

///

高等学校教学参考书

# 《工程电磁场原理》 教师手册

倪光正 崔翔 等



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教学参考书

# 《工程电磁场原理》 教师手册

倪光正 崔翔等

高等教育出版社

## 内容简介

本手册是根据倪光正主编《工程电磁场原理》教材编写的配套教材。《工程电磁场原理》是教育部高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划的研究成果,是面向 21 世纪课程教材,同时还被列入普通高等教育“十五”国家级教材规划。

本书是专为使用《工程电磁场原理》教材的教师充实、展开教学内容,进一步提高教学质量而编写的,是作者群体教学经验的总结。全书内容按照该教材章节次序,逐一展述。包含每章的“基本内容与要求”、“教学体系框架”、“相关教学重点、难点解析”以及“习题解析与解答”,并附有本科生期中、期末典型试题和硕士研究生入学典型试题。此外,为便于使用该教材和本书的教师编写具有自己教学风格、方法和经验的讲稿,书中还附有围绕教学重点、难点展开的各相关知识点的电子教案素材(光盘),读者可随意编辑使用。

本书可供普通高等学校教师作为讲授电磁场课程的参考书使用,也可作为广大读者自学电磁场课程的教学参考书和学习指导书,也适合报考硕士研究生的读者在复习电磁场理论知识时参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

《工程电磁场原理》教师手册/倪光正等. —北京:高等教育出版社,2004.11

ISBN 7-04-014543-X

I.工... II.倪... III.电磁场-高等学校-教学参考资料 IV.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 109785 号

策划编辑 刘激扬 责任编辑 刘激扬 封面设计 张楠 责任绘图 尹文军  
版式设计 胡志萍 责任校对 胡晓琪 责任印制 杨明

出版发行 高等教育出版社

社址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100011

总机 010-58581000

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经销 新华书店北京发行所

印刷 国防工业出版社印刷厂

开本 787×960 1/16

印张 13

字数 240 000

版次 2004 年 11 月第 1 版

印次 2004 年 11 月第 1 次印刷

定价 22.70 元(含光盘)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号:14543-00

# 前 言

以分析各类宏观电磁现象的基本规律和应用原理与方法为核心的“电磁场”课程,是培养合格的电气信息类专业本科生所应具备知识结构的必要组成部分。我国近30年来“电磁场”课程单独设课的教学实践证明,本课程不仅为学生的专业课学习奠定了必需的工程电磁场的知识基础,而且也增强了学生适应和创造能力,完善其基本素质提供了根本保证。

基于提高“电磁场”课程教学质量的持续追求,本书是专门为倪光正主编《工程电磁场原理》教材编写的配套教材。目的在于能帮助教师把握该教材各章教学的基本要求,构筑讲授的教学体系和风格,并能结合相关教学重点、难点的分析和讨论,为撰写讲稿提供可行的建议与素材。此外,书中给出的习题解析与题解以及所附光盘中的电子教案素材,应有助于教师的教学组织与实施。

全书内容按照《工程电磁场原理》章节次序,逐一展述,包含每章的“基本内容与要求”、“教学体系框架”、“相关教学重点、难点解析”、“习题解析与解答”以及围绕教学重点、难点展开的各相关知识点的电子教案素材。书中还附有期中、期末典型试题,硕士研究生入学典型试题。

本书在“基本内容与要求”的撰写中,参照了我国“电磁场”课程单独设课以来,历届教育部原电工课程教学指导委员会电磁场课程指导小组制定的“高等工业学校电磁场理论课程教学基本要求”。从而,可以确认,由此反映的课程教学大纲应是国内同仁们长年共同切磋,沟通国内外电磁场课程教学经验与成果的结晶。以持续提高“电磁场”课程教学质量为目的,集聚作者群体从事“电磁场”课程教学几十年的教学经验,书中给出了讲授《工程电磁原理》教材的“教学体系框架”,以及“相关教学重点、难点解析”,其立意在于为使用该教材的教师充实和展开教学内容提供素材,有助于进一步提高教学质量。应该指出,各高校“电磁场”课程设置的教学计划、时教和要求不尽相同,并且任教的各位教师都有自己成熟的教学经验和方法,因此,作者更寄希望于本书能为广大教师形成自己独特的教学风格、方法和经验“添砖加瓦”,共同致力于“电磁场”精品课程的建设。

