林永伟 叶立军 编著

SHUXUE ... YU SHUXUE JIAOYU

数学史与数学教育

浙江大學出版社

数学史与数学教育

林永伟　叶立军　编著

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学史与数学教育/林永伟,叶立军编著. —杭州:浙江大学出版社,2004.4
ISBN 7-308-03620-0

Ⅰ.数... Ⅱ.①林...②叶... Ⅲ.①数学史—史料 ②数学课—教学研究—中学 Ⅳ.①011②G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第014914号

出版发行	浙江大学出版社 (杭州浙大路38号 邮政编码310027) (E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn) (网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑	阮海潮
排　　版	浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷	德清第二印刷厂
开　　本	850mm×1168mm 1/32
印　　张	7.5
字　　数	202千字
版 印 次	2004年4月第1版 2004年4月第1次印刷
印　　数	0001—4000
书　　号	ISBN 7-308-03620-0/O·308
定　　价	17.00元

序

历史上，早在18世纪法国实证主义哲学家、社会学创始人孔德(A. Comte，1798—1857)即提出，由于个体知识的发生与历史上人类知识发生的一致性，因而对孩子的教育必须符合历史的顺序。美国著名数学史家卡约黎(F. Cajori，1859—1930)认为，如果孔德的理论正确的话，那么数学史对于数学教学来说就是一种十分有效、不可或缺的工具[1]。19世纪，德国生物学家海克尔(E. Haeckel，1843—1919)提出一个生物发生学定律："个体发育史重蹈种族发展史。"德国著名数学家F. 克莱因(F. Klein，1849—1925)认为，数学教学至少在原则上要遵循这条定律，因为科学的教学方法只是诱导人去作科学的思考，而不是一开头就教人去碰冷漠的、经过科学洗练的系统。按照历史顺序教授数学，能使学生"看清一切数学观念的产生是如何迟缓；所有观念最初出现时，几乎常是草创的形式，只有经过长期改进，才结晶为确定方法，成为大家熟悉的有系统的形式"。法国著名数学家庞加莱(H. Poincaré，1854—1912)主张数学课程的内容应完全按照历史发展顺序展现给读者，他说：

"动物学家坚持认为，在一个短时期内，动物胚胎的发育重蹈所有地质年代其祖先们的发展历史。人的思维发展似乎也是如此。教育工作者的任务就是让孩子的思维经历其祖先之所经历，迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段。鉴于此，科学史应该

[1] F. Cajori. A History of Elementary Mathematics. New York: Macmillan, 1917

是我们的指南。”[1]

匈牙利著名数学家和数学教育家波利亚(G. Pólya, 1887—1985)则指出:“只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识,我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识作出更好的判断。”荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔(H. Freudenthal, 1905—1990)亦持类似观点,称“年轻的学习者重蹈人类的学习过程,尽管方式改变了”[2]。一些美国学者则坚信,指导个体认知发展的最佳方法是让他回溯人类的认知发展[3]。即使知识点A在逻辑上先于知识点B,但如果B在历史上先于A出现,那么我们仍应先教B。

美国著名数学史家M. 莱因(M. Kline, 1908—1992)坚信历史顺序是教学的指南。他以此为依据,对美国当时的新数运动进行了尖锐的批判:

“数学家花了几千年时间才理解无理数,而我们竟贸然给中学生讲戴德金分割。数学家花了三百年才理解复数,而我们竟马上就教给学生复数是一个有序实数对。数学家花了约一千年才理解负数,但现在我们却只能说负数是一个有序自然数对。从伽利略到狄里克雷,数学家一直绞尽脑汁去理解函数的概念,但现在却由定义域、值域和有序对(第一个数相同时第二个数也必须相同)来玩弄把戏。从古代埃及人和巴比伦人开始直到韦达和笛卡儿,没有一个数学家能意识到字母可用来代表

[1] M. Kline. Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, 1970, 77(3): 264～282

[2] P. Ernest. The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School*, 1998, 27(4): 25

[3] P. S. Jones. The history of mathematics as a teaching tool. In NCTM, *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, 1969. 1～17

一类数，但现在却通过简单的集合思想马上产生了集合这个概念。”[1]

