UMSS

大学数学科学丛书—7

抽象空间引论

胡适耕　张显文　编著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书　7

抽象空间引论

胡适耕　张显文　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以统一与基本的观点，概述应用上最重要的抽象空间，阐明其结构、内在联系及主要实例. 内容涵盖一般数学结构、拓扑空间、一致空间、度量空间、拓扑向量空间、Banach 空间，以及与空间结构相适应的一系列方法.

本书的读者对象为数学专业的高年级本科生，理工科的硕士生、博士生、教师以及自然科学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

抽象空间引论/胡适耕，张显文编著. —北京：科学出版社，2005
(大学数学科学丛书：7)
ISBN 7-03-014876-2

Ⅰ. 抽… Ⅱ. ①胡…②张… Ⅲ. 抽象空间-概论 Ⅳ. O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 009913 号

责任编辑：吕 虹 张 扬 祖翠娥/责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005 年 7 月第一次印刷 印张：15 3/4
印数：1—3 000 字数：289 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学.从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵.正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的.作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱.数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视.数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法.在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材、教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

本书作者曾不只一次，在一些气氛颇热烈的讲座上(以科普的名义或者根本无关科普)，聆听人们大谈高维空间，甚至拓扑空间. 在这种场合，你真会感到，人们对于未知空间领域的好奇是如此强烈，其热情似乎不逊于地理大发现时期的探险家！人们仿佛已经厌倦这个平淡无奇的 4 维宇宙，渴望到那些玄妙莫测的虚幻世界中去作一番漫游. 本来完全出于科学思考的抽象空间理论，在一些人那里被不经意地演绎成了真正的天外奇谈！严肃的数学工作者，对此恐怕无法苟同. 然而，在这个高度现实的世界上，看到抽象空间理论的影响竟如此之广，不能不深感庆幸与欣慰.

在当代世界，真正以研究抽象空间为主要目的的学者未必很多. 但受益于抽象空间理论者，则几乎遍及所有的数学家，其中包括那些更关注具体问题(如生物学或经济学问题)的应用数学家. 在当代数学界，如果不能顺利阅读大量使用抽象空间语言写成的著作，如果不能熟练摆弄几种抽象空间，要与同行进行有效的交流，大概是困难的. 抽象空间的思想与理论构造模式对于数学的统治，在一定程度上乃是现代数学的基本特征之一. 抽象空间何以有如此强大的威力，当然非此处所能深论. 但指出在数学界已成为共识的如下几点事实，对于本书的读者将不无益处.

人类的思维经验表明，将具体问题抽象化，可以带来可观的效果. 一个具体问题一旦被纳入抽象空间的框架之内，原本很复杂的对象(如序列、轨道、变换等)，现在不过是空间中的一点而已. 无论这个点内部本来具有多大的丰富性与复杂性，都一概被抹去，而且在进一步的研究中不再起任何作用，这就使问题大大简化了. 对于问题的最终解决，那些被抹去的东西本来就是不起作用的，倒是它们的存在掩盖了问题的本质，一旦舍弃这些细节，本质的东西就会凸显出来.

其次，通过与平常空间的类比，抽象空间能获得比其原型更简单的直观形象，因而使得在抽象空间中进行的论证更好理解. 以为一个数学问题的原型是具体的、直观的，而转化成抽象空间中的问题后就变得笼统、抽象以致难以理解了，这实在是一种极大的误解. 用 n 次多项式逼近连续函数，这是一个具体但并不单纯的问题，经适当抽象之后，它变成了求某个赋范空间中的点到给定 n 维平面的最近距离点的问题，这就更容易理解了. 经抽象化处理的问题往往更直观，不明白这一点，就难以领会抽象空间理论的奥妙.

再者，正是抽象空间理论以高度概括的形式统一了外观上极不相同的对象，从而沟通了一些初看起来互不相关的领域，这就为获得新知识开辟了更多的渠道.

这不足为怪，对于大多数数学家及一部分其他领域的专家来说，抽象空间是一种不可或缺的工具. 然而，当你真正准备涉足抽象空间时，你会发现所面对的是一个惊人的庞大的理论体系. 一个服务于多个人类知识领域的抽象理论，必然有其丰富的内涵是很自然的. 另一方面，作为一种典型公理化建筑的抽象空间理论，几乎每天都在不受限制地开疆拓土. 只要不导致逻辑矛盾，人们总乐意通过引进新公理来扩大现有的概念世界，这就使得新的空间总是层出不穷. 那些有着坚实背景的抽象空间，固然会保持其长久生命力；而那些纯属人们过度自由的想像力之产物的空间，在科学理论发展的长河中，不过是稍纵即逝的流星. 问题在于，在数学家将种类繁多的抽象空间理出一个头绪来之前，人们由最初的好奇所激发的热情，或许早已在不得要领而毫无所获的随心游荡中消耗殆尽. 对于抽象空间的持久兴趣，最终只能缘于需要，而不仅仅因于猎奇. 而人们的需要主要集中于抽象空间理论中已经多少成熟，且被证明拥有广泛应用的部分. 将这一部分以某种概括而又相对简易的形式介绍给读者，正是本书意图之所在.