本书作者还倾心为《工程电磁场原理》教材的全套习题(含个别补充习题)编写了每一题的“解题思路”,以及详尽的题解,同时在书后所附光盘中给出了围绕教学重点、难点展开的各相关知识点的电子教案素材。这样,更有助于教师与教学对象的沟通,为学生营造生动活泼、主动学习的氛围。

参加本书编写的有倪光正、崔翔、杨仕友、李琳、熊素铭和倪培宏六位教师。

编写中得到浙江大学、华北电力大学两校同仁们的关心和支持,夏海霞、金志颖和罗平等硕(博)士研究生协助作者整理、打印书稿,谨在此一并致以衷心的感谢。

限于作者的能力和水平,书中不妥之处,敬请使用本书的同仁们和广大读者指正。

《工程电磁场原理》教师手册

编写组

2004年10月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010) 58581897/58581896/58581879

**传 真：**(010) 82086060

**E - mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编：**100011

**购书请拨打电话：**(010)64014089 64054601 64054588

# 目 录

绪论 .....	1
<b>第 1 章 电磁场的数学物理基础</b> .....	4
1.1 基本内容 with 要求 .....	4
1.2 相关教学重点、难点解析 .....	4
1.2.1 电磁场的物理模型及其分析问题 .....	4
1.2.2 关于源量的注释 .....	5
1.2.3 矢量分析教学中的若干讨论点 .....	6
1.2.4 关于亥姆霍兹定理的注释 .....	8
1.2.5 电磁感应定律的推广 .....	9
1.2.6 电流概念的扩充·全电流定律 .....	11
1.3 习题解析与解答 .....	12
<b>第 2 章 静态电磁场 I: 静电场</b> .....	16
2.1 基本内容 with 要求 .....	16
2.2 教学体系框架 .....	17
2.3 相关教学重点、难点解析 .....	18
2.3.1 电介质的极化·极化电场 .....	18
2.3.2 静电场边值问题的构造 .....	20
2.3.3 关于分离变量法及其应用的讨论 .....	22
2.3.4 关于镜像法及其应用的讨论 .....	27
2.3.5 关于部分电容概念的讨论 .....	31
2.3.6 虚位移法 .....	33
2.3.7 基于法拉第观点分析电场力 .....	35
2.3.8 场图示例 .....	36
2.4 习题解析与解答 .....	41
<b>第 3 章 静态电磁场 II: 恒定电流的电场和磁场</b> .....	87
3.1 基本内容 with 要求 .....	87
3.2 教学体系框架 .....	88
3.3 相关教学重点、难点解析 .....	90
3.3.1 关于导电媒质中建立恒定电流场的讨论 .....	90
3.3.2 静电比拟原理的注释 .....	92
3.3.3 基于场矢量积分关系式的恒定磁场分析方法的讨论 .....	93
3.3.4 关于矢量磁位 $A$ 在恒定磁场中的应用分析 .....	94

3.3.5	磁偶极子在外磁场中的受力分析 .....	98
3.3.6	作用于磁场中两种媒质分界面上的磁压力 .....	100
3.3.7	场图示例 .....	102
3.4	习题解析与解答 .....	104
<b>第 4 章</b>	<b>准静态电磁场</b> .....	<b>141</b>
4.1	基本内容 with 要求 .....	141
4.2	教学体系框架 .....	141
4.3	相关教学重点、难点解析 .....	142
4.3.1	关于准静态场判别条件——似稳条件的讨论 .....	142
4.3.2	准静态场的基本方程及其导出关系式 .....	143
4.4	习题解析与解答 .....	144
<b>第 5 章</b>	<b>动态电磁场与电磁波</b> .....	<b>155</b>
5.1	基本内容 with 要求 .....	155
5.2	教学体系框架 .....	155
5.3	相关教学重点、难点解析 .....	157
5.3.1	坡印廷定理与坡印廷矢量 .....	157
5.3.2	电磁位及其积分解 .....	160
5.3.3	电磁辐射 .....	161
5.3.4	均匀平面电磁波 .....	165
5.3.5	均匀平面电磁波的反射与透射 .....	166
5.3.6	波的极化与琼斯矢量 .....	171
5.3.7	有损媒质中的均匀平面电磁波 .....	173
5.3.8	导引电磁波 .....	174
5.4	习题解析与解答 .....	175
<b>附录一</b>	<b>本科生期中、期末典型试题</b> .....	<b>191</b>
<b>附录二</b>	<b>硕士研究生入学典型试题</b> .....	<b>196</b>
<b>参考书目</b>	.....	<b>199</b>