M. 莱因指出：“数学绝对不是课程中或教科书里所指的那种肤浅观察和寻常诠释。换句话说，它并不是从显明叙述的公理推演出不可怀疑的结论来。”[2] 算术、代数、几何、三角和微积分都不是通过操作无意义的符号或按规则玩弄游戏而产生的。从历史上看，在曾经鼎盛过的数以百计的文明中，只有一个希腊文明发展起我们今天所崇尚的演绎数学，这就充分说明，抽象的、演绎的数学并不是自然的，它远离一般人的思想、兴趣和行为，是一门高度复杂、深奥难懂的学科[3]。历史是一面镜子。无理数、负数和复数概念以及微积分等学科的历史都说明：数学家更多地是以直观的方法进行思考，因而在数学教学中，直观方法是主要的，而演绎方法则应该是一个辅助性的工具。

M. 莱因还坚信，历史上大数学家所遇到的困难，正是学生也会遇到的学习障碍，因而历史是教学的指南：从一流数学诞生开始，数学家花了 1000 年才得到负数概念，又花了 1000 年才接受负数概念。因此，我们可以肯定，学生学习负数时必定会遇到困难，而且他们克服这些困难的方式与数学家也是大致相同的[4]。

英国人 E. Harper 在两所文法学校的一至六年级各选 12

---

〔1〕 M. Kline. The ancients versus the moderns: a new battle of the books. *Mathematics Teacher*, 1958, 51(6): 418～427

〔2〕 M. Kline. Carl B. Boyer —In memoriam. *Historia Mathematica*, 1976, 3: 387～394

〔3〕 M. Kline. Mathematics texts and teachers: a tirade. *Mathematics Teacher*, 1956, 49 (3): 162～172

〔4〕 M. Kline. Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*. 1970, 77(3): 264～282

名学生(共 144 人)进行测试[1],测试内容为丢番图(Diophantus,约公元 246—330)《算术》中的问题:"已知两数的和与差,证明这两数总能求出。"结果发现:学生对符号代数的认知发展过程与符号代数的历史发展过程是相似的;意大利学者 G. T. Bagni 对一理工科中学的 88 名 16～18 岁、尚未学过无穷级数概念(但已学过无穷集合概念)的高中生进行过一次测试,测试的问题是无穷级数求和。G. T. Bagni 就各种答案对参加测试者进行了访谈。结果发现:就无穷级数而言,历史发展与个体认知发展是相似的[2]。

长期以来,数学史教材和读本在我国已出版不少,但很少涉及数学史与数学教学关系的探讨。永伟兄等人的力作《数学史与数学教育》有其鲜明的特点,即关注数学史对于数学教学的借鉴意义,数学教师从中不仅可以了解数学发展的历史脉络,还可以获得关于数学教学方法的启迪;在数学教材内容的取舍和顺序安排方面也为编写者提供借鉴。因此,在数学史与数学教育关系方面,本书做了十分有意义的尝试。相信本书的出版对于数学史知识的传播、数学史教学、数学史与数学教育关系的进一步研究都能起到良好的作用。

在本书即将付梓之际,聊此数语,特以为贺。

汪晓勤

2004 年 1 月于华东师范大学

---

[1] E. Harper. Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 1987, 18: 75～90

[2] J. Fauvel, J. van Maanen, (eds.). History in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 91～92

内容提要

本书重点选取与中学数学教学内容相关的数学史料，全面分析了数学重要历史内容、知识结构和思想内涵。应用教育学、心理学原理，结合数学教育现状的调查研究结果，从数学历史的角度，对数学教学实践进行试验与评估。将数学历史发展脉络与现实数学教学相结合，使数学历史内容现实化，发挥数学史的功能作用，以提高数学教学水平，促进数学教育的改革。

前　言

数学是什么？在许多人看来，提出这样的问题，是幼稚可笑的。但事情似乎并不像我们想像的那么简单。

因为不管你是认认真真地学习数学，还是随随便便地学过了数学；无论你是研究数学，还是使用数学，一般来说都只能了解到数学的某个侧面，或者某一片段；某个领域，或者某一分支。也就是说，我们每一个人几乎都不识数学的“庐山真面目”。

如果你是研究经济学的，数学就是统计工具；如果你是从事物理学研究工作的，数学就是微积分；如果你是搞计算机的，数学就是算法语言；如果你是一位建筑设计师，数学则是几何三视图；甚至你自己本身就是研究数学的，你也只能理解你所研究的领域（如概率论）的特点和方法。这种对数学“只鳞片甲”式的了解是普遍存在的现象，这对你所从事的工作和研究活动也许并没有带来明显而直接的影响。

但是，对于数学教育工作者来说，则不能同日而语了。什么样的数学观将会带来什么样的数学教育观。若不识数学的“真面目”，则很难有科学的数学教育思想的体现。把握不住数学的本质特征和内在规律，也就不会产生合乎实际的数学教育方法与手段。