基于以上意图，本书选择了拓扑空间、度量空间、拓扑向量空间与赋范空间作为主要讨论对象，它们在现代抽象空间理论中所具有的基本意义，似乎是最不容置疑的.

除了在取材方面的考虑之外，本书也格外着意于揭示抽象空间理论构造所循的某些一般模式. 不同种类的空间固然因其公理选择的不同而结构各异，但这些空间理论的展开仍然呈现出高度的类似性，以致人们从异彩纷呈的抽象空间谱系中能看到某种和谐统一的图景. 这种体验，无论对于持欣赏眼光的数学家，还是对于更多地持实用眼光的应用工作者，都是十分有益的.

本书作者可以说是抽象空间理论的欣赏者与使用者，不过在写作本书时，更多地是从使用者的角度来考虑的，这或许更能与多数读者产生一定程度的共鸣. 例如，大多数定义与定理都表述得比较概括与集中，便于查询；再如，与一般的教科书不同，本书将空间的例子集中在几节中统一处理，这对于使用抽象空间的读者进行查考似乎更方便些. 如果这样做，会使将本书作为入门读物的读者有所不便，那么，作者只能以“天下事势难两全”为憾.

作　者

2003 年 8 月于武汉

符号与说明

一、符 号 表

A^c	集 A 的补
A°	集 A 的内部
A^0	A 的极集
$A^\perp$	A 的正交补或零化子
$\overline{A}$	集 A 的闭包
$\overline{A}_w$	弱闭包
$\overline{A}_{w^*}$	弱*闭包
abco A	集 A 的绝对凸包
B_X	X 中的闭单位球，B_{X^*} 也写作 B^*
$B_r(a)$	以 a 为心以 r 为半径的开球
$\overline{B}_r(a)$	以 a 为心以 r 为半径的闭球
$\beta(X,Y)$	X 上由 Y 决定的强拓扑
$\mathbf{C}$	复数域
$C(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续映射之全体. $C(X)=C(X,\mathbf{K})$
$C^r(\Omega)$	Ω 上的 C^r 函数之全体
$C_0^r(\Omega)$	Ω 上有紧支集的 C^r 函数之全体
co A	集 A 的凸包；$\overline{\text{co}}A=\overline{\text{co}\,A}$
χ_A	集 A 的特征函数
$D(F)$	F 的定义域
$d(x,y)$, $d(x,B)$, $d(A,B)$	距离
diam A	集 A 的直径
dim X	空间 X 的维数
∂A	集 A 的边界
Δ 或 Δ_X	$X\times X$ 中的对角线
I	单位算子
1_X	X 上的单位算子
i	$A\subset X$：包含映射
J	通常记区间$[0,1]$
$\mathbf{K}$	等于 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$
K^+	K 的对偶锥

Ker F	同态 F 的核
L^p	p 次可积函数空间
L^∞	本性有界函数空间
l^p	等于 $L^p(\mathbf{N},\mu)$，μ 是计数测度
$l^p(\Omega)$	等于 $L^p(\Omega,\mu)$，μ 是计数测度
LCH	等于局部紧 Hausdorff 空间
LCS	等于局部凸空间
$L(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续线性算子之全体，$L(X)=L(X,X)$
$M(\Omega)$	Ω 上的正则测度空间
μ	通常记测度
μ_A	集 A 的 Minkowski 泛函
$\mathbf{N}$	自然数集
$N(T)$	算子 T 的零空间
$\mathcal{N}_x$：	点 x 的邻域系
$p(\cdot)$	通常记半范
P,P_i	通常记投影
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数域，$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$，$\mathbf{R}_+^n=(\mathbf{R}_+)^n$
$R(F)$	F 的值域
S_X	X 中的单位球面，S_{X^*} 也写作 S^*
span A	集 A 的线性包，$\overline{\text{span}}\,A=\overline{\text{span}\,A}$
supp f	函数 f 的支集
$\sigma(X,Y)$	X 上由 Y 决定的弱拓扑
T	通常表线性算子
T^*	T 的对偶算子或相伴算子
TVS	等于拓扑向量空间
τ 或 τ_X	X 上的某个拓扑
$\mathcal{U}$	通常表一致结构或某个集族
X,Y,Z	通常记抽象空间
X^*	空间 X 的拓扑对偶
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Z}_+$	非负整数集，$\mathbf{Z}_+^n=(\mathbf{Z}_+)^n$
$\triangleq$	定义为
$\square$	定理或命题证毕
$\subset\subset$	强包含

二、几 点 说 明

1. 引证　§1.1(1)表§1.1中式(1)，§1.1A 表§1.1中 A 段，1.1.1(i)

表定理(或命题、定义)1.1.1之(i),[1.p.1]表参考文献[1]中第1页,余类推.