# 绪 论

## 一、“电磁场”课程的地位、作用与任务

“电磁场”是高等学校电气工程专业的一门技术基础课。其主要任务是：  
(1) 在“大学物理”电磁学的基础上，进一步阐述宏观电磁场的基本规律，并面向电气工程专业工程实际的需要，介绍相关技术应用的基本知识；(2) 培养学生用场的观点对电气工程中的电磁现象和电磁过程进行定性分析与判断的初步能力，以及进行定量分析的基本技能；(3) 通过电磁场理论的逻辑推理，培养学生正确的思维方法和严谨的科学态度。

电气工程专业的核心内容都是电磁现象在特定范围、条件下的体现，分析电磁现象的定性过程和定量方法是电气工程学生掌握专业知识和技能的基础。因而，电磁场课程所涉及的内容，是电气工程本科生所应具备的知识结构的必要组成部分。同时，近代科学技术发展进程表明，电磁场理论又是一些交叉学科的生长点和新兴边缘学科发展的基础。因此，本课程不仅将为电气工程学生专业课的学习准备必需的知识基础，而且将增强学生面向工程实际的适应能力和创造能力，关系到学生基本素质的培养。

## 二、引导入门的教学点

### (1) 什么是场？

教学实践经验证明，在本课程学习之始，首先让学生确立对“场”的科学、全面的认识，是引导学生进入本课程学习，并调动其学习主动性的重要知识切入点。

对于“场”的科学认识可以从以下物理与数学概念着手阐述：

物理概念上的描述：“遍及一个被界定的或无限扩展的空间内，存在着某种必须予以重视、研究的效应”。从而，结合生活实践，并用数学语言（即对应于空间、时间变量的相应物理量的函数关系）给出所论物理效应的“场”的描述。例如，由贴近生活实践的温度场  $T(x, y, z, t)$ 、重力场  $F(x, y, z, t)$  的存在，即可进而演绎电场  $E(x, y, z, t)$ 、磁场  $B(x, y, z, t)$  的客观存在。

纯数学意义上的描述：“给定区域内各点数值的集合，并由此规定了该区域内某一特定量的特性”。

显然，基于“场”的物理概念上的描述，通过数学语言、工具的运用，提升学生

思维抽象化的能力,从而将为本课程自始至终贯穿的数学建模、分析的教學主線索,并最终回归到相应工程物理問題的教學目的和任务奠定必需的学习基础。

### (2) 本课程的理論体系——宏观电磁理論

1865年英国物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell)建立的著名的麦克斯韦电磁场方程组,是宏观电磁理論体系的基础。基于宏观电磁理論所涉及的电磁现象和电磁过程的基本特征是:(1)场域(即场所存在的空间)中媒质是静止的,或其运动速度远小于光速;(2)场域作为点集,点的尺寸远大于原子间的距离。因此,在本课程所讨论的任一场点上,即意味着大量分子的集合,从而,场域中的媒质被看作为“连续媒质”,其电磁等各种物理性能都归结为对应的宏观统计平均效应的表征,即可通过若干个宏观等效的物性连续参数(如电导率 $\gamma$ 、磁导率 $\mu$ 和介电常数 $\epsilon$ )予以描述。

由此可见,宏观电磁理論在物理中也被称为“连续媒质电动力学”,但是,宏观电磁理論决不等于“量子电动力学”或“相对论电动力学”,后者已分别延拓到微观粒子或高速运动体系中电磁现象和过程的研究领域。

### (3) 工程电磁场问题的观察点——“电磁场的有效控制和利用”。

无论从理解近代科学技术成果,或者从发展并实现新的科学技术成果评价,电磁场理論及其应用不仅是日趋发展的电工、电子和信息科学技术的重要基础,而且也是旁及军事、生态、医疗、地质等众多领域新科学技术的生长点。这一切都可聚焦于“电磁场的有效控制和利用”的基本观察点上。在教材第6章“工程电磁场应用专题”中,即部分展示了这一现实的科学技术发展态势,可引导学生自学,拓展其对本课程地位、作用与任务的理解,激发其学习的兴趣与主动性。此外,“电磁场绪论课”录像片,以及作者正在编制的“工程电磁场绪论课”光盘都围绕上述教學目的,有助于本课程教學计划和内容的实施。

