线性代数及其应用

XIANXINGDAISHU

JIQI YINGYONG

主编　刘剑平　施劲松　钱夕元

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

线性代数及其应用

XIANXING DAISHU JIQI YINGYONG

主编 刘剑平 施劲松 钱夕元

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/刘剑平,施劲松,钱夕元主编.
上海:华东理工大学出版社,2005.7

ISBN 7-5628-1714-6

Ⅰ.线... Ⅱ.①刘..②施...③钱.... Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 053541 号

线性代数及其应用

主　　编/刘剑平　施劲松　钱夕元
责任编辑/郑斯雄
封面设计/赵　军
责任校对/徐　群
出版发行/华东理工大学出版社
　　地　址:上海市梅陇路 130 号,200237
　　电　话:(021)64250306(营销部)
　　传　真:(021)64252707
　　网　址:press.ecust.edu.cn
印　　刷/常熟华顺印刷有限公司
开　　本/787×1092　1/16
印　　张/13.25
字　　数/305 千字
版　　次/2005 年 7 月第 1 版
印　　次/2005 年 7 月第 1 次
印　　数/1-5050 册
书　　号/ISBN 7-5628-1714-6/O·136
定　　价/20.00 元

内 容 提 要

本书是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会于 1995 年修订的“线性代数课程教学基本要求”，结合作者多年的教学经验编写而成的. 本书囊括了高等院校非数学专业的线性代数课程的全部基本内容：矩阵、行列式、矩阵的秩和线性方程组、向量空间、特征值问题与二次型等. 本书可作为高等院校工科各专业及理科非数学专业本科生、专科生、研究生的教材，也可供科技工作者和工程技术人员阅读、参考.

本书力求简明扼要，避免繁琐，突出通俗性、直观性，通过配以涉及多种领域的例题，强调其应用性，每章末还配有应用 Matlab 进行辅助计算的方法. 为了便于教学，每章后配有精选的习题，书末附习题答案.

编者的话

线性代数是高等院校非数学专业的一门主要基础课程，也是研究生入学考试的必考知识. 随着计算机的日益普及，线性代数的知识作为计算技术的基础也日益受到重视，尤其是用代数方法解决实际问题已渗透到各个领域，其重要性和实用性日益彰显.

线性代数课程作为华东理工大学首批建设的重点课程，在教材建设上已卓有成效，《线性代数及应用》曾获全国普通高等学校优秀教材一等奖、上海市教学成果二等奖. 在成绩面前，近年来我校的线性代数课程建设和改革正逐步深入，在队伍建设、教材建设、网站建设、教学方法和手段建设等方面都取得了长足的进步，2003 年被评为上海市唯一的线性代数精品课程. 为适应高等教育不断发展的形势，配合精品课程的建设，我们编写了这本《线性代数及其应用》奉献给广大读者，希望为教育改革献上微薄之力.

《线性代数及其应用》由 5 章构成，内容有矩阵、行列式、矩阵的秩和线性方程组、向量空间、特征值问题与二次型等，涵盖了高等院校非数学专业线性代数课程的全部基本内容. 本书可作为高等院校工科各专业及理科非数学专业本科生、专科生的教材，也可供科技工作者和工程技术人员阅读、参考.

工科及理科非数学专业学习本课程的目的，主要在于实际应用. 考虑到这一点，我们着重讲清基本概念、原理和计算方法，避免烦琐的理论推导和证明，力求简明、准确；在内容安排上注重系统性、逻辑性，由浅入深，循序渐进. 为了培养学生解决实际问题的能力，通过配以较多的涉及各领域的例题，开拓学生思路，侧重应用性；通过将理论推导、数值计算与计算机实现互相结合，激发学生的学习动力，培养学生的综合素质.

本书由刘剑平、施劲松、钱夕元主编. 在编写的过程中，得到了华东理工大学教材建设委员会和校教务处刘百祥老师以及华东理工大学出版社朱广忠、荣国斌、张辉、姚璎等领导的大力支持，得到了鲁习文教授、王宗尧教授、谢国瑞教授的关心与指导，在此表示衷心的感谢. 同时，我们还要感谢教学组的张建初教授、薛以锋教授以及曹宵临、方民、张新发、孙军、苏纯洁、倪中新、林爱红、解惠青等老师，他们在本书的编写过程中提供过宝贵的建议. 在此，还要感谢郑斯雄老师，他的编辑工作为本书增色不少.