2. 指标用法 出现于 $\sum$, $\prod$, $\bigcup$, $\bigcap$ 下的指标通常省略. 和式 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 依情况可写成:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n, \quad \sum\nolimits_1^{\infty} a_n \text{ 或} \sum_n a_n.$$

$\prod A_n$, $\bigcup A_n$ 等仿此. 给定 $x \in \mathbf{R}^n$ 或 $x \in \mathbf{R}^{\omega}$, 自动认定 $x=(x_i)$, 对 $x \in \prod X_i$ 仿此.

3. 集记号 集 $\{x \in X: x \text{满足} P\}$ 常缩写作 $X(P)$ 或 $\{P\}$, 如 $\{f>0\}=\{x: f(x)>0\}$. $A+B=\{a+b: a\in A, b\in B\}$, $A+x$, AB 仿此. $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \beta, \tau$ 等记集族. $\mathscr{A}^{\sharp}=\bigcup \mathscr{A}=\bigcup\{A: A\in\mathscr{A}\}$, $\mathscr{A}^*$ 记 $\mathscr{A}$ 中集的有限交之全体, $F\mathscr{A}=\{FA: A\in\mathscr{A}\}$; $\mathscr{A}'=\{A^c: A\in\mathscr{A}\}$. $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B} \Leftrightarrow \forall B\in\mathscr{B}, \exists A\in\mathscr{A}: A\subset B$; $\mathscr{A}<\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall A\in\mathscr{A}, \exists B\in\mathscr{B}: A\subset B$.

4. 映射记号 $F: D\subset X\to Y$ 表 $F: D\to Y$ 并指明 D 看作 X 的子空间, $\varphi(\cdot, y)$ 表映射 $x\to\varphi(x,y)$, $\prod f_i$ 记 f_i 的积映射, (f_i) 记 f_i 的对角线映射.

5. 范数记号 $|\cdot|$ 记 $\mathbf{K}^n$ 中的 Euclid 范数, $\|\cdot\|_X$ 记 X 中的范数, $\|\cdot\|_0$ 记 sup 范数, $\|\cdot\|_p$ 记 L^p 范数,不必区别时,赋范空间 $X, Y, L(X,Y), X^*$ 等中的范数都记作 $\|\cdot\|$, $\{\|\cdot\|_i\}$ 或 $\{\|\cdot\|_{\alpha}\}$ 通常记半范族.

6. 零记号 数零、零向量、零算子与零泛函均记作0.

7. 极限记号 $\lim\limits_n x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n} x_{mn}$ 分别表 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$, $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=\lim\limits_{0<t\to 0}\varphi(t)$, $\rightrightarrows$ 记一致收敛, $\rightharpoonup$ 记弱收敛, $\xrightarrow{*}$ 记弱* 收敛, $\xrightarrow{\mu}$ 记依测度 μ 收敛, $\xrightarrow{L^p}$ 记 L^p 收敛.

8. 不等式用法 $A\leqslant B\Leftrightarrow\forall a\in A, b\in B: a\leqslant b$; $A<b$, $A\leqslant b$, $f(A)\leqslant f(B)$ 等仿此; $f\leqslant g\Leftrightarrow\forall x\in D(f)=D(g): f(x)\leqslant g(x)$; $f<g$ 仿此.

9. const 的用法 当 const 出现在式子中时,它表示某个常数,其具体数值难以或不必明确写出.

10. 其他约定 $a\vee b=\max\{a,b\}$, $a\wedge b=\min\{a,b\}$; $\sup\varnothing=-\infty$, $\inf\varnothing=\infty$; 当 $\varnothing=\mathscr{A}\subset 2^X$ 时 $\bigcup\mathscr{A}=\varnothing$, $\bigcap\mathscr{A}=X$.

第 1 章　绪　　论

在现代科学中，抽象空间已被普遍地运用，大概不再有人怀疑其价值了。不过，何谓抽象空间，并无严格界定。通常将那些或多或少类似于平常空间的抽象数学结构称为抽象空间，从高度抽象的拓扑空间，到很接近于现实空间的高维 Euclid 空间。本书给出那些被公认为最有价值的抽象空间的一个导引性介绍。从追求简洁与逻辑关系的清晰考虑，我们应从最一般的拓扑空间开始，依次进入一致空间、度量空间、拓扑向量空间等，直至最特殊的函数空间。但这样一来，我们就会失去将抽象概念与具体模型交织起来的许多机会。弥补这一缺憾的方法看来是：一开始就同时给出将要论及的所有空间的一个初步描述，然后再逐一深入讨论。这样，在考虑较基本的空间（如拓扑空间）时，就能从很宽广的背景中寻求充分具体的例证。这就是这个绪论所要起的作用。或许你会耽心：一开始就面对一大堆抽象概念，可能会因不得要领而失去信心。实际上，你只需对本章稍作浏览就不妨转入其后各章，只是到有需要的时候，才回到本章仔细阅读相关的细节。