## 三、学习方法指导

电磁场理論体系完整、简练,但内涵丰富,概念性强,且较抽象。同时,应用数学知识与工具较多,涉及知识面宽。因而,为有助于学生改善难学、难用的状况,更需要在学生学习方法上加以指导。

### (1) 深入理解,建立正确的物理概念,并熟练运用必需的数学知识和工具。

教學实践证明,学生学习中正确理解物理概念是其困难的主要方面,故教与学两个方面都需致力以求,抓住主要矛盾,通过深入钻研、肯下功夫,使之得以缓解。本课程学习将遵循数学建模、分析的主线索展开,因此,除微积分基础知识外,矢量分析与场論,数理方程(偏微分方程)与特殊函数等数学知识和工具都应结合物理概念的讲授与理解,有的放矢地成为学生定性、乃至定量分析的必备知识基础。

## (2) 掌握常用的各种分析、计算的方法

通过例题、习题等环节,不断提高解题能力,这是理论联系实际,也是通过实践又能动地深化概念理解的过程。

## (3) 逐步建立工程分析的观点

本课程终极目的即在于培养学生分析和解决工程电磁场问题的基本能力。

## (4) 正确的学习态度和方

为循序渐进地把握上述学习要领,必须确立正确的学习态度,并在方法论的高度上,运用演绎法(由一般到特殊),类比法和归纳法等,以努力改进学习效率和完善学习效果。

## 四、本课程学时分配建议

本课程参考学时定为 60 学时。在学时分配比例上,以电气工程类专业为例,建议如下:

1. 绪论课(含可视化教材的演示)	2 学时
2. 电磁场的数学物理基础	6 学时
3. 静态电磁场 I: 静电场	16 学时
4. 静态电磁场 II: 恒定电流的电场和磁场	14 学时
5. 准静态电磁场	6 学时
6. 动态电磁场与电磁波	12 学时
7. 实验课	4 学时

若在信息工程类专业授课,则宜将“动态电磁场与电磁波”学时数增加为 20 学时,而将“静态电磁场 I: 静电场”与“静态电磁场 II: 恒定电流的电场和磁场”学时数分别减为 12 学时和 10 学时。

# 第 1 章 电磁场的数学物理基础

## 1.1 基本内容与要求

理解电磁场物理模型的构成。掌握电磁场的基本物理量——源量和场量的物理概念及其数学描述。理解宏观电磁场中连续媒质概念,以及由其宏观等效的电磁性能参数(如电导率  $\gamma$ 、磁导率  $\mu$  和介电常数  $\epsilon$ )表征的媒质构成关系。

掌握电磁场物理量(矢量、标量)的数学描述式。掌握矢量代数(“平行四边形”法则、标量积和矢量积)运算式。掌握矢量积分(线积分、环量和通量)运算式。以电磁场分析为背景,掌握标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念,及其运算规律。

了解场论的有关基础知识(散度定理、斯托克斯定理和亥姆霍兹定理)。

以物理电磁学知识为基础,掌握电磁感应定律的推广形式,以及基于位移电流假设的全电流定律。掌握麦克斯韦方程组的微分形式。

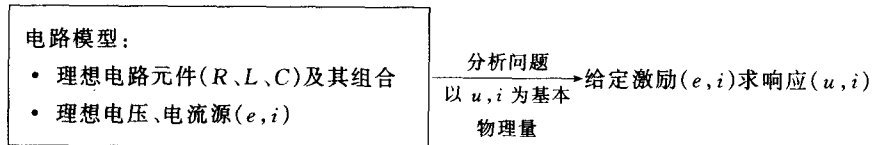
## 1.2 相关教学重点、难点解析

### 1.2.1 电磁场的物理模型及其分析问题

在学生已有的知识基础上,根据电磁现象和过程分析的物理模型构造的本质,通过电磁场分析问题与电路分析问题的物理模型之间的如下对比,将可简洁明了地展述本教学重点。

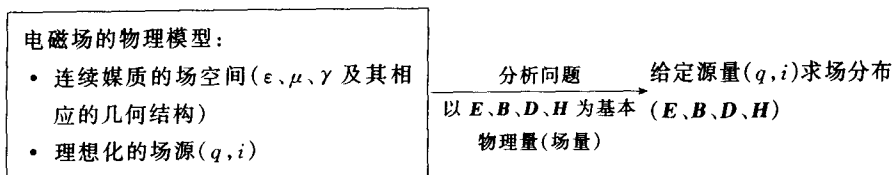
电路分析问题:

