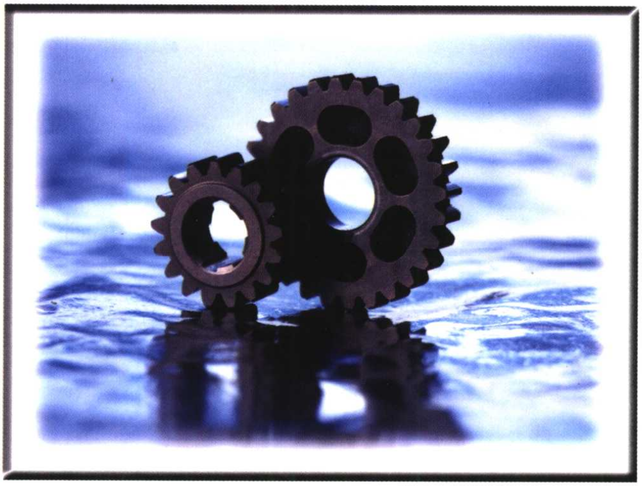
中国机械工程学会
机械工程师继续教育丛书

刀具精确设计理论与实践

刘杰华 编著



国防工业出版社
http://www.ndip.cn

中国机械工程学会
机械工程师继续教育丛书

刀具精确设计理论与实践

刘杰华　编著

国防工業出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

刀具精确设计理论与实践/刘杰华编著.—北京:国防工业出版社,2005.3
(机械工程师继续教育丛书)
ISBN 7-118-03759-1

Ⅰ.刀...　Ⅱ.刘...　Ⅲ.刀具(金属切削)-设计
Ⅳ.TG710.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 002150 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码　100044)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 710×960　1/16　印张 11　206 千字
2005 年 3 月第 1 版　2005 年 3 月北京第 1 次印刷
印数:1—3000 册　定价:19.00 元

国防书店:(010)68428422　发行邮购:(010)68414474
发行传真:(010)68411535　发行业务:(010)68472764

序

21世纪前20年是我国经济社会发展的重要战略机遇期。在这样一个关键历史时期,制造业扮演着重要的角色。制造业作为国民经济和国家安全的物质主体和支柱产业,是科学技术的基本载体,是国民经济高速增长的发动机,是国家竞争力的重要体现。

针对制造业全球化挑战和制造科学与技术的发展趋势以及我国制造业存在的技术创新能力不强、制造技术基础薄弱、技术创新体系尚未形成的问题,我国制定了制造业必须依靠科技进步,开拓出一条资源消耗少、环境污染轻、技术含量高的制造业发展道路,从制造大国走向制造强国的发展目标。为实现这一目标,成为制造强国、接纳国际产业转移,需要大批高水平的科技人才,需要大批熟悉国际国内市场、具有现代管理知识和能力的企业家,需要大批能熟练掌握先进技术、工艺和技能的高级技能人才。为此,中国机械工程学会制定了制造业工程技术人员继续教育规划和继续教育科目指南,开展机械工程师技术资格认证并着手启动了机械工程师国际互认工作,得到了社会的认可和支持。

中国机械工程学会和教育部考试中心合作,成功地在全国开展了机械工程师综合素质和技能考试,现在又同国防工业出版社合作,组织编写了《中国机械工程学会机械工程师继续教育丛书》。本丛书主要是根据中国机械工程学会制定的《继续教育科目指南》以及《机械工程师水平资格考试大纲》(试行)的要求编写,结合相关领域的技术发展特点,突显"实用技术",注重学习能力、协同能力、创新意识与能力和职业技能培养。以期更好的为广大工程技术人员服务。