§1.1　集与映射

像抽象空间这样高度一般化的论题，必然完全在集论的形式语言下处理。因此，集论的基本用语、记号与表达方式，在本书中是不可缺少的，这些在本节中以最简略的形式加以介绍。

A. 集与集族

给定集 X。表示一集 $A \subset X$ 的标准方式是

$$A = \{x \in X : x \text{ 满足 } P\}, \tag{1}$$

其中 P 是某个与 X 中的元有关的命题或条件。通常将(1)简写成 $A = X(P)$ 或 $A = \{P \text{ 成立}\}$。例如，若 $f: X \to \mathbf{R}$，A 是 f 在 X 上的零点之全体，则 A 可表为 $X(f = 0)$，或更简单地就写作 $\{f = 0\}$。

集运算的记号是标准的，假定已为读者所熟知。差集写作 $A \backslash B$，而将记号 $A - B$ 保留给代数系统使用。总以 A^c 表示补集 $X \backslash A (A \subset X)$，只要所用 X 是明确的。以 χ_A 记集 A 的特征函数，即 $\chi_A(x) = 1 (x \in A)$ 而 $\chi_A(y) = 0 (y \in A^c)$。

以 2^X 记 X 的子集之全体，称之为 X 的**幂集**. 2^X 的子集称为集族，通常记以字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\beta,\tau$ 等. 本书中将大量运用集族，一些与之有关的记号与用语，综述于下. 任给 $\mathscr{A}\subset 2^X$，约定

$$\bigcup \mathscr{A}=\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\},$$
$$\bigcap \mathscr{A}=\bigcap\{A:A\in\mathscr{A}\}.$$

$\bigcup\mathscr{A}$ 也记作 $\mathscr{A}^{\#}$. 若 $\mathscr{A}=\varnothing$（$\varnothing$ 表空集），则约定 $\mathscr{A}^{\#}=\varnothing$ 而 $\bigcap\mathscr{A}=X$. 令

$$\mathscr{A}^*=\{\bigcap\mathscr{B}:\mathscr{B}\text{ 是 }\mathscr{A}\text{ 的有限子族}\},\tag{2}$$
$$\mathscr{A}'=\{A^c:A\in\mathscr{A}\}.\tag{3}$$

若 $\varnothing\overline{\in}\mathscr{A}^*$，则称 $\mathscr{A}$ 为**有限相交族**. 若 $\mathscr{A},\mathscr{B}\subset 2^X$，则约定

$$\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall B\in\mathscr{B},\exists A\in\mathscr{A}:A\subset B;\tag{4}$$
$$\mathscr{A}\prec\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall A\in\mathscr{A},\exists B\in\mathscr{B}:A\subset B.\tag{5}$$

$\mathscr{A}\vdash B$ 意味着 $\mathscr{A}\vdash\{B\}$. 显然

$$\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}\Leftrightarrow\mathscr{B}'\prec\mathscr{A}'.$$

运用以上记号，可将一些概念表述得很简单. 下面就是一例.

1.1.1 定义　若非空集族 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 满足条件：

(i) $\varnothing\overline{\in}\mathscr{A}$;

(ii) $A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{A}$;

(iii) $\mathscr{A}\vdash A\subset X\Rightarrow A\in\mathscr{A}$,

则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的一个**滤子**. 若 $\mathscr{A}$ 是一个滤子，$\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}$（或 $\mathscr{B}^*\vdash\mathscr{A}$），则称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的一个**滤基**（或**子滤基**）.

显然，定义 1.1.1 中的条件(ii)可缩写成 $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$（用(2)）.

1.1.2 命题　若非空族 $\mathscr{B}\subset 2^X$ 满足条件：

(i) $\varnothing\overline{\in}\mathscr{B}$;

(ii) $\forall A,B\in\mathscr{B}$，有 $\mathscr{B}\vdash A\cap B$（$\Leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{B}^*$），

则 $\mathscr{B}$ 是某个滤子 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 的滤基. 若仅假定 $\mathscr{B}$ 是有限相交族，则 $\mathscr{B}$ 是某个滤子 $\mathscr{A}$ 的子滤基，且 $\mathscr{A}$ 是 X 上包含 $\mathscr{B}$ 的最小滤子，称为由 $\mathscr{B}$ 生成的滤子.