实际的电工、电子技术装置  $\xrightarrow{\text{理想化假设}}$  电路模型(一种具体的物理模型)



电磁场分析问题:

实际电磁装置中的电磁现象和过程  $\xrightarrow{\text{理想化假设}}$  电磁场的物理模型



以上电磁场与电路分析问题的求解过程均可归结为:

- (1) 给出与所分析的物理模型对应的基本规律性的数学描述(泛定方程)及其定解条件,即构造相应的数学模型;
- (2) 运用相应的分析计算方法;
- (3) 解出数学模型中的待求物理量,即可得所分析问题的确定解。

### 1.2.2 关于源量的注释

通常,电磁场物理模型中的基本物理量分为源量和场量两大类。源量  $q(\mathbf{r}', t)$  和  $i(t)$  分别用来描述产生电磁场效应的两类场源。

(1) 源量(电荷)  $q(\mathbf{r}', t)$  是物质基本属性之一。1897年英国科学家汤姆逊(J. J. Thomson)在实验中发现了电子,并因此在1906年获诺贝尔物理学奖。1907—1913年间,美国科学家密立根(R. A. Miliken)通过油滴实验,精确测定电子电荷的量值为

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19} \quad (\text{单位:C})$$

确认了电荷量的量子化概念。换句话说,  $e$  是最小的电荷量,而任何带电粒子所带电荷都是  $e$  的整数倍。

宏观分析时,场源电荷常是数以亿计的电子电荷  $e$  的组合,故可不考虑其量子化的事实,而认为电荷量  $q$  可任意连续取值。由此,类同于由物质密度  $\rho$  给定物质的质量  $m$  一样,现引入关于电荷的平滑的平均密度函数概念,即以电荷密度分布的方式来给定带电体的电荷量。

因此,理想化实际带电系统的电荷分布形态,在电磁场的物理模型中,给出了对应于源量分布的四种电荷分布形式:点电荷  $q(\mathbf{r}', t)$ 、电荷体密度  $\rho(\mathbf{r}', t)$ 、电荷面密度  $\sigma(\mathbf{r}', t)$  和电荷线密度  $\tau(\mathbf{r}', t)$ 。

(2) 源量(电流)  $i(t)$ :

源于电荷定向运动的电流  $i$  定义为

$$i = \frac{dq}{dt} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{单位:C/s 或 A}) \quad (1.1)^*$$

可见,电流  $i$  为一积分量,不是点函数。但是,在电磁场分析的物理模型中,研究的是场空间中各点的电磁现象和过程变化的规律性,因此,还必须引入对应于源

\* 为与教材中公式编号有所区别,本手册中公式编号采用这种形式。

量  $i(t)$  分布的点函数形式的描述。为此,按式(1.1)定义了源量:体电流密度(简称电流密度) $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ 。该矢量点函数的量值为

$$|\mathbf{J}| = \lim_{\Delta s_n \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s_n} = \frac{di}{ds_n} \quad (\text{单位: A/m}^2) \quad (1.2)$$

式中  $\Delta i$  为流过垂直于电荷流动方向的面元  $\Delta s_n$  内的电流。该矢量点函数  $\mathbf{J}$  的方向,习惯上被定义为正电荷运动的方向。

### 1.2.3 矢量分析教学中的若干讨论点

在学生已有的高等数学中矢量分析概念的基础上,结合本课程教学的需要,可形成以下教学的讨论点:

#### (1) 掌握点函数在不同坐标系下的数学描述

**例 1.1** 设标量点函数  $\varphi(\mathbf{r})$  在直角坐标系下的表示式为  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ , 试写出该点函数在圆柱坐标系下的表示式,并以给定点的函数值验证该点函数与坐标系的选择无关。

**[解]** 由教材附录一可知  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ ,  $z = z$ 。代入之,即得在圆柱坐标系下,该点函数应记为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \varphi(\rho, \phi, z) = (\rho \cos \phi)^2 + (\rho \sin \phi)^2 - z \\ &= \rho^2 - z \end{aligned}$$