中国机械工程学会副理事长兼秘书长

2005年2月1日

前　言

金属切削加工是现代机械制造工业中所占比重最大、用途最广和最基本的加工方法，在国民经济发展中一直处于十分重要的地位，而切削刀具在切削加工中又起着至关重要的作用。刀具设计水平的高低，直接影响着机械加工的水平。因此，近年来人们对一些新型的刀具及其设计理论进行了大量的研究，提出了许多新的刀具设计计算新方法。刀具的精度可分为设计精度和制造精度，它直接影响零件的加工质量和生产效率的高低。当刀具的制造精度达到一定程度时，要想进一步提高刀具的精度，只有靠提高刀具的设计精度以消除刀具的理论设计误差来达到。随着当今世界科技的迅速发展，计算机技术的迅速普及以及高精度工具曲线磨床的出现，大量繁琐的计算工作以及加工制造高精度任意曲线已不再成为问题，刀具设计理论亦取得了很大的进展，大量新型结构的、精确的刀具设计计算方法不断被提出，广大工程技术人员都已不再满足于一些近似的刀具设计计算方法，迫切要求掌握一些先进的、新型的刀具设计计算新方法以提高刀具的设计精度。为此，笔者根据自已在刀具领域多年的教学科研经验以及所发表的学术论文，结合国内外本研究领域的最新研究成果，编著本书以供广大工程技术人员及工科院校师生员工等设计、学习和参考用。为了让广大不同层次的工程技术人员和学员都能学会和使用本书的设计计算方法，书中的每一章中既有严格的理论推导过程又附有相应的设计计算程序以及相应的计算实例。

作者衷心希望本书的出版能给同行及广大刀具设计人员以较大的启发和参考，并诚恳希望广大读者对本书提出宝贵意见。

作　者

内 容 简 介

本书的内容以具有新型结构的刀具以及非标刀具的精确设计计算方法为主，着重介绍刀具设计的关键——刀具刃形设计理论，不再重复一般书上已有的刀刃设计计算方法、刀具的通用结构以及参数设计与选取等。全书共分为6章:第1章刀具设计计算的理论基础;第2章成形车刀的精确设计与计算;第3章成形铣刀的精确设计与计算;第4章不铲齿成形刀具的精确设计与计算;第5章非标齿轮滚刀的精确设计与计算;第6章高精度插齿刀的设计与计算。

该书适合于广大的机械制造人员、刀具设计人员、科研人员和教学员工设计、学习和参考用。

目　　录

第 1 章　刀具设计计算的理论基础

1.1　矢量、矩阵与坐标变换

矢量、矩阵与坐标变换作为一种数学工具在刀具的设计计算中起着十分重要的作用，为了便于大家学习掌握后续的内容，本章将简单介绍矢量、矩阵和坐标变换的基本知识和运算法则，更详细地了解矢量、矩阵和坐标变换的知识，读者可以参考其他数学教材和专著。

1.1.1　矢量运算的初步知识

1) 矢量的概念

仅由数值的大小即可表示的、且没有方向概念的量称为数量或标量，如时间、温度和体积等，既有数值大小又有方向的量称为矢量或向量，如力、速度和加速度等。

矢量可以用带箭头的一定长度的线段表示，如图 1－1所示。设矢量的始点是 A，终点是 B，这个矢量就记作 $\boldsymbol{AB}$，箭头的方向表示矢量的方向，线段的长度则表示矢量的大小(为了简单起见，有些也仅用一个字母表示矢量的，如 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{n}$ 等)。

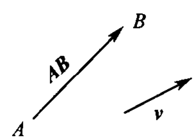


图 1－1　矢量的概念

如果一个矢量的起点在空间的位置可以由我们自由任意选定，则称它为自由矢量，简称矢量。如果矢量的起点规定为坐标系的原点，则称它为矢径(矢径也是矢量)。

矢量的数值大小称为它的模，矢量 $\boldsymbol{AB}$ 或 $\boldsymbol{v}$ 的模就记为 $|AB|$ 或 $|v|$。模等于单位值 1 的矢量称为单位矢量(又称幺矢)，模等于零的矢量称为零矢量。零矢量的方向是不确定的。