限于编者水平，本书中难免存在一些缺陷和疏漏之处，恳切希望专家、读者予以指正，以便我们今后进一步改进、提高，并诚恳邀请您加盟修订.

作者的电子信箱是：liujianping60@163.com

刘剑平　施劲松　钱夕元

2005 年 3 月

目　　录

1 矩　阵

矩阵是一个重要的数学工具，也是线性代数研究的主要对象之一．本章将介绍矩阵的概念及其运算，进而讨论用途极广的矩阵初等变换和初等矩阵．

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的定义

定义 1 由 $m\times n$ 个元素排成 m 行 n 列的矩形元素表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ **维(阶)矩阵**．常用英文大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$记之．即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 中第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的(i,j)元．a_{ij} 中的 i 称作**行标**，j 称作**列标**，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记作$[a_{ij}]_{m\times n}$或 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有时也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$．

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**．本书中的矩阵，除特别说明外，都指实矩阵．

1.1.2 若干特殊矩阵

行数与列数都等于 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们称 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角元**，它们所在的对角线称为**主对角线**.

称主对角线以上全为零的方阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为**下三角矩阵**. 称主对角线以下全为零的方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为**上三角矩阵**.

既是上三角矩阵又是下三角矩阵的方阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ 称为**对角矩阵**. 对角矩阵也记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$.

称主对角元相同的对角阵 $\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$ 为**数量阵**(或**标量阵**). 特别地，当 $a=1$ 时，称 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 为**单位矩阵**，用 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 记之.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_1\ a_2 \cdots\ a_n]$ 称为**行矩阵**，又称 n **维行向量**. 为避免元素间的混淆，行矩阵也记作 $\boldsymbol{A}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 称为**列矩阵**，又称 m **维列向量**.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$.

注意：不同维的零矩阵是不相等的.

1.1.3　矩阵的应用举例

例 1　某 IT 集团公司向两个代理商发送三种电脑的数量(单位：套)如下表所示：

商品名 / 代理商	WorkPad	Tablet PC	NC
甲	a_{11}	a_{12}	a_{13}
乙	a_{21}	a_{22}	a_{23}

表格中的数据可列成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

其中 a_{ij} 为该公司向第 i 个代理商发送第 j 种电脑的数量.

这三种电脑的单价及单件重量也可以列成矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

其中 b_{i1} 为第 i 种电脑的单价,b_{i2} 为第 i 种电脑的单件重量($i=1,2,3$).

例 2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

的系数可以表示成一个 $m\times n$ 维矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为线性方程组的**系数矩阵**.

线性方程组的系数与常数项合并在一起,可以表示成一个 $m\times(n+1)$维矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为线性方程组的**增广矩阵**. 方程组中未知量及常数项,可以表示成 $n\times 1$ 维和 $m\times 1$ 维矩阵

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\text{和 }\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

1.2 矩阵的运算

在研究矩阵的运算之前，我们先给出矩阵相等的定义.

定义 1　给定两个同维 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，当

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2.1 矩阵的线性运算

数与矩阵相乘

定义 2　**数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$**，规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

即数 λ 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素所得到的矩阵. 显然有

$$0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O};\qquad 1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$$

数乘矩阵满足下列运算规律（设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，λ、μ 为数）：

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

矩阵的加法

定义 3　设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

即对应元素相加而成的同维矩阵.

矩阵加法满足下列运算规律（设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，λ 为数）：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

由加法和数乘运算，可以定义**矩阵的减法**为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

即对应元素相减而成的同维矩阵.

矩阵加法与数乘运算结合起来，统称为矩阵的线性运算.