那么，我们怎样才能把事情做得更好呢？或者说以什么样的方式，通过何种途径去不断地接近数学的“庐山真面目”呢？有人告诉我们说：“要了解它，必须先了解它的历史。”我们编著此书的目的就是希望通过了解数学的历史来认识数学，通过全面分析数学发展过程来理解数学，以此来提升我们的数学教育观。

因此，本书将通过收集、整理数学史料，重新审视数学历史，全面分析数学发展历史进程中的重要历史内容、知识结构以及思想内涵，同时应用教育科学原理和心理学研究成果，调查、研究数学教育的现状，试验、评估数学课堂教学，把数学历史发展脉络与现实数学教学进行有机的结合，使数学历史内容现实化，实现数学教学有效化，以提高我们自身的数学素养、数学教育思想水平以及实际教学能力。

林永伟　叶立军

2004年3月

目　录

第一章

数 系

在本章中，我们将以数的历史发展脉络为主线，以自然数、整数、有理数、实数及复数为研究对象，探索各数集产生的历史背景、曲折的发展历程以及在这个变化过程中各数集所蕴涵的规律和特点，总结数学教育的历史经验，同时结合数学教育的现状，构造最佳教学模式，服务于现代数学教育。

第一节 自然数

一、数的起源

1.“匹配”方法的产生

古人在最初是如何确定事物的“多”和“少”或“几个”的呢？对于这个问题，我们所知道的确实很少，但有一点可以肯定，那就是古人确定事物的“多少”，绝不可能像我们现在这样通过“数(音Shǔ)数(音Shù)”的方法来得出事物对象的个数。

那么原始人是怎样解决这个问题的呢？让我们先看下面的例子。

一个原始部落的族长分配一天所捕获的野兔时，先是分给每

人一只，如果有人没有分到，他就知道今天捕获的野兔太少了；如果每人分得一只还有剩余，他就很高兴，嘿！今天的兔子可真够多的；要是每人分两只仍有剩余，那他一定会惊叫起来，啊！今天的兔子实在太多了。

古希腊荷马史诗记载：波吕斐摩斯被俄底修斯刺瞎后，以放羊为生。他每天坐在山洞口照料他的羊群，早晨母羊出洞吃草，出来一只，他就从一堆石子中捡起一颗石子儿；晚上母羊返回山洞，进去一只，他就扔掉一颗石子儿，当把早晨捡起的石子儿全部扔光后，他就放心了，因为他知道他的母羊全都平安地回到了山洞！

从上述两个例子我们发现，古人就是运用“匹配”的方法来确认事物对象的“多”和“少”的。这种方法在今天看来是如此简单，以至于我们大多数人都漠视它的存在。事实上，“匹配”的方法充分体现了古代人的创造和智慧，它包含着深刻的思想内涵，那就是“对应”的思想方法，这在历史上被称为“数学的第一次抽象”。

后来，随着“匹配对应”的对象不断扩展，例如手指、绳结、鹅卵石以及贝壳等等，慢慢地人们把这些“匹配”对象演化为记数工具。

另外，经过长期的实践，人们逐渐认识到虽然“匹配”的对象有各种各样，但它们在量上具有某种共同的特征，如一个绳结，一只羊，一匹马，一扇贝壳，都包含着一个共同的特征“一”。

正如贝特朗·罗素(B. Russell，英国，1872—1970)所说的：“不知要经过多少年，人类才发现一对锦鸡和两天同含一个数字二。”

虽然，人类由具体事物得到抽象数字的过程是漫长的，但“匹配”的方法毕竟在这个抽象过程中起到了关键的作用。

因此，我们可以断言，没有“匹配”的思想，就没有自然数；没有“匹配”的思想，就没有记数法。

2.“匹配”方法的教学意义

与人类发展的初始状态一样，数字对儿童(人的个体的初始状

态)来说也是非常抽象的。按照皮亚杰(Jean Piaget,瑞士,1896—1980)关于儿童思维发展阶段的划分,这一时期的儿童(2～7岁)的思维发展处于前运算阶段,其特点是在形成表象时对具体、静止的事物表现出强烈的依赖性,“还不会区分一般和特殊、想像和现实”。[1]对处在“幼儿期”(皮亚杰所称)的儿童,大量的“匹配”动作是必不可少的。也就是说,应该让儿童通过一系列的“匹配”活动,“经过许多年”,自己形成抽象的数字。

