高中**数学**

题源

TIYUAN

与各种版本的高中课程教材配套使用

函数

GAOZHONGSHUXUE

丛书主编：傅荣强

本册主编：陈长城

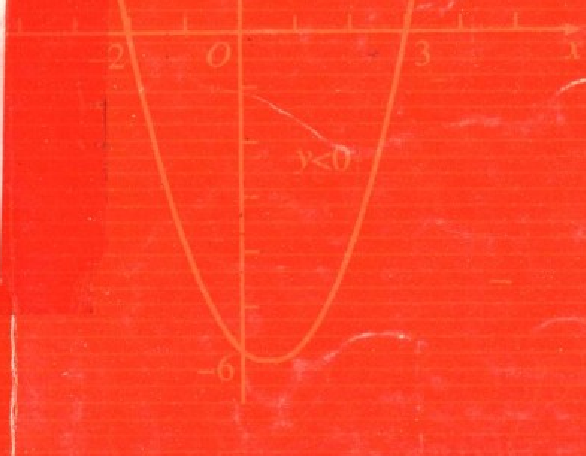
按专题分册

按知识划块

按题型归类

按方法总结

按梯度训练



河北教育出版社

函数题源

高中数学

丛书主编：傅荣强　本册主编：陈长城

河北教育出版社

本书作者

主编： 陈长城

编者： 韩丽云　孙吉利

责任编辑： 王福仓

装帧设计： 比目鱼工作室

题源 高中数学 函 数

出版发行	河北教育出版社 （石家庄市友谊北大街 330 号　http://www.hbep.com）
印　　刷	保定市印刷厂
开　　本	880 × 1230　1/32
印　　张	7.25
字　　数	208 千字
版　　次	2003 年 12 月第 1 版
印　　次	2003 年 12 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7－5434－0810－4/G·653
定　　价	8.50 元

前　言

本书名曰“题源”，有两层含义：一是“题”；二是“源”。这里的“题”是指精选的例题、习题，题目讲解的角度新颖独特，避免题海战术；“源“是指出处、源头，即题目的来龙去脉。“题源”即通过追溯源头来了解数以万计的“题”为何抽象成了有限的“题型”，各种“题型”如何提炼出具体的解决“方法”，各种“方法”又如何再落实到具体应用。

目前的教材改革提倡由具体到抽象、由特殊到一般的教育理念，由具体入手，通过具体操作，体会方法延伸，以提高其实用价值。

本套书从实战操作入手，从“题”的角度切入，每本书224页的内容，足以让你领略“题”的意境；从“源”的角度着重，讲求“题型”、“方法”归纳的简练，提纲挈领，充分让你体会“源”的韵味。

本套书的设计思路：

1. 按专题分册　本套书以现有的各种版本教材为基础，取材于各种教材的交汇处，按专题分册编写，可与各种版本的教科书配套使用。全套书共计52册，包含初、高中的数学、物理、化学、三个学科的40个专题，计40册；另有按册编写的初、高中语文各6册。

2. 按知识划块　每册书的内容即一个专题内容，全书按知识点分成若干讲，使你对本部分知识的脉络框架一目了然。

3. 按题型归类　每一讲按具体内容分成若干题型，使你对本部分知识都包含哪些题型心中有数，避免因不清楚自己对本部分知识掌握的深浅程度而浪费精力。

4. 按方法总结　每个题型都有相应总结出的方法作为解题指导，使你能知其然，还能知其所以然。

5. 按梯度训练　每一讲的例题及习题都是精选的与题型相关的经典题、创新题，其中创新题篇幅约占30%，大多从具体问题入手，以

探究问题的发展趋势为主，由易到难，循序渐进。

全书栏目设计简单、清晰，具体包括：

1. **题型归纳** 每一讲内容按知识点分布结构归纳成若干题型；

2. **方法概述** 每一个题型后紧随针对此题型的具体解题方法；

3. **例题设计** 每一个方法后是阐述此方法应用的经典例题；

4. **解法点评** 每组例题后相应都有关于此方法适用程度的点评；

5. **要点提示** 解题过程中间或有插入提示指点迷津；

6. **习题配备** 每讲后都配有为巩固本讲知识内容而设置的习题，后附答案与提示。

书由“越学越厚”到“越学越薄”，表明接受知识由难到易的进程，本书教你“越学越薄”的办法。俗语说“万变不离其宗”，宗在哪儿？本书旨在告诉大家如何从源头找到解决各种复杂问题的思路，体味什么是真正的“举一反三”。