证　在条件(i)，(ii)下，易验证 $\mathscr{A}\triangleq\{A\subset X:\mathscr{B}\vdash A\}$ 是以 $\mathscr{B}$ 为滤基的滤子. 若 $\mathscr{B}$ 是有限相交族，则 $\mathscr{B}^*$ 必满足条件(i)，(ii)，因而是某个滤子的滤基. □

若 I 是一非空集，每个 $i\in I$ 对应一个集 $A_i\subset X$，则亦称 $\{A_i:i\in I\}$ 为 X 上的一个集族，通常简写作 $\{A_i\}$. 这种集族与作为 2^X 子集的集族在概念上并不一致，但今后并不严格区别. 用得较多的是 $\{A_i:i\in\mathbf{N}\}$ 这种特殊情况，此时称 $\{A_i\}$ 为**集列**. 若 $A_i\subset A_{i+1}$（或 $A_i\supset A_{i+1}$），$i=1,2,\cdots$，则称 $\{A_i\}$ 为**升列**（或**降列**）.

任给集 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，称

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in X_i (1 \leqslant i \leqslant n)\} \tag{6}$$

为集 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的**积集**,亦记作 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$; 当 $X_i = X(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时约定 $\prod X_i = X^n$, 称它为 X 的 ***n* 重积**.

B. 关系与映射

任给非空集 X 与 Y, 不妨将二者看作抽象变量 x 与 y 的变域. 这就自然提出一个问题:如何一般地界定 x 与 y 相关? 如果不加任何特殊限制,关系概念的形式定义就如下面所述这样简单.

1.1.3 定义 设 X 与 Y 是两个非空集. 任何子集 $F \subset X \times Y$ 称为一个从 X 到 Y 的**关系**;当 $(x,y) \in F$ 时说 x 与 y 为 F 相关,记作 xFy 或 $y \in Fx$. 若 $F \subset X \times X$, 就说 F 是 X 上的一个**二元关系**.

任给 $F \subset X \times Y, A \subset X$, 约定

$$F(A) = \{y \in Y: \exists x \in A, 使 (x,y) \in F\}; \tag{7}$$

令 $Fx = F(\{x\})$. 显然 $F(A) = \bigcup_{x \in A} Fx$. 若 $G \subset Y \times Z$, 则令

$$G \circ F = \{(x,z): \exists y \in Y, 使 z \in Gy, y \in Fx\}; \tag{8}$$

$$F^{-1} = \{(y,x): (x,y) \in F\}, \tag{9}$$

称 $G \circ F$ 为 G 与 F 的**复合关系**,称 F^{-1} 为 F 的**逆关系**. 令 $D(F) = F^{-1}(Y)$, $R(F) = F(X)$, 二者分别称为 F 的**定义域与值域**. 显然 $D(F) = R(F^{-1})$. 若 $F \subset X \times X, F = F^{-1}$, 则说 F 是**对称的**;若 $F \circ F \subset F$, 则说 F 是**传递的**;若

$$\Delta \triangleq \{(x,x): x \in X\} \subset F,$$

则说 F 是**自反的**;上述的 Δ 称为 $X \times X$ 的**对角线**,亦记作 Δ_X. 若 F 是对称的、传递的与自反的,则称 F 为一个**等价关系**.

给定 $F \subset X \times Y$, 每个 $x \in X$ 确定地对应一个集 $Fx \subset Y$. 因此, F 可理解为如下的对应规则:

$$F: X \to 2^Y, \qquad x \to Fx. \tag{10}$$

若将每个 $y \in Fx$ 理解为 F 在 x 取的值,则可以说对应(10)确定一个多值函数(或集值函数). 应用上最重要的是以下特殊情况: $\forall x \in X, Fx$ 恰含一个元素,就写作 Fx, 则对应(10)可写成

$$F: X \to Y, \qquad x \to Fx, \tag{10$'$}$$

此时称 F 为从 X 到 Y 的一个**映射**. 映射也称为函数、算子、变换等,这些都看作同义语,实质上并无区别. 今后总是以 $F: X \to Y$ 表示 F 是从 X 到 Y 的映射这一事实. 若 $F: X \to Y, R(F) = Y$, 则称 F 为**满射**;若 F^{-1} 是映射,则称 F 为**单射**;若 F 同时为单射与满射,则称 F 为**双射**. $F: X \to Y$ 是双射的充要条件是:存在映射 $G: Y \to X$, 使得

$$G \circ F = 1_X, \qquad F \circ G = 1_Y,$$

其中 $1_X = \Delta_X$ 称为 X 上的**单位映射**或**单位算子**,亦记作 I.

设 $F \subset X \times Y, G \subset Y \times Z, A, A_i \subset X (i \in I)$. 以下公式是常用的:

$$(F^{-1})^{-1} = F, \qquad (G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}, \tag{11}$$

$$F\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i F(A_i), \tag{12}$$

$$F\left(\bigcap_i A_i\right) \subset \bigcap_i F(A_i), \tag{13}$$

$$(G \circ F)(A) = G(F(A)). \tag{14}$$

若 F^{-1} 是映射,则(13)为等式;若 F^{-1} 是映射且 $R(F) = Y$, 则

$$F(A^c) = (F(A))^c. \tag{15}$$

若 $F \subset G \subset X \times Y$, 则称 G 为 F 的**扩张**,称 F 为 G 的**限制**. 以上所述自然都可用于 F, G 是映射的情况. 不过对映射 $F: X \to Y$ 有以下特殊结论: FF^{-1} 恒为映射,且 $FF^{-1} \subset 1_Y$, $F^{-1}F$ 恒为等价关系. 因此,对 $A \subset X, B \subset Y$ 有

$$FF^{-1}(B) \subset B, \qquad A \subset F^{-1}F(A). \tag{16}$$

当 F 为满射时(16)的第一个包含为等式.

