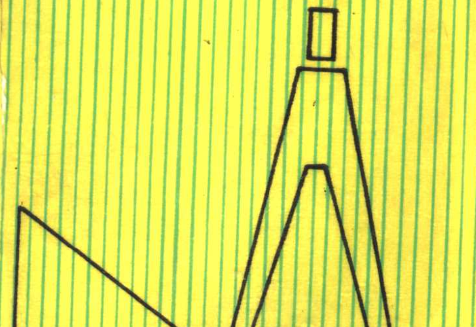
贾中裕 周又之 汪光顺 编

下册

职工中专数学辅导



机械工业出版社

学辅导

下 册

贾中裕 周又之 汪光顺 编

机 械 工 业 出 版 社

前　言

目前，我国广大职工、干部积极地接受成人教育，而职工中专是成人教育中的一个重要方面．为了帮助职工中专学员学好数学课，掌握数学基础知识和加强基本技能的训练，我们参照现行职工中专的数学教材，编写了这本数学辅导书．

职工中专的数学课程的特点是内容横向跨度大．包括初等数学和高等数学两部分．本书分上、下两册，上册为初等数学内容，包括指数与对数、初等函数、三角函数式的变换、直线和二次曲线及数列等．下册为高等数学内容，包括行列式与矩阵初步、一元函数的微积分、概率初步等．

本书编写顺序与职工中专数学教材的顺序基本一致．每章中都有学习重点和例题分析，通过对一些典型例题的分析，辅导学员弄清基本概念，掌握解题思路，总结解题方法；在每章后面还列出练习题和自我检查题，可供学员复习总结时自我检查．为方便读者，在每章后附有略解或答案．

我们希望通过阅读本书，能有助于学员加深对教材的理解，正确掌握基本概念，抓住重点，提高解题能力．

本书不仅适用于职工中专，对电视中专及职工高中也适用．

由于我们水平有限，错误之处在所难免，敬请读者批评指正．

编者

目　　录

第六章　行列式与矩阵初步

§6.1 行　列　式

本节要点：

1. 二阶行列式，三阶行列式及 n 阶行列式的概念.
2. 行列式的性质.
3. 行列式的计算.
4. 利用克莱姆法则解线性方程组.

一、主要内容

（一）行列式的概念

符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示 n 阶行列式，其横排为行，纵排为列．其中 a_{ij} 为行列式的元素（$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, n$），共 n^2 个.

1．二阶行列式和三阶行列式

符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示二阶行列式.用对角线法则展开它,等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.如图 6-1.

符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示三阶行列式. 用对角线法则展开它, 等于 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$. 如图 6-2.

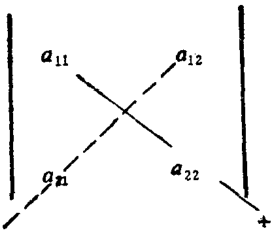


图 6-1

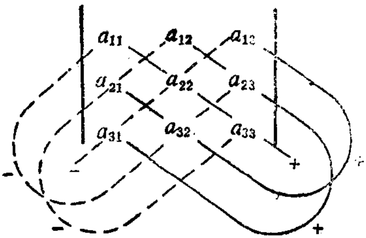


图 6-2

2. 排列的逆序数

由数码 1, 2, …, n 组成的一个有序数组,称为一个 n 级排列. 如 123 和 312 都是 3 级排列, 2431 是 4 级排列. 容易知道, 由 1, 2, 3 三个数码组成的所有 3 级排列为

123, 132, 213, 231, 312, 321

共 6 个. n 级排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$ ($n!$ 读作 n 的阶乘).

在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中, 如果较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面 ($j_s<j_t$), 则称 j_t 与 j_s 构成一个逆序.

一个 n 级排列中逆序的总数称为它的逆序数. 记为

$$N(j_1j_2\cdots j_n)$$

如 4 级排列 2431 中，2 在 1 的前面，4 在 3 和 1 的前面，3 在 1 的前面，共有 4 个逆序，所以 $N(2431)=4$.

如果排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 是奇数，则称为奇排列，是偶数则称为偶排列. 排列 $12\cdots n$ 的逆序数是零，它是偶排列. 在 3 级排列中

123，231，312 是偶排列；132，213，321 是奇排列. 一般地，n 级排列的总数中有一半为偶排列，有一半为奇排列. 即各为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

3. n 阶行列式

由三阶行列式的定义可知，它表示所有位于不同的行不同的列的3个元素乘积的代数和. 3个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列时，便可得到三阶行列式的所有项（不包括符号），共为 $3!=6$ 项. 每一项的符号与列标构成的排列的奇偶性有关，偶排列时取正号，奇排列时取负号.

由此可见，n 阶行列式的定义为

用 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式．它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和，共有 $n!$ 项．各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号．因此 n 阶行列式中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$.