“问渠哪得清如许，为有源头活水来”。最近几年的中、高考命题，向综合性、多元化、实用性方向发展，如何把握命题方向，从最简单的角度切入复杂问题当中，从而把复杂问题分解、简化，逐一解决，这是本书要着意顾及的。愿本套书的编写模式，能使你不再不知道学得是否到位，不再对新题型懵懵懂懂，不再对难题发怵。

本套书经过近百位一线教师近一年的努力，终于功成。使我们感到欣慰的是本书从整体框架设计、题型结构设计，到例题、习题选取、讲解梯度，都达到了我们设想的最佳水准。当然，因为种种原因，书中还有一些不尽如人意之处，欢迎广大读者提出宝贵意见。

2004 年元月

目 录

第一讲 函 数

本讲题型

序 号	题 型
1	函数的定义
2	函数的定义域
3	函数的值域
4	函数的对应关系
5	求函数值

题型 1 函数的定义

(1)判断 y 是否是 x 的函数

方法 设 $x\in A, y\in B$，x 与 y 之间的对应关系是 $f: x\rightarrow y$.

y 是 x 的函数，必须且只需：

(1)A、B 都是非空的数集；

(2)按照 f，对 A 中的任意一个数 x，在 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应.

【例 1】 判断下列各题中的 y 是否是 x 的函数：

(1)$y=\sqrt{-x^2-2x-\frac{3}{2}}$；

(2)$y=2005x^2+2006x+2007$；

(3)$y^2=2x$；

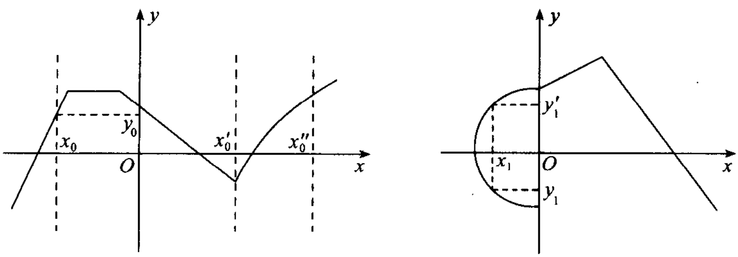
(4)x 与 y 之间的关系，由下面的表格给出：

x	19210701	19270801	19491001	19491001＜x＜19970701	19970701	19991202	20101231
y	1	2	3	4	5	6	7

(5)x 与 y 之间的关系，由下面的表格给出：

x	1	2		3
y	4	5	6	7

(6)x 与 y 之间的关系，由图 1-1(1)中的实线给出；



(1)　　　　(2)

图 1-1

(7)x 与 y 之间的关系，由图 1-1(2)中的实线给出.

解　(1)由 $-x^2-2x-\frac{3}{2}\geqslant 0$，即 $(x+1)^2+\frac{1}{2}\leqslant 0$ 可知，x 的取值范围是 $\varnothing$，

大于零

所以，y 不是 x 的函数.

(2)y 是 x 的二次函数.

(3)因为 $y^2\geqslant 0$，

所以，$y^2=2x$ 中，x、y 的取值范围分别是

$$\{x\mid x\geqslant 0\},\mathbf{R},$$

它们都是非空的数集.

但是，按照对应关系 $x\rightarrow\frac{1}{2}y^2$，对于 $x\in\{x\mid x\geqslant 0\}$，除 $x=0$ 外，y 都有两个值与之对应. 如：$x=2$ 时，$y=\pm 2$.

所以，y 不是 x 的函数.