对于映射 $F: X \to Y, A \subset X$, 今后将用较简便的记号 $FA = F(A)$, 并用 $F \mid A$ 表示 F 在 A 上的**限制**,即 $F \mid A: A \to Y, x \to Fx$. 以 $i: A \subset X$ 记**包含映射**,即 $i = I \mid A$.

C. 序结构

1.1.4 定义　设 X 是一非空集,$\leqslant$是 X 上的一个二元关系,给定以下条件:

(A_1) 反对称性: $x \leqslant y \leqslant x \Rightarrow x = y (x, y \in X)$;

(A_2) 完全性: $\forall x, y \in X, x \leqslant y$ 与 $y \leqslant x$ 必居其一;

(A_3) 良序性:若 $\varnothing \neq A \subset X$, 则 $\exists a \in A, \forall x \in A: a \leqslant x$.

若$\leqslant$是自反的与传递的,则称$\leqslant$为**拟序**;满足条件(A_1)的拟序称为**半序**或**偏序**;满足条件(A_2)的半序称为**全序**;满足条件(A_3)的全序称为**良序**. 当$\leqslant$是拟序时称 X 或 $(X, \leqslant)$ 为拟序集;类似地,半序集、全序集与良序集的意义是自明的.

记号$\leqslant$本身已经显示出关系 $x \leqslant y$ 指示出 x 与 y 之间的某种顺序;这种顺序关系未必就是通常的大小关系,但与大小关系确有明显类似之处,因而促使人们将基于大小关系的一些概念移植到序结构中来.

1.1.5 定义　设 $(X, \leqslant)$ 是一半序集, $A \subset X$. 若 $b \in X, A \leqslant b$ (这意味着 $\forall a \in A$, 有 $a \leqslant b$),则称 b 为 A 的**上界**. 若 b 是 A 的上界且 A 的任一上界 $b' \geqslant b (\Leftrightarrow b \leqslant b')$, 则称 b 为 A 的最小上界或**上确界**,它必定是唯一的,记作

sup$A$. 若b是A的上界且$b\in A$，则称b为A的**最大元**. 若$b\in A$且$b\leqslant a\in A\Rightarrow b=a$，则称$b$为$A$的**极大元**.

类似地，可定义下界、下确界（$\inf A$）、最小元与极小元.

直接从定义看出，最大元必定是极大元与上确界，在全序集中最大元与极大元等价. 除此之外，在最大元、极大元与上确界三者之间，并不存在必然联系.

关于极大元的以下结论是许多重要数学定理证明的基础，而它自身却不能被独立证明，因而只能作为一条公理使用.

1.1.6 极大原理 若半序集X的每个全序子集有上界，则X至少有一个极大元.

D. 基数与可数性

一个简单但不被人注意的事实是：一个自然数n，原不过是含n个元素的所有集组成的集类的等价物. 这一想法可加以推广.

1.1.7 定义 任给集A,B，若存在一个从A到B的双射，则说A与B有相同的**基数**，写作$|A|=|B|$，并称$|A|$为A的基数. 若存在一个从A到B的单射，则约定$|A|\leqslant|B|$；规定

$$|A|<|B|\Leftrightarrow|A|\leqslant|B|\neq|A|.$$

当A是含n个元的有限集时，自然将$|A|$理解为n，约定$|\varnothing|=0$. 对于无限集A，通常也用一个字母如α记$|A|$，且说"A含有α个元". 但这一说法并不具有比定义1.1.7所赋有的更多的含义.

一个具有重大意义的基本结论是，基数间的关系$\leqslant$(依定义1.1.7)是一个全序，它可看作自然数大小顺序的扩充. 约定$\omega=|\mathbf{N}|$，$c=|\mathbf{R}|$，熟知$\omega<c$.

若A是一个集，$|A|\leqslant\omega$，则称A为**可数集**. 显然，非空集A可数的充要条件是：A的全体元素可排列成一个有限或无限序列. 但据此来判定可数性却不易成功，因而需要一些间接的判别法. 常用的方法综合在以下定理中.

