普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学分析（上册）

欧阳光中 姚允龙 周 渊 编著

博学 · 数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学分析（上册）

欧阳光中　姚允龙　周　渊　编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

前　　言

复旦大学数学系的数学分析教材从 20 世纪 60 年代起出版了几种版本，随着改革开放和对外交流的发展，现代数学观点和方法融入数学分析教材是必然的趋势. 20 世纪 90 年代初由欧阳光中和姚允龙编写的《数学分析》(以下称原书，由复旦大学出版社出版)由于其独特的风格深受读者欢迎，被许多学校选用作为教材或教学参考书，也为其他教材提供了参考，迄今为止已经三次重印.

近年来，原书在复旦大学数学系多次使用，取得了很好的教学效果，深受广大学生欢迎. 在教学过程中，通过对教材不断地改进，又积累了很多新的经验，得到了各方同仁建议性意见，同时对照国内外同类教材的发展方向，以及 21 世纪数学分析课程对教学的要求，本着学生易学、教师易教的宗旨对原书进行了重新编写. 本书继续保持了原书的基本特色，对上下册风格进行了协调，并进一步简化一些重要结论的证明，将现代数学的一些重要工具引入数学分析课程，为读者进一步学习现代数学打好基础.

本书的重要特点是理论体系完整，对所有重要结论都给出了严格的证明；对数学分析教材中的一系列难点问题的讲述进行了系统的改进，提出了许多新的思想和方法.

本书对数学分析教材进行的创新工作主要包括：

1. 提出用 QD10 函数建立实数系的新方法，使得实数系理论处理变得非常简明，学生也容易接受.

2. 在不涉及圆周长和圆面积的前提下，用数列极限定义了圆周率 π，克服了传统教材 π 与圆周长相互循环定义之嫌，严格化了重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的证明.

3. 在积分理论中，不论是定积分还是重积分，我们都引入并证明了 Riemann 积分中的最深刻结论：函数 Riemann 可积的充要条件是有界几乎处处连续. 我们引入了零测度集和几乎处处连续等概念，并且简化了相应结论的证明和 Riemann 积分的讨论.

4. 给出了全新的无穷限积分顺序交换定理.

5. 作为选用章节，我们引进了经过数学分析化的 Lebesgue 积分理论. 仅用了一章的篇幅，使用了崭新的方法介绍了 Lebesgue 积分以及各种极限理论和

Lebesgue 测度,所需知识只是初等微积分,容易为初学者接受.本书的 Lebesgue 积分理论不仅是数学分析的一个强有力工具,而且也是实变函数的一个重要应用.这部分内容衔接了数学分析和实变函数课程并填补了两者之间的空白区域.当然,这部分内容即使不讲,也不影响整个课程的完整性.

6. 严格化了广义重积分的理论.

7. 简化了 Cauchy 收敛原理.

本书还引进了现代分析的观点和概念,对下列内容作了修改:

1. 将有界闭区间上的连续函数的三大定理合并为一条值域定理.

2. 用整体眼光来讲授极值问题,尤其是 Lagrange 乘子法,克服了传统教材过分强调局部的毛病.

3. 强调了集合论观点处理问题的方法.

4. 引进了可列集、零测度等概念.

在教材内容编排上,作了下述改进:

1. 正文与习题紧连布排,改变传统的只在章末安排习题的做法,为教师、学生针对性地选题带来方便,章末主要安排了一些综合性的习题.书末还附有参考答案.

2. 不同于用正项级数和变号级数为标准分类,采用绝对收敛和收敛为标准分类讨论收敛性,更为科学合理.而传统方法容易导致学生对变号级数使用等价量判别收敛性感到困惑.

3. 改变以往轻广义积分重定积分的做法,加强了广义积分的运算.

4. 引进了任意区间$\langle a, b\rangle$记号,使得许多结论的描述更为简洁.

5. 多重积分的变量代换公式的证明是传统课程的难点.现在修改为先讲述曲面积分公式,由此轻而易举地推出该公式,证明过程简洁明了.

在实际教学中有关 Lebesgue 积分的内容可以根据实际情况和教学计划的要求由主讲讲师决定取舍.

希望本书的出版能受到广大读者欢迎,并能对于数学分析课程的教学研究和教学改革起到一点推进作用.应读者的意见和建议,本书所有习题提供了参考性的解答.