(4)x、y 的取值范围分别是

$A=\{19210701,19270801,19491001,19970701,19991202,20101231\}\cup\{x\mid 19491001<x<19970701\}$，

$$B=\{1,2,3,4,5,6,7\},$$

它们都是非空的数集，且

按照表格中给出的对应关系，对任意的 $x\in A$，在 B 中都有唯一确定的值与之对应，

所以，y 是 x 的函数.

(5)当 $x=2$ 时，$y=5$，或 $y=6$，

所以，y 不是 x 的函数.

(6)用垂直于 x 轴的直线"左右横扫"，直线与题中提供的图形处处只有一个交点，见图 1-1(1)，

所以，y 是 x 的函数.

(7)用垂直于 x 轴的直线"左右横扫"，存在 x_1，使得

$$x_1\to y_1,$$
$$x_1\to y'_1,$$

一个 x 对应两个 y，这样的 x 一个也不允许存在

见图 1-1(2)，

所以，y 不是 x 的函数.

(2)判断两个函数是否相同

方法　函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 与 $y=g(x)$，$x\in C$ 相同，必须且只需：(1)$A=C$；(2)f 与 g 相同.

【例 2】 下列各组函数中，哪两个函数是相同的？

(1)$f(x)=1$，$g(x)=x^0$；

(2)$f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-4x-5)}{x^2-6x+5}$；

(3)$f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$，$g(x)=x+1$；

(4)$f(x)=x^2$，$g(x)=\dfrac{x^4+2x^3+2x^2}{x^2+2x+2}$.

解　(1)$f(x)=1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$g(x)=x^0$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 0\}$，

所以，$f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数. 定义域不同

(2)$f(x)=x+1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-4x-5)}{x^2-6x+5}$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-6x+5\neq 0\}$，即 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 1, x\neq 5\}$，

所以，$f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数. 依据是什么？

(3) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}=\begin{cases}x+1, x\geqslant -1,\\ -x-1, x<-1,\end{cases}$

所以，$f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$.

$g(x)=x+1$ 的定义域也是 $\mathbf{R}$.

尽管两个函数的定义域相等，但是，当 $x<-1$ 时，它们的对应关系 $x\to -x-1$与 $x\to x+1$ 却不相同，

所以，$f(x)$与 $g(x)$不是同一个函数.

(4)因为 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$，

这一步是恒等变形

所以，$g(x)=\dfrac{x^4+2x^3+2x^2}{x^2+2x+2}=\dfrac{x^2(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=x^2$，

即

$$g(x)=x^2.$$

又因为 $f(x)=x^2$，

所以，$f(x)$与 $g(x)$是相同的函数.

题型 2　函数的定义域

(1)以解析式的形式给出的函数的定义域的求解问题

方法　当函数 $y=f(x)$用解析式给出时，函数的定义域是指使解析式有意义的实数 x 的集合.

【例 3】 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=x^2+x-\dfrac{1}{x^2-1}+(x+10)^0-\sqrt{x^2-4}$；

(2) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\sqrt{x-2005}+\sqrt{2005-x}$.

分析　一个函数由几部分构成，求其定义域：①整式部分，x 不受限制；②分式部分，分母不能为零；③形如$[\varphi(x)]^0$ 的部分，$\varphi(x)\neq 0$；④形如$\sqrt[2n]{\Psi(x)}$的部分，$\Psi(x)\geqslant 0$，其中 $n\in \mathbf{N}^*$.

解　(1) $f(x)$的定义域由下面的不等式组确定

$$\begin{cases}x^2-1\neq 0,\\ x+10\neq 0,\\ x^2-4\geqslant 0.\end{cases}$$

解这个不等式组，得

$x \geqslant 2$，或 $x \leqslant -2$；且 $x \neq -10$.

