

北京四中



北京四中教学处 编

GAOZHONG SHUXUE

高中数学

北京四中高中学科复习丛书

(修订版)



从高一到高三
扎扎实实读三年

教育科学出版社

北京四中高中学科复习丛书

高中数学

(修订版)

北京四中教学处 编

教育科学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学/北京四中教学处编. - 2 版 (修订版). - 北京: 教育科学出版社, 1999.1 (1999.9 重印)

(北京四中高中学科复习丛书)

ISBN 7-5041-1180-5

I. 高… II. 北… III. 数学课-高中-教学参考资料
IV. G634.604

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 07159 号

责任编辑 刘 进

责任印制 尹明好

责任校对 程丽明

教育科学出版社出版、发行

(北京·北太平庄·北三环中路 46 号)

各地新华书店经销

北京市东华印刷厂印装

开本: 850 毫米×1168 毫米 1/32 印张: 15.375 字数: 384 千

1999 年 1 月第 2 版 1999 年 9 月第 2 次印刷

印数: 15 001—25 000 册 定价: 18.00 元

(如发现印装质量问题, 请与印刷厂联系调换)

北京四中高中学科复习丛书

编 写 组

组
成

长
员

田
徐
陶

佣
克
兴
澄

傅
金

以
伟
第

李

俊
和

修 订 说 明

《北京四中高中学科复习丛书》出版至今已五年了。五年来这套丛书受到广大师生的欢迎和肯定,同时也提出一些宝贵的意见和建议。由于教学内容、教学计划和要求都有了较大的变化,因此我们在原有的基础上对这套丛书进行了修订,以满足我校师生和广大读者的要求。

这些年来,我校在教学中取得了优异的成绩,这是和我们在教学工作中始终遵循教学规律分不开的,特别是和坚持打好基础与培养能力有机结合分不开的。此外,我校十分重视充分挖掘基础知识中蕴涵的思维方法和能力培养的因素,坚持在基础知识的教学培养学生的能力,这些在学生身上都取得了明显的成效。这套丛书精选了我校近几年积累的成效显著的教学资料,充分反映了上述教学特点,因此对高中各科的教与学具有一定的参考价值。

本套丛书包括《高中语文》、《高中数学》、《高中英语》、《高中物理》和《高中化学》五本。

《高中数学》分册,按人民教育出版社统编教材的顺序,分成十三章。每章内容分成2~3节不等(按内容多少分节)。各节中按“知识提要”、“例题分析”、“练习”三部分展开,每章之后再提供一个习题,供读者检测之用。为使读者对练习和习题的结果进行核对,在每章最后附有练习和习题参考答案。

“知识提要”中对知识内容进行了简明扼要的分析,“例题分析”中通过典型例题的分析,力图体现对基础知识、基本方法和基

本技能的教学要求,挖掘基础知识的能力培养因素,强化对学生数学能力的培养.

参与编写的老师有肖国友(第 1 章)、田佣(第 2~4 章)、安东明(第 5 章)、王玲华(第 6 章)、赵康(第 7 章)、谷丹(第 8 章)、常相舜(第 9~10 章)、傅以伟(第 11~13 章)

希望得到读者的指正.

北京四中 教学处

1998 年 9 月

目 录

第一章 函 数

I 集合 映射 函数	(1)
一 知识提要	(1)
二 例题分析	(5)
三 练习 I	(21)
II 幂函数 指数函数 对数函数	(25)
一 知识提要	(25)
二 例题分析	(27)
三 练习 II	(35)
III 函数的应用	(39)
一 知识提要	(39)
二 例题分析	(42)
三 练习 III	(49)
IV 习题一	(51)
V 练习和习题答案	(55)

第二章 三角函数及其图象和性质

I 三角函数概念和基本关系	(64)
一 知识提要	(64)
二 例题分析	(66)
三 练习 I	(69)

II	三角函数的图象和性质	(71)
一	知识提要	(71)
二	例题分析	(73)
三	练习 II	(80)
III	习题二	(82)
IV	练习和习题答案	(84)

第三章 两角和与差的三角函数

I	三角函数的恒等变形	(87)
一	知识提要	(87)
二	例题分析	(90)
II	习题三	(106)
III	习题答案	(110)

第四章 反三角函数和三角方程

I	反三角函数	(116)
一	知识提要	(116)
二	例题分析	(119)
三	练习 I	(124)
II	三角方程	(125)
一	知识提要	(125)
二	例题分析	(127)
三	练习 II	(130)
III	习题四	(131)
IV	练习和习题答案	(133)