1.1.8 定理 给定集A，以下每个条件蕴涵A的可数性：

(i) 存在可数集B与单射$F:A\to B$（或满射$F:B\to A$）；

(ii) A是可数个可数集之并；

(iii) A是有限个可数集之积集；

(iv) 存在可数个可数集$I_n(n\in\mathbf{N})$，使A可表成

$$A=\{x_{i_1i_2\cdots i_n}:i_k\in I_k,1\leqslant k\leqslant n,n\in\mathbf{N}\}.$$

证 (i) 若$F:A\to B$是单射，则$|A|\leqslant|B|\leqslant\omega\Rightarrow|A|\leqslant\omega$. 若$F:B\to A$是满射，不妨设$B=\{b_1,b_2,\cdots\}$，则$A=\{Fb_1,Fb_2,\cdots\}$，顺次除去其中重复

的元，知 A 为可数集.

(ii) 不妨设 $A=\bigcup_1^\infty A_n, A_n=\{a_{nk}: k\in\mathbf{N}\}$. $A=\{a_{nk}: n,k\in\mathbf{N}\}$ 显然可写成一个序列，除去其中重复的元后知 A 为可数集.

(iii) 只需考虑 $A=B\times C$, B,C 可数. $\forall b\in B$, $C_b\triangleq\{b\}\times C$ 显然可数，因此 $A=\bigcup\{C_b: b\in B\}$ 为可数集.

(iv) A 可表成 $A=\bigcup_1^\infty A_n$，其中

$$A_n=\{x_{i_1 i_2\cdots i_n}: i_k\in I_k, 1\leqslant k\leqslant n\}.$$

对应

$$\prod_1^n I_k\to A_n,\qquad (i_1,i_2,\cdots,i_n)\to x_{i_1 i_2\cdots i_n},$$

显然是一满射，于是结合已证的(i)～(iii)知 A 为可数集. □

若 A,B 是两个良序集，存在保序双射 $F: A\to B$（保序意味着 $x\leqslant y\Leftrightarrow Fx\leqslant Fy$, $x,y\in A$），则说 A 与 B 有相同的**序数**，记作 $o(A)=o(B)$，并称 $o(A)$ 为 A 的序数. 显然 $o(A)=o(B)\Rightarrow|A|=|B|$，因此每个序数对应唯一一个基数，称为该序数的基数. 任给序数 μ，以 $\varphi(\mu)$ 记 μ 的基数. 反之，任给基数 α，必有最小的序数 μ，使 $\alpha=\varphi(\mu)$，将此 μ 记为 $\psi(\alpha)$. 若 $o(A)=\alpha$, $o(B)=\beta$，存在 $b_0\in B$，使集 $\{b\in B: b<b_0\}$ 有序数 α，则规定 $\alpha<\beta$ 或 $\beta>\alpha$，集 $\{\alpha:\alpha$ 是序数且 $\alpha<\beta\}$ 的序数为 β.

任给序数 μ，称 $\mu+1$ 为其后继序数，而称 μ 为 $\mu+1$ 的前趋序数. 若 μ 有前趋序数或 $\mu=0$，则称 μ 为孤立序数；非孤立序数称为极限序数. $\psi(\omega)$ 是最小的无限序数，因而是极限序数，仍记作 ω. 以 ω_1 记最小的不可数序数，它亦是极限序数. 若 $\alpha_i<\omega_1(i\in\mathbf{N})$，则可证明 $\sup\alpha_i<\omega_1$.

E. 数学结构

在最一般的意义上，现代数学可看作以各种数学结构为研究对象的学科. 此处不拟对数学结构作完全严格的描述，只是给出一个最粗略的勾画. 一个数学结构（或称数学系统）包含三个要素：

(i) 对象集 X（或若干对象集 X,Φ 等），它提供系统所要研究的对象或元素，当将 X 看作抽象空间时，通常将其中的元素称为点.

(ii) 一组关系（或映射）$\{R_i\}$，每个 R_i 描述了对象间的某种关联，从而在原不过是块白板的对象集上赋予了一定的结构.

(iii) 一组公理 $\{A_j\}$，它们规定了关系或映射 R_i 所应服从的规则.

由上述三要素组成的逻辑系统，原则上涵盖了现代数学可能处理的所有系统，作为一种理论构建模式，其发展空间实际上是无限的. 以上描述仅仅指明了数学结构的最一般特征，这丝毫也不限制个别的数学系统在结构上的多

样性与丰富性. 一般来说,一个系统的结构愈简单,就愈可能成为较复杂系统的基础,因而愈有普遍价值. 被公认为最具普遍价值的三种基本数学结构是:**序结构**、**代数结构**与**拓扑结构**[①],其他数学结构大多是这些基本结构的综合与细化. 序结构也许是最简单的数学结构,在第 C 段中对它所作的初步描述可以说典型地表现出数学结构的基本特征. 在 §1.2 中我们将简要地谈到代数结构;而对于抽象空间理论最重要的拓扑结构,将是本书要重点阐述的对象之一.

对于理解数学结构很重要的一点是,应注意数学结构的对象集固然是不可缺少的,但其具体形式则不是本质的,本质的东西只是决定结构类别的关系与公理. 如果两个同类数学结构在某一变换之下能实现其构成要素之间的一一对应,那么就可以认为二者并无实质区别. 因此,在现代数学结构理论中,各种含义的**同构**及同构变换下的**不变量**概念具有最重要的意义.