如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 列标的排列是 1234，它是 D 的一项．由于 $N(1234)=0$，所以它取正号．$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 列标的排列是 2413，它是 D 的一项．由于 $N(2413)=3$，所以它取负号．$a_{13}a_{21}a_{31}a_{44}$ 列标的排列是 3114，这说明它有两个元素同时取自第 1 列，所以它不是 D 的项．

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii}\neq 0$（$i=1,2,\cdots,n$），分别称为下三角形行列式

和上三角形行列式．都是三角形行列式．我们来证明它们的值都等于 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

下面以下三角形行列式为例．记它为 D.

行列式 D 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

由于 D 中有很多的项为零，现在来考察哪些项不为零．一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第 1 行，但第 1 行中只有 $a_{11}\neq 0$，所以 $j_1=1$．这就是说 D 中只有含 a_{11} 的项可能不为零．其它项均为零；一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第 2 行，而 D 中第 2 行中只有 a_{21} 和 a_{22} 不为零，又第一个元素 a_{11} 已取自第 1 列，所以第二个元素不能再取第 1 列，即不能取 a_{21}，因此第二个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$．这就是说 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的项可能不为零，其它项均为零；如此推下去，可得 $j_3=3$，$j_4=4$，…，$j_n=n$．于是 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零，其它项均为零．而 $N(12\cdots n)=0$，这一项取正号．所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

（二）行列式的性质

性质 1　将行列式的各行与相应的列互换，行列式的值不变．

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由此可知，行列式的行具有的性质，它的列也具有相应的性质．

性质 2　将行列式的某两行（列）互换，行列式仅仅改

变符号.

即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } s \text{ 行}) \\ \\ \\
\end{array}
$$

性质 3 如果行列式中某两行（列）的对应元素相同，则行列式的值等于零.

性质 4 用一常数 k 乘行列式的某一行（列），等于以数 k 乘此行列式.

即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= k
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

推论 1 如果行列式中某一行（列）的元素都为零，则此行列式的值等于零.

推论 2 如果行列式中某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

性质 5 如果行列式中某一行（列）的每一个元素都写成两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和．这两个行

列式是分别以这两个数为所在行（列）对应位置的元素，其余位置的元素不变。

即
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D_1+D_2$.

性质 6 将行列式某一行（列）的所有元素同乘以数 k 加于另一行（列）对应位置的元素上，行列式的值不变.

即
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{s1} & a_{i2}+ka_{s2} & \cdots & a_{in}+ka_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } s \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

则 $D=D_1$.

根据上述性质，将行列式的行列对换，行列式的值不变；将某一行（列）各元素乘数 k 后加于另一行（列），行列式的值不变.

行列式中某一行（列）有公因数时，可提取到行列式外，作为行列式的因数.

行列式中某一行（列）都是零元素或某两行（列）对应元素成比例时，这个行列式的值等于零.

交换行列式内某两行（列）时，要注意改变行列式的符号.

（三）行列式按某一行（列）展开

1．代数余子式

在 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，余下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式．记为 M_{ij}.

a_{ij} 的余子式 M_{ij} 前面添加符号 $(-1)^{i+j}$，称为元素 a_{ij} 的代数余子式．记为 A_{ij}.

即 $$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

如四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2. 行列式按某一行（列）展开

定理 1　行列式等于它的任意一行（列）的各元素与对应代数余子式的乘积之和.

设 n 阶行列式为 D，则

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{lj}A_{lj}.$$

定理 2　行列式中任意一行（列）的各元素与另外一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 它的系数 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 构成行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为系数行列式.

（四）行列式的计算

1. 二阶行列式，三阶行列式可用对角线法则展开计算.

2. 利用行列式的性质，可化成三角形行列式.

3. 按某一行(列)展开，使 n 阶行列式的计算化成 $n-1$ 阶行列式的计算.

计算三阶或三阶以上的行列式时，如某一行（列）有公因数，应先行提出作为行列式的因数. 某一行（列）有较多的零元素时，则可按这一行（列）展开. 如果没有零元素较多的行（列），则应利用行列式的性质，使某一行（列）出现较多的零元素，进而再按这一行（列）展开.

（五）克莱姆法则

1. n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

克莱姆法则 线性方程组（1）当其系数行列式 $D\neq 0$ 时，有唯一解为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 D_j 是将系数行列式中第 j 列的元素 a_{1j}, a_{2j}, $\cdots$, a_{nj} 对应地换成常数项 b_1, b_2, $\cdots$, b_n 后得到的行列式.

注意：只有当方程组中方程的个数与未知数的个数相等，系且数行列式不等于零时，才能用克莱姆法则.

2. n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

如果齐次线性方程组（2）的系数行列式 $D \neq 0$，则它仅有零解. 也就是说，如果齐次线性方程组（2）有非零解，则它的系数行列式 $D = 0$.

即 $\quad a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0 \quad (i \neq s)$

或 $a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{tn} = 0 \quad (j \neq t)$.

二、例题

例 1 用对角线法计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\qquad$ (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

解：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 27 - 1 - 8 = -18.$

$$（2）\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - c^3 - a^3 - b^3$$

$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

例 2　用化成三角形行列式的方法计算下列行列式

$$（1）\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix};\quad （2）\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix}.$$

解：

$$（1）\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 2 \times (-18)$$

$$= -36.$$

$$（2）\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$