第五章 不等式

I	不等式的解法	(137)
---	--------	---------

一 知识提要	(137)
二 例题分析	(138)
三 练习 I	(151)
II 不等式的证明	(153)
一 知识提要	(153)
二 例题分析	(155)
三 练习 II	(163)
III 不等式的综合应用	(165)
一 例题分析	(165)
二 练习 III	(174)
IV 习题五	(176)
V 练习和习题答案	(179)

第六章 数列 极限 数学归纳法

I 数列	(185)
一 知识提要	(185)
二 例题分析	(187)
三 练习 I	(201)
II 数列的极限	(204)
一 知识提要	(204)
二 例题分析	(205)
三 练习 II	(213)
III 数学归纳法	(215)
一 知识提要	(215)
二 例题分析	(215)
三 练习 III	(218)
IV 习题六	(219)
V 练习和习题答案	(222)

第七章 复数

I 复数及其有关概念	(229)
一 知识提要	(229)
二 例题分析	(232)
三 练习 I	(243)
II 复数的运算	(246)
一 知识提要	(246)
二 例题分析	(248)
三 练习 II	(253)
III 习题七	(256)
IV 练习和习题答案	(259)

第八章 排列、组合、二项式定理

I 排列、组合	(262)
一 知识提要	(262)
二 例题分析	(263)
三 练习 I	(272)
II 二项式定理	(274)
一 知识提要	(274)
二 例题分析	(275)
三 练习 II	(279)
III 习题八	(280)
IV 练习和习题答案	(283)

第九章 直线和平面

I 直线与平面	(286)
一 知识提要	(286)

二 例题分析·····	(300)
II 习题九·····	(324)
III 习题答案·····	(332)

第十章 多面体与旋转体

I 多面体和旋转体·····	(336)
一 知识提要·····	(336)
二 例题分析·····	(343)
II 习题十·····	(364)
III 习题答案·····	(368)

第十一章 直线和圆

I 坐标系·····	(370)
一 知识提要·····	(370)
二 例题分析·····	(373)
三 练习 I·····	(376)
II 曲线和方程·····	(378)
一 知识提要·····	(378)
二 例题分析·····	(380)
三 练习 II·····	(383)
III 直线·····	(384)
一 知识提要·····	(384)
二 例题分析·····	(387)
三 练习 III·····	(393)
IV 圆·····	(396)
一 知识提要·····	(396)
二 例题分析·····	(398)
三 练习 IV·····	(406)

V	习题十一	(408)
VI	练习和习题答案	(411)

第十二章 椭圆、双曲线、抛物线

I	椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程 和几何性质	(416)
一	知识提要	(416)
二	例题分析	(424)
三	练习 I	(431)
II	圆锥曲线的综合应用	(433)
一	知识提要	(433)
二	例题分析	(435)
三	练习 II	(453)
III	习题十二	(455)
IV	练习和习题答案	(460)

第十三章 参数方程和极坐标

I	参数方程	(464)
一	知识提要	(464)
二	例题分析	(465)
三	练习 I	(467)
II	极坐标	(468)
一	知识提要	(468)
二	例题分析	(469)
三	练习 II	(471)
III	习题十三	(472)
IV	练习和习题答案	(475)

第一章 函 数

I 集合 映射 函数

一、知识提要

1. 集合

(1) 集合的三个特征

集合是数学中不定义的概念,它具有如下三个特征:

确定性——对于任何一个对象,都能确定它是不是某一给定集合的元素.

互异性——一个给定集合中所含的任何两个元素都是不同的对象.即在一个集合中,元素没有重复现象.

无序性——在一个集合里,不考虑元素之间的顺序.

(2) 集合的表示法

不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$.

列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示有限集合的方法.

描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.其具体形式如下:

{元素的一般形式|元素所具有的公共属性}.

(3) 元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于($\in$)与不属于($\notin$ 或 $\notin$)两种,且仅有这两种关系.

(4)集合与集合的关系

子集:若 $a \in A$, 则 $a \in B$, 称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$.

子集关系中又可细分为二种:

真子集:若 $A \subseteq B$, 且存在 $b \in B$. 但 $b \notin A$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$.

相等:若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

我们规定空集是任何集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$.

(5)集合的运算

交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

补集: $\bar{A} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$,

其中 I 是全集, $A \subseteq I$.

摩根定律: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

2. 映射

(1)映射

设 A 、 B 是两个集合, 如果按照某种对应法则 f , 对于集合 A 中的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一确定的元素和它对应, 这样的对应(包括集合 A 、 B 及从 A 到 B 的对应法则 f)叫做从集合 A 到集合 B 的映射, 记作

$$f: A \rightarrow B.$$

(2)一一映射

设 A 、 B 是两个集合, $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射, 如果在这个映射的作用下, 对于集合 A 中的不同元素, 在集合 B 中有不同的象, 而且 B 中每一个元素都有原象, 那么这个映射就叫做 A 到 B 上的一一映射.