最后,感谢教育部对于本书的资助,并将本书列入普通高等教育"十五"国家级规划教材.感谢复旦大学教务处、复旦大学数学系领导和同仁的帮助,感谢复旦大学出版社范仁梅女士对本书提出了很好的建议以及对本书的出版的大力支持.

本书上册及第 26 章由姚允龙编写,下册原作者欧阳光中,第 16 章到第 20 章由周渊负责改写,第 21 章到第 25 章由姚允龙改写,习题参考答案由周渊提供.

本书作为“十五”国家级规划教材敬献给复旦大学，谨以此贺母校百年校庆.

由于时间紧迫以及作者水平所限，虽经多次修改，错误和缺点在所难免，希望广大读者不吝指正(mayzhou@fudan. edu. cn).

作 者

2002 年 4 月

目　　录

第一章　集合……1
　§1.1　集合……1
　§1.2　数集及其确界……9
第二章　数列极限……15
　§2.1　数列极限……15
　§2.2　数列极限(续)……26
　§2.3　单调数列的极限……34
　§2.4　子列……43
第三章　映射与实函数……48
　§3.1　映射……48
　§3.2　一元实函数……55
　§3.3　函数的几何特性……60
第四章　函数极限和连续性……65
　§4.1　函数极限……65
　§4.2　函数极限的性质……74
　§4.3　无穷小量、无穷大量和有界量……84
第五章　连续函数和单调函数……93
　§5.1　区间上的连续函数……93
　§5.2　区间上连续函数的基本性质……101
　§5.3　单调函数的性质……109
第六章　导数和微分……116
　§6.1　导数概念……116
　§6.2　求导法则……125
　§6.3　高阶导数和其他求导法则……132
　§6.4　微分……138
第七章　微分学基本定理及应用……145
　§7.1　微分中值定理……145
　§7.2　Taylor 展开式及应用……151

§7.3 L'Hospital 法则及应用 …… 160
第八章 导数的应用 …… 167
§8.1 判别函数的单调性 …… 167
§8.2 寻求极值和最值 …… 170
§8.3 函数的凸性 …… 176
§8.4 函数作图 …… 184
§8.5 向量值函数 …… 190
第九章 积分 …… 197
§9.1 不定积分 …… 197
§9.2 不定积分的换元法和分部积分法 …… 206
§9.3 定积分 …… 214
§9.4 可积函数类 $R[a, b]$ …… 223
§9.5 定积分性质 …… 227
§9.6 广义积分 …… 237
§9.7 定积分与广义积分的计算 …… 246
§9.8 若干初等可积函数类 …… 255
第十章 定积分的应用 …… 268
§10.1 平面图形的面积 …… 268
§10.2 曲线的弧长 …… 273
§10.3 旋转体的体积和侧面积 …… 279
§10.4 物理应用 …… 285
§10.5 近似求积 …… 289
第十一章 极限论及实数理论的补充 …… 297
§11.1 Cauchy 收敛准则及迭代法 …… 297
§11.2 上极限和下极限 …… 303
§11.3 实数系基本定理 …… 308
第十二章 级数的一般理论 …… 311
§12.1 级数的敛散性 …… 311
§12.2 绝对收敛的判别法 …… 315
§12.3 收敛级数的性质 …… 323
§12.4 Abel-Dirichlet 判别法 …… 330
§12.5 无穷乘积 …… 334
第十三章 广义积分的敛散性 …… 340
§13.1 广义积分的绝对收敛性判别法 …… 340

§13.2 广义积分的 Abel-Dirichlet 判别法 …… 344
第十四章 函数项级数及幂级数 …… 350
§14.1 一致收敛性 …… 350
§14.2 一致收敛性的判别 …… 355
§14.3 一致收敛级数的性质 …… 359
§14.4 幂级数 …… 366
§14.5 函数的幂级数展开 …… 374
第十五章 Fourier 级数 …… 382
§15.1 Fourier 级数 …… 382
§15.2 Fourier 级数的收敛性 …… 390
§15.3 Fourier 级数的性质 …… 398
§15.4 用多项式逼近连续函数 …… 404

第一章　集　合

§1.1 集　合

一、集合和元素

当我们在考察自然数时，遇到 1，2，3，…等一个个对象；当我们考察天体时，遇到了一个个星球，这一个个对象就称为**元素**. Cantor 认为元素是指"感觉或思维中确定的个别对象". 某些对象(即元素)的汇总称为**集合**，这些被汇总的元素称为该集合的元素，其余元素则称为不是该集合的元素. 集合简称为集.