例 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&1&2\end{bmatrix}$，试求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解

$$2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2\times1&2\times2&2\times3\\2\times4&2\times5&2\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&6\\8&10&12\end{bmatrix}$$

$$3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\times2&3\times0&3\times(-1)\\3\times3&3\times1&3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&-3\\9&3&6\end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2-6&4-0&6-(-3)\\8-9&10-3&12-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&4&9\\-1&7&6\end{bmatrix}$$

1.2.2　矩阵的乘法运算

在上一节的例 1 中，容易看出，$a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$ 即为集团公司向代理商乙所发送三种电脑的总重量，而 $a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+a_{i3}b_{31}$ 即为集团公司向第 i 个代理商($i=1,2$)所发送电脑的总价值. 于是，可以得到向两个代理商所发送电脑的总价值与总重量矩阵：

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

考察完这个例子后，我们可以给出两矩阵相乘的定义.

定义 4　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

由定义可知，一个 $1\times s$ 行矩阵与一个 $s\times1$ 列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵，也就是一个数，即

$$[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}$$

由此表明乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的(i,j)元 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积(即对应位置元素乘积的和).

必须注意，矩阵可以相乘的条件为第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数.

例 2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&0&-3\\-1&-2&3\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解　因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×1 矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，其乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 2×1矩阵，即

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\times2+0\times(-1)+(-3)\times3\\ (-1)\times2+(-2)\times(-1)+3\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 9\end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，所以 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义.

例 3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解　由乘法定义可知

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

例 4　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解　由乘法定义可知

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

由例 2 可知，$\boldsymbol{AB}$ 有意义而 $\boldsymbol{BA}$ 没意义；由例 3 可知，$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 都有意义而不同阶；由例 4 可知，$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 都有意义且同阶，但不相等. 总之，矩阵乘法不满足交换律，即在一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 所以我们称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$，而称 $\boldsymbol{BA}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可交换**.

例 4 还表明，矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但却有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，即说明矩阵乘法不满足消去律，即在一般情况下，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结论；同理，若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，也不能得出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 的结论.

矩阵乘法满足下列的运算规律（假设运算都是可行的）：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$，（其中 λ 为常数）；

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，　$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(4) $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n$.

这里仅对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ 给出证明.

设 $\boldsymbol{A}_{m\times s}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}_{s\times n}=[b_{ij}]$，$\boldsymbol{C}_{s\times n}=[c_{ij}]$，则可设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{M}=[m_{ij}]_{m\times n}$，以及

$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{N}=[n_{ij}]_{m\times n}$. 则按矩阵乘法的定义，恰有

$$m_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{s}a_{ik}c_{kj}=n_{ij}$$

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$.

例 5 试证两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵.

证 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$是两个 n 阶下三角矩阵，即满足 $i<j$ 时 $a_{ij}=b_{ij}=0$. 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]$，则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=j}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

在 $i<j$ 时，右端第一个和式中的 $b_{kj}=0$，第二个和式中的 $a_{ik}=0$，从而 $c_{ij}=0$，由此得证 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 为下三角矩阵.

有了矩阵的乘法，就可以定义矩阵的幂. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 为正整数，定义 $\boldsymbol{A}^k$ 为 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘，即

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$$

矩阵的幂运算满足以下运算规律($\boldsymbol{A}$ 为方阵，k、l 为正整数)：

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$； (2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

注 由于矩阵乘法不满足交换律，故对于两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，一般而言，不成立 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

例 6 试证当 n 为正整数时

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$$

证 对 n 进行数学归纳法. 当 $n=1$ 时，等式显然成立. 设 $n=k$ 时成立

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}$$

对于 $n=k+1$，有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{k+1}&=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta-\sin k\theta\cos\theta\\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\cos\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta\\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

结论得证.

事实上，平面直角坐标系中

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

是个将坐标点(x,y)逆时针旋转θ角得到新坐标点(x',y')的旋转变换．由此可知例6所证等式的左边为连续旋转n次θ角，等式右边为一次旋转$n\theta$角，显然结果是一样的.

1.2.3　矩阵的转置

定义5　将矩阵$\boldsymbol{A}$的行换成同序数的列而得到的一个新矩阵，称为$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$或$\boldsymbol{A}'$．即若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{则 } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的转置满足下述运算规律(假设运算都是可行的)

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\lambda$是一个实数；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

我们仅对(4)给出证明.