设给定点  $P(x, y, z)$ , 其直角坐标为  $x = 1, y = 1$  和  $z = 1$ ; 同样由附录一可知该点  $P$  对应的圆柱坐标为  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$ ,  $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$  和  $z = z = 1$ 。因此可得标量点函数  $\varphi(\mathbf{r})$  在直角与圆柱坐标系中对应于  $P$  点处的函数值分别为

$$\varphi_P(x, y, z) = \varphi_P(1, 1, 1) = 1^2 + 1^2 - 1 = 1$$

$$\text{和} \quad \varphi_P(\rho, \phi, z) = \varphi_P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1$$

两者结果相同。同理可继续逐点验证,其结论是:点函数值与所采用的坐标系无关。由此可指导学生解题 1-4。

#### (2) 巩固与掌握标量场梯度的物理概念及其数学描述

可通过上山、爬坡,乃至山地区域中公路、铁路线建设的实践,深化学生已有的关于梯度的物理概念。并可讨论以下例题,以进一步结合数学描述,深化对梯度物理概念的理解。

**例 1.2** 设一标量点函数  $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$  描述了空间标量场。试求:

- ① 该点函数  $\varphi$  在点  $P(1, 1, 1)$  处的梯度,以及表示该梯度方向的单位矢量;
- ② 求该点函数  $\varphi$  沿单位矢量  $\mathbf{e}_l = \cos 60^\circ \mathbf{e}_x + \cos 45^\circ \mathbf{e}_y + \cos 60^\circ \mathbf{e}_z$  方向的方向导数,并以点  $P(1, 1, 1)$  处该方向导数值与该点的梯度值作以比较,得出相应结论。

【解】 ① 由梯度定义式(1-26),可解出待求  $P$  点的梯度为

$$\begin{aligned}\nabla \varphi \Big|_P &= \left[ \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 - z) \right]_P \\ &= (2xe_x + 2ye_y - e_z) \Big|_{(1,1,1)} \\ &= 2e_x + 2e_y - e_z\end{aligned}$$

表征其方向的单位矢量

$$\begin{aligned}e_G \Big|_P &= \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \Big|_P = [(\cos\alpha)e_x + (\cos\beta)e_y + (\cos\gamma)e_z] \Big|_P \\ &= \frac{2xe_x + 2ye_y - e_z}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2}} \Big|_{(1,1,1)} \\ &= \frac{2}{3}e_x + \frac{2}{3}e_y - \frac{1}{3}e_z\end{aligned}$$

② 由方向导数与梯度之间的关联式(1-25)可知,沿单位矢量  $e_l$  方向的方向导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial l} &= \mathbf{G} \cdot e_l \\ &= (2xe_x + 2ye_y - e_z) \cdot \left( \frac{1}{2}e_x + \frac{\sqrt{2}}{2}e_y + \frac{1}{2}e_z \right) \\ &= x + \sqrt{2}y - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

对于给定的  $P$  点,上述方向导数在该点取值为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_P &= \left( x + \sqrt{2}y - \frac{1}{2} \right) \Big|_{(1,1,1)} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

而该点的梯度值按式(1-27)可得为

$$\begin{aligned}|\nabla \varphi|_P &= \sqrt{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2} \\ &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \Big|_{(1,1,1)} \\ &= 3\end{aligned}$$

显然,因  $|\nabla \varphi|_P$  描述了  $P$  点处标量点函数  $\varphi$  的最大变化率,即最大方向导数,

故  $\frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_P < |\nabla \varphi|_P$  恒成立。

由此可指导学生解题 1-1。

(3) 掌握直角坐标系下散度的导出过程,及其表达式(1.2.5节)。

由此可指导学生解题 1-2。

(4) 掌握直角坐标系下旋度的导出过程,及其表达式(1.2.6节)。

由此可指导学生解题 1-3。

(5) 强调指出以下几个矢量分析的恒等式:

- $\nabla \times \nabla V = 0$  (任意标量函数梯度( $\nabla V$ )的旋度恒等于零);
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  (任意矢量函数旋度( $\nabla \times \mathbf{A}$ )的散度恒等于零);
- $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
- $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi$
- $\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$