两个矢量的大小相等，方向相同时，称它们为相等的。由此可见，自由矢量在空间平移至各个位置时的矢量都是相等的，平移并不改变矢量的性质。

与矢量 $\boldsymbol{v}$ 的模相等而方向相反的矢量称为 $\boldsymbol{v}$ 的逆矢量，用 $-\boldsymbol{v}$ 表示。

2) 矢量的加减法

矢量的相加可以用三角形法则，设有 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 两个矢量，把矢量的 $\boldsymbol{b}$ 始点移至矢

量$\boldsymbol{a}$的终点,则由$\boldsymbol{a}$的始点至$\boldsymbol{b}$矢量的终点的矢量称为矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和,记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图1-2所示。

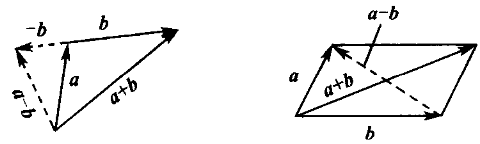


图1-2 矢量的三角形与平行四边形法则

矢量的相加也可以用平行四边形法则,即把$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$两矢量的起点移到一起,则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$就是以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边组成的平行四边形的对角线,起点和$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$相同,如图1-2所示。

矢量的加法满足交换律及结合律,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{1-1}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{1-2}$$

$\boldsymbol{a}$矢量与$\boldsymbol{b}$的逆矢量$-\boldsymbol{b}$之和称为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$两矢量之差,记为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \tag{1-3}$$

3) 矢量与数量的乘积

矢量与数量的乘积记为$\lambda\boldsymbol{a}$,它是一个矢量,该矢量的模为$|\lambda||a|$,其方向为:当$\lambda>0$时,与$\boldsymbol{a}$同向;当$\lambda<0$时,与$\boldsymbol{a}$相反。矢量与数量的乘积满足交换律及分配律。设λ与u为两个数量,则

$$\lambda(u\boldsymbol{a})=(\lambda u)\boldsymbol{a} \tag{1-4}$$

$$(\lambda+u)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{a} \tag{1-5}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \tag{1-6}$$

若α°是方向与$\boldsymbol{a}$相同的单位矢量,则根据上述的乘法有

$$\boldsymbol{a}=|a|\alpha^{\circ} \tag{1-7}$$

或写为

$$\alpha^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|a|} \tag{1-8}$$

4) 矢量在直角坐标系中的分量

在直角坐标系$(O-x,y,z)$中,设矢量$\boldsymbol{OM}$的起点O是直角坐标系的原点,而终点M的坐标为$M(x,y,z)$,如图1-3所示,则由矢量加法的一般原则有

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OM}_1+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{N}+\boldsymbol{NM}$$

因为

$$M_1N = OM_2, NM = OM_3$$

所以

$$OM = OM_1 + OM_2 + OM_3$$

矢量 OM_1、OM_2、OM_3 称为矢量 OM 在坐标轴上的分矢量。

M 的点矢量 OM 也称为 M 的径矢。

取坐标轴 Ox、Oy、Oz 上以 O 点为起点的三个单位矢量如图 1-3 所示，并分别以 i、j、k 表示之。这三个单位矢量称为基本单位矢量，则由式(1-7)有

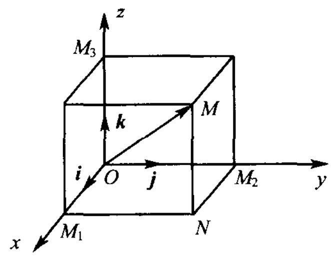


图 1-3　矢量的坐标

$$OM_1 = xi, OM_2 = yj, OM_3 = zk$$

故有

$$OM = xi + yj + zk \tag{1-9}$$

式(1-9)中的 x、y、z 是矢量 OM 在坐标轴上的投影。同时，在矢量的起点为原点 O 的情况下也是矢量的终点 M 的坐标。

如果矢量 A 在 x、y、z 轴上的投影顺次为 X、Y、Z，则它在 x、y、z 轴上的分矢量就依次为 Xi、Yj、Zk，则有

$$A = Xi + Yj + Zk \tag{1-10}$$

如上所述，利用矢量在坐标轴上的投影将矢量 A 表示为三个分矢量之和，如上面等式所示的方法，称为矢量在三个坐标轴上的分解。通常把矢量 A 在三个坐标轴上的分量(或投影) X、Y、Z 称为矢量 A 的坐标，简记为