本书致力于考虑的抽象空间,通常是多种基本结构的复合,唯其如此,其中才可以展开适合应用需要的丰富理论. 当多种结构共存于一个底空间(即前述的对象集 X)上时,重要的问题是这些结构是否彼此相容? 相容性的含义因情况而异. 如对于拓扑代数系统而言,拓扑结构与代数结构相容意味着代数运算是连续的,这种相容性显示出两种结构并列地结合的特征. 另一方面,一个空间上的拓扑结构与度量结构相容则意味着拓扑恰由度量生成,这种意义上的相容显然带有从属关系的特征. 由一个给定的结构(如度量)衍生出抽象层次上更基本的结构(如一致结构与拓扑),是抽象空间理论的基本特征之一.

§1.2 代数系统

简单说来,所谓代数系统就是定义了若干代数运算并满足一定运算规则的数学结构. 本书考虑的几类主要抽象空间,如拓扑向量空间与 Banach 空间,都是代数系统. 因此,关于代数系统的某些基本知识是阅读本书所必需的.

A. 基本代数结构

设 X 是一非空集. 任何映射 $\beta: X \to X$ 可解释为 X 上的一个**一元运算**,而任何映射 $\varphi: X \times X \to X$ 都可称为 X 上的**二元运算**,不妨约定称 φ 为乘法(或加法),相应地将 $\varphi(x,y)$ 写作 xy (或 $x+y$). 当然,仅当这样的运算具有多少类似于平常乘法(或加法)的性质时,才有可利用的价值.

1.2.1 定义 设非空集 X 上定义了一个二元运算(姑且称作乘法),它满

① 如一些作者所指出的,测度结构的基本性亦是众所公认的.

足以下**群公理**：

(G_1) 结合律：$(xy)z = x(yz)(x,y,z \in X)$；

(G_2) 单位元：存在 $e \in X$，使得 $ex = x = xe(\forall x \in X)$，易推出这样的 e 必唯一，称它为**群单位元**；

(G_3) 可逆性：$\forall x \in X, \exists y \in X$，使得 $xy = yx = e$，可验证这样的 y 由 x 唯一决定，称为 x 的**逆元**，记作 x^{-1}，

则称 X 为一个**群**；若 X 还满足公理

(G_4) 交换律：$xy = yx(x,y \in X)$，

则称 X 为**交换群**或 Abel 群.

群 X 中的运算亦可称为加法，当然，这样一来就应将定义 1.2.1 中的 xy 改为 $x+y$，而单位元与逆元则分别改称为**零元**与**负元**，并分别改用记号 0 与 $-x$. 当需要强调群 X 中的运算称作乘法（或加法）时，称 X 为**乘法群**（或**加群**）. 说到加群时，通常总假定它是交换群. 典型的加群是 $\mathbf{R}^n$，其中的加法就是通常的向量加法.

1.2.2 定义 设 X 是一个加群，$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，对 X 定义了数乘运算 $\mathbf{K}\times X \to X, (\alpha,x) \to \alpha x$（称 αx 为 α 与 x 的乘积），使得以下条件满足：

(i) 分配律：$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$；

(ii) 结合律：$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$；

(iii) $1x = x$（以上 $\alpha,\beta \in \mathbf{K}, x,y \in X$），

则称 X 为 $\mathbf{K}$ 上的**向量空间**，称 X 中的元为向量；当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$（或 $\mathbf{C}$）时称 X 为**实**（或**复**）向量空间.

向量空间中的加法与数乘合称为**线性运算**.

1.2.3 定义 设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间，其中定义了一个乘法 $X\times X \to X$，$(x,y) \to xy$，它满足以下条件：

(i) 结合律：$(xy)z = x(yz)$；

(ii) 分配律：$x(y+z) = xy+xz, (x+y)z = xz+yz$；

(iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$（以上 $\alpha \in \mathbf{K}, x,y,z \in X$），

则称 X 为 $\mathbf{K}$ 上的**代数**；当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$（或 $\mathbf{C}$）时称 X 为**实**（或**复**）代数；当乘法满足交换律时，称 X 为**交换代数**.

设 Ω 是一非空集，X 由某些从 Ω 到 $\mathbf{K}$ 的函数组成. 任给 $\alpha,\beta \in \mathbf{K}, x,y \in X$，定义

$$\begin{cases} (\alpha x+\beta y)(t) = \alpha x(t) + \beta y(t), \\ (xy)(t) = x(t)y(t) \end{cases} \quad (t \in \Omega). \tag{1}$$

若恒有 $\alpha x + \beta y \in X$（以及 $xy \in X$），则 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间（$\mathbf{K}$ 上的交换代数）. 应用上常见的向量空间几乎都以上述函数空间的形式出现.