#### 1.2.4 关于亥姆霍兹定理的注释

主教材采用演绎法(由一般到特殊),在麦克斯韦方程组的基础上,展开描述宏观电磁场基本规律的基本方程体系。展述中同时突出了论述矢量场散度和旋度特性的亥姆霍兹定理,从而以电磁场的散度和旋度构成电磁场的分析基础,逐一阐述各种类型的电磁场,并给出相应的基本场量的计算关系式。

亥姆霍兹定理的内涵在于:无限空间中的电磁场作为矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ,按定理所述,其特性取决于它的散度和旋度特性。因定理表明,该矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

式中标量函数

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.4)$$

和矢量函数

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.5)$$

由此可见,无限空间中的电磁场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  唯一地取决于其散度及旋度的分布。同时,根据散度和旋度的物理意义,由式(1.4)和式(1.5)可见,定理也给出了电磁场中场量  $\varphi(\mathbf{r})$  和  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  [当然,也包含由式(1.3)定义的场量  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ] 与场源 [散度源  $\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')$  和旋度源  $\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')$ ] 之间的定量关系。

此外,基于亥姆霍兹定理,当可对各种类型的电磁场给出如下规律性的描述:

(1) 无旋场:若场中旋度处处为零,即  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv 0$ ,但其散度  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ ,则该矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  被称为无旋场。

由亥姆霍兹定理可知,此时  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r})$ 。由此可见,无旋场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  也可通过一个标量函数  $\varphi(\mathbf{r})$  的引入,等价于该标量梯度场的描述。例如,静电场满足无旋性  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ ,即可借助于标量电位函数  $\varphi(\mathbf{r})$  的引入,使无旋的矢量场  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  的描述,等价于标量电位梯度场  $[-\nabla \varphi(\mathbf{r})]$  的描述。

(2) 无散场(无源场或也称管量场):若场中散度处处为零,即  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv 0$ ,但其旋度  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ ,则该矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  被称为无散场。例如,恒定电流的磁



场即为一例,满足基本方程为 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ 和 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{J}_c$ 。

(3) 一般的矢量场:若场中散度和旋度均不为零,即 $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ ;  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ ,这类场属一般的矢量场。此时,矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的解答即由式(1.3)给出。

### 1.2.5 电磁感应定律的推广

法拉第(M. Faraday)在1831年发现电磁感应现象时,是在特定的导电回路中由实验而总结得出的规律。此后,麦克斯韦把导电回路的概念推广到场域空间的任一假想闭合回路的情况,提出了“涡旋电场”的假设,即只要与该回路相交链的磁通发生变化,即使没有感应电流产生,但在该回路中的任一点总有感应电场 $\mathbf{E}_i$ 存在,因而沿任一闭合回路都会产生感应电动势。这一关于电磁感应定律的推广,其数学描述即归结为麦克斯韦第二方程:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6)$$

方程表明,源于感应电场 $\mathbf{E}_i$ 的有旋性,即 $\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = e = - \frac{d\Phi}{dt}$ ,合成电场 $\mathbf{E}$ 为涡旋场。

例 1.3 电子回旋加速器( $\beta$ 加速器)可作为麦克斯韦第二方程(1.6)物理含义最生动的实验例证。

电子回旋加速器的构造(图 1.1)中电磁铁由正弦电流激励,在两磁极中间放置一扁平环形真空室。该加速器内运动电子的加速就是在这一真空室内由变动的磁场所产生的感应电场来实现的。

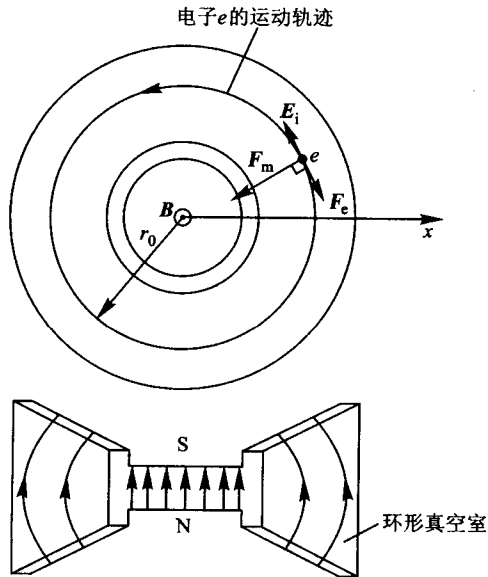


图 1.1 电子回旋加速器构造的原理图