$$A = \{X, Y, Z\} \tag{1-11}$$

5) 矢量的标积

两矢量的标积又称为两矢量的数量积，它是两矢量模的乘积和它们间的夹角余弦的乘积，标积的结果为一数量。如矢量 A 和 B 的夹角为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，则其标积记为

$$A \cdot B = |A||B|\cos\varphi \tag{1-12}$$

矢量的标积具有交换律、分配律以及与数的乘积的结合律的性质，即

$$A \cdot B = B \cdot A \tag{1-13}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{1-14}$$

$$\lambda(A \cdot B) = \lambda A \cdot B = A \cdot \lambda B \tag{1-15}$$

式中 λ 为一数量。

当矢量 A 与 B 垂直时，$\varphi=\pi/2$，由式(1-12)知

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-16}$$

因此，当两矢量之一为零矢量或两矢量相互垂直时，它们的数量积等于零。反之，若 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$，则只要两矢量中没有零矢量，就必有 $\cos\varphi = 0$，即 $\varphi = \pi/2$。所以，两矢量垂直的必要且充分条件是它们的数量积等于零。

两矢量的数量积的坐标表示法：

设有两个矢量为

$$\boldsymbol{A} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \boldsymbol{B} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$$

即

$$\boldsymbol{A} = X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k}$$

由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是相互垂直的基本单位矢量，由式(1-12)知，故有

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0, \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$$
$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1, \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$$

不难证明

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 \tag{1-17}$$

故用坐标表示的两矢量 $\boldsymbol{A} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$、$\boldsymbol{B} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ 垂直的必要且充分条件是

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0 \tag{1-18}$$

当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 时，有

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$$

又由式(1-12)有

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = |A|^2\cos 0 = |A|^2$$

故有

$$|A| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \tag{1-19}$$

6) 矢量的矢积

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的矢积为一新的矢量 $\boldsymbol{C}$。矢量 $\boldsymbol{C}$ 的模在数值上等于以两矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为两边的平行四边形的面积，即矢量 $\boldsymbol{C}$ 的模 $|\boldsymbol{C}|$ 为 $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$；其方向为垂直于矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 构成的平面；矢量 $\boldsymbol{C}$ 的正向按照“右手法则”来确定，即附着于共同起点的三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$，把右手的拇指指向 $\boldsymbol{A}$ 的方向，食指指向 $\boldsymbol{B}$ 的方向，则中指所指的方向即为矢量 $\boldsymbol{C}$ 的方向，如图 1-4 所示。

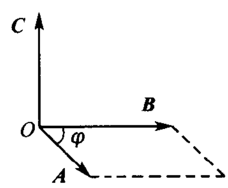


图 1-4　矢量的矢积

两矢量的矢积记为 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

矢量 $\boldsymbol{C}$ 的模$|\boldsymbol{C}|$按式(1-20)计算

$$|C| = |A||B|\sin\varphi \tag{1-20}$$

式中 φ 为矢量,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的正向夹角($0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)。

根据作矢积后得到的新矢量的方向规定(右手法则),有

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \tag{1-21}$$

从式(1-21)可以看出,矢量的矢积不具有交换律的性质,但矢积具有分配律及结合律的性质,即

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} \tag{1-22}$$

$$\lambda(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\lambda\boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times (\lambda\boldsymbol{B}) \tag{1-23}$$

如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量$\boldsymbol{B}$ 平行,则它们的夹角 $\varphi=0$,故有