(3) 逆映射

设 $f: A \rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射, 如果对于 B 中的每一个元素 b , 有 b 在 A 中的原象 a 和它对应, 这样所得的映射叫做映射 $f: A \rightarrow B$ 的逆映射, 记作: $f^{-1}: B \rightarrow A$.

3. 函数的概念

(1) 函数的定义

对于非空数集 A, B , 映射 $f: A \rightarrow B$ 使得 B 中每一个元素都有原象, 这样的映射 $f: A \rightarrow B$ 就是定义域 A 到值域 B 上的函数.

(2) 函数的表示法

函数的表示法有三种: 解析法、列表法和图象法.

(3) 反函数

如果确定函数 $y = f(x)$ 的映射 $f: A \rightarrow B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射, 那么这个映射的逆映射 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上用 x 来表示自变量, 用 y 来表示函数, 因此函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 通常表示成 $y = f^{-1}(x)$.

函数 $y = f(x)$ 的图象与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

4. 函数的性质

(1) 单调性

对于给定区间上的函数 $y = f(x)$:

① 如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数;

② 如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是

减函数.

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数,就说 $f(x)$ 在这一区间上具有单调性,这一区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

(2)奇偶性

对于函数 $y=f(x)$:

①如果对于函数定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数;

②如果对于函数定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数.

奇函数的图象关于原点成中心对称图形. 偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形.

(3)周期性(见“三角函数”一章)

(4)最值性

如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 比定义域内其他所有各处的函数值都大(或都小), 则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值(或最小值).

5. 函数图象变换

(1) $y=f(x+a)$, 当 $a>0$ 时, 将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 a 个单位; 当 $a<0$ 时, 将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $|a|$ 个单位.

(2) $y=f(x)+a$, 当 $a>0$ 时, 将 $y=f(x)$ 的图象向上平移 a 个单位; 当 $a<0$ 时, 将 $y=f(x)$ 的图象向下平移 $|a|$ 个单位.

(3) $y=f(-x)$, 作 $y=f(x)$ 关于 y 轴的对称图形.

(4) $y=-f(x)$, 作 $y=f(x)$ 关于 x 轴的对称图形.

(5) $y=f(|x|)$, 去掉 $y=f(x)$ ($x<0$) 部分图象并将 $y=f(x)$ ($x>0$) 的图象与它沿 y 轴翻转到左方的图象合并而成的图形.

(6) $y=|f(x)|$, 将 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴下方的部分沿 x

轴“翻折”到上方与 x 轴上方图象合并而成的图形.

(7) $y=f(ax)$, 其中 $a>0$, 将 $y=f(x)$ 图象上的点沿 x 轴向原点压缩($a>1$)或伸长($0<a<1$)为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍.

(8) $y=af(x)$, 其中 $a>0$, 将 $y=f(x)$ 图象上的点沿 y 轴向原点压缩($0<a<1$)或伸长($a>1$)为原来的 a 倍.

二、例题分析

例 1 已知集合 A 含有 20 个元素, 求含有偶数个元素的 A 的不同真子集的个数.

分析与解答 从集合 A 中任意取出偶数个元素, 都可构成集合 A 的含偶数个元素的子集, 这样的子集共有 $C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + \cdots + C_{20}^{20} = 2^{19}$ 个, 其中不满足是集合 A 的真子集的只有一种情形 $C_{20}^{20} = 1$, 故所求集合 A 含偶数个元素的不同真子集的个数有 $2^{19} - 1$ 个.

例 2 已知全集 $I = \{x | x \leq 8, x \in \mathbb{N}\}$, 若 $A \cap \bar{B} = \{1, 8\}$, $\bar{A} \cap B = \{2, 6\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{4, 7\}$, 求集合 A, B .

分析与解答 由 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{4, 7\}$, 可得 $\overline{A \cup B} = \{4, 7\}$, $\therefore I = \{x | x \leq 8, x \in \mathbb{N}\}$, $\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$. 又由 $A \cap \bar{B} = \{1, 8\}$, 即在 A 中且不在 B 中的元素是 1, 8, $\therefore B = \{2, 3, 5, 6\}$. 再由 $\bar{A} \cap B = \{2, 6\}$, 即在 B 中且不在 A 中的元素是 2, 6, $\therefore A = \{1, 3, 5, 8\}$.

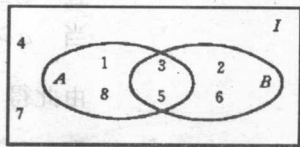


图 1-1

本题也可用集合的图形加以考察. 如图 1-1.

例 3 已知集合 $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $N = \{0, |x|, y\}$, 并且