当然,在教师的指引下,这个抽象过程与人类初期漫长的探索相比,可以缩短很多,但是这个由“匹配”到“抽象”的过程依然需要保持,这是由人类思维发展的规律所决定的。

从这个角度我们认为,许多家长对自己的孩子扳着手指头数数表现出的担忧——“你这孩子,这么大了还扳着手指头数数!”——是大可不必的,因为“匹配”的方法,既是人类的智慧,也是人类的本能。

二、记数法

1. 数觉

数觉就是个体对事物对象个数的知觉,是一种“当在一个小集合里增加或减少一样东西的时候,尽管他未直接知道增减,也能辨认到其中的变化”[2]的才能。

数觉存在两个局限:一是具有数觉的动物的种类很少,几种昆虫、几种鸟类和整个人类;二是数觉的范围很小,一般来说不超过四。

因为人类的数觉同样也受制于这两个局限,所以如果不加以突破,“在计算上是不会比鸟类有多少进步的,更谈不上发展什么

[1] 张奠宙等编.数学教育研究导引.南京:江苏教育出版社,1998.第269页

[2] 韩祥临编著.数学史导论.杭州:杭州大学出版社,1999.第91页

数学”。但是,试图扩展数觉的范围显然是一条死胡同。聪明的人类还是想起了他熟悉的办法——“匹配”的方法来应对来自自身生理上的局限的挑战。

2.记数发展过程

随着“匹配”工具的广泛使用,一些“匹配”工具逐渐固定下来,成为人类最早的计算工具。后来为了不至于丢失这些零散的计算工具(如小石子、贝壳、果核等),人们就把它们串在细绳或小树枝上,这样计算工具就得到了“升级”。这就形成了人类记数发展过程中的第一个阶段:算具记数阶段。

根据考古资料,在“山顶洞人”的遗址中发现了四个带有磨刻符号的骨管,很可能是原始人用来记数的“匹配”工具。

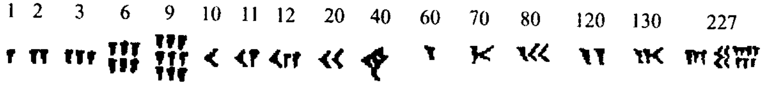
汉代郑玄曾说道:“事大,大结其绳;事小,小结其绳;结之多少,随物众寡。”

《易·系辞》中记载:“上古结绳而治,后世圣人易之以书契。”其中“书契”即刻、画的意思。

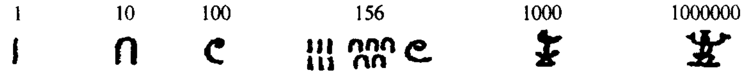
记数方法由“结绳”发展到“书契”,是一个意义重大的历史进步。

随着“书契”记数方法的逐渐推广,人类进入了记数发展过程中的第二个阶段:数码记数阶段。

数码计数就是用一定的符号来表示数。各个国家和民族用不同的符号来表示数,如古巴比伦的楔形数字、埃及的象形数字和中国的筹码数字等。



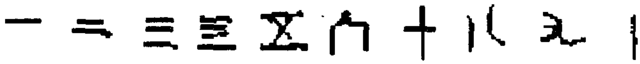
古巴比伦的楔形数字



古埃及的象形数字

数码记数虽然是算具记数最终向文字记数阶段发展的一个过渡阶段，但它的影响却非常广泛。它是通向文字记数的重要桥梁，没有数码记数的长期存在和酝酿准备，文字记数是不可能发展起来的。

伴随着文字的不断创造，数码计数阶段也自然而然地跨入了记数发展过程的第三个阶段——文字记数阶段。最典型的要数“中国数字”了，即一、二、三、四、五、六、七、八、九、十。这十个数字简洁美观，易识易写，随即广为流传，并为后来的“十进位值制”的产生奠定文字基础。



中国1～10的甲骨文数字

3. 印度·阿拉伯数字

现在国际上通用的阿拉伯数字“0,1,2,3,…,9”是印度人对数学乃至整个人类文化发展的重要贡献。

印度人最初用梵文的字头表示数码，表示的方式也不完全统一，后来经过上千年的演变（如下图），当今的写法才逐渐固定下来。这些数字因阿拉伯人而传入欧洲，所以人们就叫它们为“阿拉伯数字”。事实上，阿拉伯人只不过是把这些数字传入西方的信使，而这项创造性的发明应归功于印度人，所以把这些数字称为“印度·阿拉伯数字”才是恰当的。