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-24}$$

反之,如果 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$,则只要 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中没有零矢量,就必定有 $\sin\varphi=0$,$\varphi=0$,故两矢量平行的必要且充分条件是它们的矢积等于零。

利用矢量的坐标表达式,可以用两矢量的分量来表示它们的矢积,设矢量

$$\boldsymbol{A} = \{X_1, Y_1, Z_1\}、\boldsymbol{B} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$$

则

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k}) = (X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k})$$

由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是相互垂直的基本单位矢量,由上面矢积的定义有

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$$

则

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\boldsymbol{i} + (Z_1X_2 - Z_2X_1)\boldsymbol{j} + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\boldsymbol{k} \tag{1-25}$$

写成行列式的形式即为

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \tag{1-26}$$

两矢量平行的充要条件 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$,由式(1-25)得到用坐标表示的两矢量平行的充要条件为

$$Y_1Z_2 - Y_2Z_1 = 0, Z_1X_2 - Z_2X_1 = 0, X_1Y_2 - X_2Y_1 = 0 \tag{1-27}$$

或

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2} \tag{1-28}$$

7) 矢量的混合积

设已知三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$,如果先作二矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的数量积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$,因为它是数量,故再与第三矢量 $\boldsymbol{C}$ 相乘的结果 $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ 表示的是一个与矢量 $\boldsymbol{C}$ 平行的矢量。

如果先作二矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$,这个所得到的矢量与第三矢量 $\boldsymbol{C}$ 再作数量积 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$ 或矢量积 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$,前者表示数量,叫做三矢量的混合积或三重数积,记为 $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$。后者表示矢量,叫做三重矢积。

设 $\boldsymbol{A}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$、$\boldsymbol{B}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$、$\boldsymbol{C}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$

由式(1-17)和式(1-26)知

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}X_3+\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}Y_3+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}Z_3$$

或

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix} \tag{1-29}$$

由行列式的性质可以证明

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C}=-(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B} \tag{1-30}$$

或简单记为

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})=-(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C})=-(\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A})=-(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B})$$

事实上,矢量的混合积 $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$ 表达的是这样一个数,它的绝对值表示以矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为棱的平行六面体的体积,如果矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成右手系,那么其混合积的符号是正的,反之为负。当三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共面时,它们构成的平行六面体的体积为零,即

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=0 \tag{1-31}$$

反之,如果 $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})=0$,只要其中没有零矢量,则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 一定共面,所以混合积等于零是三个矢量共面的充要条件。

1.1.2 矩阵运算的初步知识

1) 矩阵的概念

由数字或字符按一定次序排列成一个矩形的数阵称为矩阵,例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

就是一个矩阵。矩阵可以用大写符号如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$…来表示，写成

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

矩阵中横的数列叫行，竖的数列叫列。若矩阵的行数为 m，列数为 n，则可称之为 $m \times n$ 矩阵，如上面的 $\boldsymbol{A}$ 就是一个 4×4 矩阵。矩阵中的每一个数叫做元素，a_{11}在第一行第一列上，称为一行一列元素，a_{ij}表示第 i 行第 j 列元素。

行数与列数相同的矩阵叫做方阵，如上面的 $\boldsymbol{A}$ 又是一个四阶方阵。方阵中从左上到右下的对角线称为主对角线。

只有一行的矩阵称为行矩阵或行向量，如

$$\boldsymbol{A} = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14})$$

只有一列的矩阵称为列矩阵或列向量，如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{bmatrix}$$

2) 矩阵的运算

(1) 矩阵相等

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同，列数也相同，且其中的各个对应元素都相等，则两矩阵相等，记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。例如，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为两个二阶方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，则必有

$$a_{11} = b_{11} \qquad a_{12} = b_{12}$$
$$a_{21} = b_{21} \qquad a_{22} = b_{22}$$

(2) 矩阵的和或差

两矩阵的和或差，为其对应元素之和或差。如