如图 1-2，用区间的形式写出函数的定义域就是

$$(-\infty, -10) \cup (-10, -2] \cup [2, +\infty).$$

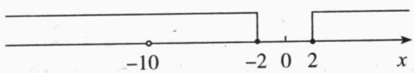


图 1-2

(2) $\because$ $g(x)$ 中的 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 恒成立，

$\therefore$ $g(x)$ 的定义域由下面的不等式组确定

$$\begin{cases} x-2005 \geqslant 0, \\ 2005-x \geqslant 0. \end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$x=2005.$$ 这种情况比较特殊

$\therefore$ 函数的定义域是 $\{2005\}$.

(2) 以表格的形式给出的函数的定义域的求解问题

方法　当函数 $y=f(x)$ 用表格给出时，函数的定义域是指表格中的实数 x 的集合.

【例 4】　学号为 1～10 的十名学生，在一次满分为 150 分的数学竞赛中，成绩、名次如下表所示：

学号 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
成绩 y	150		149	148	147	146	145	144	130	135
名次 z	1		3	4	5	6	7	8	10	9

回答下列问题：

(1) y 是否是 x 的函数？z 是否是 y 的函数？x 是否是 z 的函数？

(2) 指出 (1) 中构成函数关系的函数的定义域.

解　(1) 当 $x=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ 时，y 都有唯一确定的值分别和它们对应，

所以，y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

同理，z 是 y 的函数，记作 $z=g(y)$.

x 不是 z 的函数，这是因为

这里的箭头表示对应 $z=1 \begin{cases} \nearrow x_1=1, \\ \searrow x_2=2. \end{cases}$

(2) $y=f(x)$ 的定义域是 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$；

$z=g(y)$ 的定义域是 $\{150,149,148,147,146,145,144,130,135\}$.

点评

表格中变量的对应关系，有的是函数关系，有的不是函数关系. 如：本例中的 $y=f(x)$，$z=g(y)$，以及 x 不是 z 的函数.

(3) 以图象的形式给出的函数的定义域的求解问题

方法　当函数 $y=f(x)$ 用图象给出时，函数的定义域是指图象在 x 轴上的投影所覆盖的实数 x 的集合.

【例 5】　如图 1-3，函数 $y=f(x)$ 的图象由图中的线段和抛物线 $y=(x-2)^2+3$ 的一部分组成，其中 A 是抛物线的顶点，求函数 $y=f(x)$ 的定义域.

解　如图 1-3，抛物线 $y=(x-2)^2+3$ 的顶点 A 的坐标是 $(2,3)$.

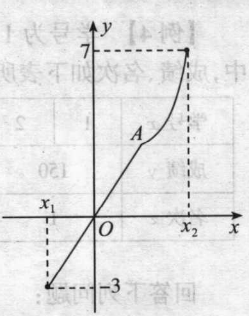


图 1-3

设直线 OA 对应的函数的解析式是 $y=kx$.

把 A 点的坐标 $(2,3)$ 代入 $y=kx$，得

$$k=\frac{3}{2},$$

所以，直线 OA 对应的函数的解析式是

$$y=\frac{3}{2}x.$$

把 $y=-3$ 代入 $y=\frac{3}{2}x$，得

$$x_1=-2. \qquad ①$$

把 $y=7$ 代入 $y=(x-2)^2+3\ (x>2)$，得

$$x_2=4. \qquad ②$$

由①、②可知，函数的定义域是$[-2,4]$.

(4)复合函数的定义域的求解问题

方法 (1)含有两个对应关系符号f、g的函数的定义域的确定：

对于函数$y=f[g(x)]$，若$y=f(u)$的定义域为D_1，$u=g(x)$的定义域为D_2，则一方面应有$x\in D_2$，另一方面应有$g(x)\in D_1$，所以$y=f[g(x)]$的定义域是$D=\{x\mid x\in D_2,且\ g(x)\in D_1\}$.

(2)含有三个对应关系符号f、g、φ的函数的定义域的确定：

若函数$y=f(u)$的定义域为D_1，$u=g(v)$的定义域为D_2，$v=\varphi(x)$的定义域为D_3，则复合函数$y=f\{g[\varphi(x)]\}$的定义域为$D=\{x\mid x\in D_3,且\ \varphi(x)\in D_2,且\ g[\varphi(x)]\in D_1\}$.