设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times n}$，于是$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$的$(i,j)$元素为$\boldsymbol{AB}$的$(j,i)$元素，等于$\boldsymbol{A}$的第$j$行乘$\boldsymbol{B}$的第$i$列，等于$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$的第$i$行乘$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的第$j$列，即为$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的$(i,j)$元素，故

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

例7　设$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$，求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法1　因为$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 15 \\ 14 & 19 \end{bmatrix}$，所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 14 \\ -1 & 15 & 19 \end{bmatrix}$$

解法2

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 14 \\ -1 & 15 & 19 \end{bmatrix}$$

由矩阵转置的概念可以得到以下两个特殊矩阵.

如果$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，即$a_{ij} = a_{ji}\,(i,j = 1,2,\cdots,n)$时，称$\boldsymbol{A}$为**对称矩阵**.

如果$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$，即$a_{ij} = -a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$时，称$\boldsymbol{A}$为**反对称矩阵**．显然反对称矩阵

的主对角元均为零，即 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$.

例 8　试证明任一方阵均可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和的形式.

证　设 $\boldsymbol{A}$ 为任一 n 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶反对称矩阵，若命题成立，则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \tag{①}$$

对上式两边取转置，得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，由对称矩阵及反对称矩阵的定义，有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C} \tag{②}$$

于是，由式①、②，即可解得

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),\boldsymbol{C}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

显然，解得的 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 符合题意，即有

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

1.3　逆矩阵

1.3.1　逆矩阵的概念

设给定一个从 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 的**线性变换**

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{1.3-1}$$

并简写成

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

如果能从式(1.3-1)中解出

$$\begin{cases} x_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1n}y_n, \\ x_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{nn}y_n. \end{cases} \tag{1.3-2}$$

那么，可以得到一个从 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性变换，称此线性变换(1.3-2)为线性变换(1.3-1)的**逆线性变换**，简记为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$$

这时，$y = Ax = A(By) = ABy$，故 AB 为**恒等变换**，即 $AB = I$，I 为 n 阶单位阵．又

$$x = By = B(Ax) = BAx$$

故 BA 也是恒等变换，即 $BA = I$，由此可给出逆矩阵的定义．

定义 1　对给定矩阵 A，若存在一个矩阵 B，满足 $AB = BA = I$，则称矩阵 A **可逆**，并称矩阵 B 为 A 的**逆矩阵**，记作 $A^{-1} = B$．

显然，如果 A 的逆矩阵为 B，即 $A^{-1} = B$，则 B 的逆矩阵为 A，即 $B^{-1} = A$．容易验证矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\text{是可逆的，且 } A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

称不存在逆矩阵的方阵为不可逆矩阵．

1.3.2　逆矩阵的性质

性质 1　如果矩阵 A 可逆，则 A 的逆矩阵唯一．

证　设 B、C 都是 A 的逆矩阵，即有 $AB = BA = I$ 和 $AC = CA = I$，则有

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

故 A 的逆矩阵是唯一的．

性质 2　如果矩阵 A 可逆，且 $AB = I$，则必有 $BA = I$．

证　由于 A 可逆，即满足 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$，又 $AB = I$，于是有

$$BA = I(BA) = (A^{-1}A)(BA) = A^{-1}(AB)A = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$$

事实上，当 A、B 均为 n 阶方阵，且满足 $AB = I$ 时，以后可以推出 A 可逆，进而得到 $BA = I$．

性质 3　若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$．

性质 4　若 A 可逆，数 $\lambda \neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$．

以上两条性质，可直接用定义验证，留给读者自行完成．

性质 5　若 A、B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$．

证　因为 A、B 可逆，所以 A^{-1}、B^{-1} 存在，且有

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

以及

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B(A^{-1}A)B^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I$$

由定义 1 可知 AB 是可逆矩阵，且有 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$．

性质 5 可以推广到 n 个可逆矩阵的乘积情况，即若已知 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为同阶可逆矩阵，则

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$$

性质 6　若 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$．

证　由矩阵乘积的转置性质，有