然不成立，所以方程组无解。

③ 当 $k=4$ 时，有：

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=4 & (1'') \\ x_2+x_3=4 & (2'') \end{cases}$$

令 x_3 为自由变量，记为 t，得：$x_1=-3t$，$x_2=-t+4$，$x_3=t$

此时线性方程组有无穷多个解。

1.2.3　习题

（1）判断下列线性方程组的相容性；若为相容线性方程组，利用初等变换求出方程组的解。

① $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4 \\ 2x_1+2x_3=6 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_4=2 \\ 3x_1-x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \end{cases}$

（2）确定 k 的值，使之满足下列方程所要求的解的个数。

① 有惟一解

$\begin{cases} kx_1+x_2=14 \\ 2x_1-3x_2=-12 \end{cases}$

② 无解

$\begin{cases} x_1+2x_2+kx_3=6 \\ 3x_1+6x_2+8x_3=4 \end{cases}$

③ 有无穷多个解

$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ x_1+2x_2+x_3=5 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$

（3）讨论线性方程组是否有解，如有解指出是惟一解还是无穷解。给出的线性方程