【例6】 已知函数$f(x)$的定义域是$(0,2]$，求：

(1)函数$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的定义域；

(2)函数$y=f\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}\right)$的定义域.

分析 解答类似本例的问题，关键在正确划分复合函数的复合层次上，俗称“层层扒皮”.

解 (1)设$u=\dfrac{1}{x}$，则

由函数$f(x)$的定义域是$(0,2]$可知，函数$f(u)$的定义域是

$$D_1=(0,2];$$ ← $f(x)$、$f(u)$的定义域相同

函数$u=\dfrac{1}{x}$的定义域是

$$D_2=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

所以，函数$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的定义域具有

$$D=\left\{x\ \middle|\ x\in D_2,且\frac{1}{x}\in D_1\right\}$$

的形式，用不等式组表示就是

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ 0<\dfrac{1}{x}\leqslant 2.\end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$x\geqslant\frac{1}{2},$$

所以，函数 $f\left(\frac{1}{x}\right)$的定义域是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)设 $u=\sqrt{v}$，$v=\frac{1}{x^2}-1$，则

函数 $y=f\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)$由

$$y=f(u),$$
$$u=\sqrt{v},$$
$$v=\frac{1}{x^2}-1$$

这是在划分复合函数的复合层次，为求出它们的定义域做准备

复合而成，它们的定义域依次是

$$D_1=(0,2],$$
$$D_2=[0,+\infty),$$
$$D_3=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

所以，函数的定义域具有

$$D=\left\{x\,\middle|\,x\in D_3,\text{且}\ \frac{1}{x^2}-1\in D_2,\text{且}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\in D_1\right\}$$

的形式，用不等式组表示就是

$$\begin{cases}x\neq0,\\ \frac{1}{x^2}-1\geqslant0,\\ 0<\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\leqslant2.\end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$-1<x\leqslant-\frac{\sqrt{5}}{5},\text{或}\ \frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant x<1,$$

所以，函数的定义域是$\left(-1,-\frac{\sqrt{5}}{5}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$.

(5)实际问题中的函数的定义域的确定

方法　当函数 $y=f(x)$ 由实际问题给出时，函数的定义域通常由问题的实际背景确定.

【例 7】　如图 1-4 实线部分，某电影院的窗户的上部呈半圆形，下部呈矩形.已知窗户的外框的长是 l，矩形的水平边的长是 x，求窗户的采光面的面积 y 与 x 的函数关系式，并指出函数的定义域.

解　如图 1-4，由题设可知

$$AB=x,$$

$$\overset{\frown}{CD}=\frac{\pi}{2}x,$$

$$AD=\frac{l-x-\frac{\pi}{2}x}{2},$$

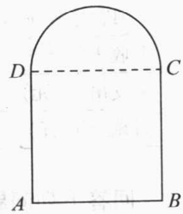


图 1-4

所以 $y=x\cdot\dfrac{l-x-\frac{\pi}{2}x}{2}+\dfrac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$,

即

$$y=\frac{\pi+4}{8}x^2+\frac{l}{2}x.$$

由问题的实际意义，可知

$$\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{l-x-\frac{\pi}{2}x}{2}>0,\end{cases}$$

解得 $0<x<\dfrac{2l}{2+\pi}$.

所以，y 与 x 的函数关系式是

$$y=-\frac{\pi+4}{8}x^2+\frac{l}{2}x,x\in\left(0,\frac{2l}{2+\pi}\right),$$

这个函数的定义域是 $\left(0,\dfrac{2l}{2+\pi}\right)$.

题型 3　函数的值域

方法　(1)当函数 $y=f(x)$ 用表格给出时，函数的值域是指表格中实数 y 的集合.

(2)当函数 $y=f(x)$用图象给出时,函数的值域是指图象在 y 轴上的投影所覆盖的实数 y 的集合.

(3)当函数 $y=f(x)$用解析式给出时,函数的值域由函数的定义域及其对应关系唯一确定.

(4)当函数由实际问题给出时,函数的值域由问题的实际背景确定.

【例 8】 曾金银先生 1~8 月份的月收入、支出、剩余如下表所示:

月份序号 x	1	2	3	4	5	6	7	8
月收入 y(元)	8000	8000	8100	8200	8300	8400	8500	8600
月支出 m(元)	8000	7000	8000	8000	8000	8000	8000	8000
月剩余 n(元)	0	1000	100	200	300	400	500	600

回答下列问题:

(1) y 是否是 x 的函数?

(2) y 是否是 n 的函数?

(3) n 是否是 m 的函数?

按定义去检验

(4)对(1)、(2)、(3)中构成函数关系的函数,写出其定义域、值域.

解　由表格知,x、y、m、n 的取值范围分别是

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B=\{8000,8100,8200,8300,8400,8500,8600\}$, $C=\{8000,7000\}$, $D=\{0,100,200,300,400,500,600,1000\}$.

(1)按照表格中给出的对应关系,对任意的 $x\in A$,在 B 中都有唯一确定的 y 值与之对应,

所以,y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

(2)按照表格中给出的对应关系,对任意的 $n\in D$,在 B 中都有唯一确定的 y 值与之对应,

所以,y 是 n 的函数,记作 $y=g(n)$

(3)当 $m=8000\in C$ 时,在 D 中 n 分别有 0,100,200,300,400,500,600 七个数与之对应,不唯一,

所以,n 不是 m 的函数.

(4)函数 $y=f(x)$的定义域是 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,值域是 $B=\{8000,8100,8200,8300,8400,8500,8600\}$.

函数 $y=g(n)$的定义域是 $D=\{0,100,200,300,400,500,600,1000\}$,值域是 $B=\{8000,8100,8200,8300,8400,8500,8600\}$.

【例 9】 求函数 $y=|x+1|+|x-2|-2$ 的值域.

分析　一般地，称 $x=a$ 为 $|x-a|$ 的零点. 对含有绝对值的问题，可以先求出零点，将问题转化为不含有绝对值的问题，然后琢磨解决问题的其他思路.

解　函数 $y=|x+1|+|x-2|-2$ 的零点是 $x=-1, x=2$. 当 $x<-1$ 时，$y=-2x-1$，当 $-1\leqslant x<2$ 时，$y=1$，当 $x\geqslant 2$ 时，$y=2x-3$，于是

$$y=\begin{cases}-2x-1 & (x<-1),\\ 1 & (-1\leqslant x<2),\\ 2x-3 & (x\geqslant 2).\end{cases}$$

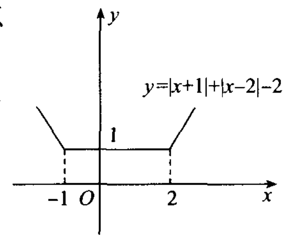


图 1-5

作出函数的图象(如图 1-5).

从函数的图象可以看出，函数的值域为 $\{y\,|\,y\geqslant 1\}$.

点评

根据图象求函数的值域，是一种十分直观的基本方法. 其步骤：(1)作出函数的图象；(2)确定函数的图象在 y 轴上的投影；(3)确定投影对应的实数 y 的范围.

【例 10】 求函数 $f(x)=-\dfrac{2-x+x^2}{2+x^2}+2$ 的值域.

解　显然，函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

先求函数 $y=-\dfrac{2-x+x^2}{2+x^2}$ 的值域.

由 $y=-\dfrac{2-x+x^2}{2+x^2}$，得

$$(y+1)x^2-x+2y+2=0. \qquad ①$$

当 $y\neq -1$ 时，把①视为关于 x 的一元二次方程，由①有实根，其根的判别式 $\Delta\geqslant 0$，得

$$1-4(y+1)(2y+2)\geqslant 0,$$

解得 $-1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leqslant y\leqslant -1+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(y\neq -1)$.

当 $y=-1$ 时，由①得 $x=0$.

$\because x=0\in\mathbf{R}$(函数的定义域)，