设 A 是一个集合，x 是一个元素. 如果 x 是 A 的元素，则可说 x 属于 A，并记作

$$x \in A;$$

如果 x 不是 A 的元素，则说 x 不属于 A，并记作

$$x \notin A \text{ 或 } x \overline{\in} A.$$

例如，由 a, b, c, d 这四个字母组成的集合 A 可表示为

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

这种将集合的元素列举以尽来表示集合的办法称为**枚举法**. 根据集合 A 的定义，我们知道 $b \in A$, $d \in A$，但 $x \notin A$, $1 \notin A$ 等等. 但并不是每个集合都可用枚举法来表示的. 在用枚举法行不通或用枚举法不方便时可采用**条件法**，即指出集合中元素的特性来表示该集合. 例如，集合

$$B = \{\underbrace{x}_{\text{(一般元素)}} \mid \underbrace{x \text{ 是应届中学毕业生}}_{\text{(元素的特性)}}\}$$

表示了应届中学毕业生所组成的集合. 于是，张三$\in B$ 表示张三是应届中学毕业生；李四$\notin B$ 表示李四不是应届中学毕业生.

我们再来看一些例子.

例 1　$A = \{x \mid x^2 + x = 0\}$ 表示由方程 $x^2 + x = 0$ 的根所组成的集合.

如果集合 A 和集合 B 有完全相同的元素，则称集合 A 与集合 B 相等，并记作 $A=B$.

回到例 1. 方程 $x^2+x=0$ 有 $x=0,\ -1$ 两个根，因此

$$A=\{0,\ -1\}.$$

例 2 集合$\{1,\ 2\}$，集合$\{2,\ 1\}$和集合$\{1,\ 1,\ 2\}$的元素都是 1 与 2 两个，故

$$\{1,\ 2\}=\{2,\ 1\}=\{1,\ 1,\ 2\}.$$

例 3 集合$\{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$有三个元素：1, 2 及$\{1,\ 2\}$，故

$$\{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}\neq\{1,\ 2\}.$$

下面是一些常见的集合：

$$\mathbf{N}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}=\{n\mid n\text{ 是自然数}\},$$

$$\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 是实数}\},$$

$$\mathbf{Q}=\{x\mid x\text{ 是有理数}\}=\{x=q/p\mid p,\ q\text{ 是整数且 }p>0\},$$

$$\mathbf{R}_+=\{x\mid x>0\},$$

$$\mathbf{R}^2=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in\mathbf{R}\},$$

最末一个集合 $\mathbf{R}^2$ 是 xy 平面上点$(x,\ y)$的全体. 更一般地，

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in\mathbf{R}\},$$

称为 n 维空间.

二、有限集和无限集

若集合 A 由 n 个元素组成，这里 n 是一个确定的自然数，则称集合 A 是**有限集**. 不是有限集的集称为**无限集**.

例如，$\{a,\ b,\ c,\ d\}$，$\{x\mid x\text{ 是中国的市或县}\}$，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$都是有限集. 而集合 $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}_+$ 及 $\mathbf{R}^2$ 都是无限集.

仅有一个元素 a 组成的集合$\{a\}$称为**单点集**. 注意，$a\in\{a\}$但 $a\neq\{a\}$.

如果一个无限集可表示成

$$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\},$$

则这个集合称为**可列集**. 例如，自然数集 $\mathbf{N}$，偶数集$\{2,\ 4,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots\}$，奇数集$\{1,\ 3,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots\}$，$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$都是可列集.

下一章将证明实数集 $\mathbf{R}$ 不是可列集.

例 4 证明有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

证 每个有理数可惟一地表示成

$$x=\frac{q}{p},$$

这里, $p>0$, p,q 都是整数且互质. 满足 $p+|q|=1$ 的有理数仅有一个 0,满足 $p+|q|=2$ 的非零有理数仅有$\frac{1}{1}$和$\frac{-1}{1}$两个,满足 $p+|q|=3$ 的非零有理数为 $\frac{2}{1}$, $\frac{-2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$四个,一般地,满足 $p+|q|=n$ 的非零有理数为

$$\frac{n-1}{1},-\frac{n-1}{1},\frac{n-2}{2},-\frac{n-2}{2},\cdots,\frac{1}{n-1},-\frac{1}{n-1},$$

共 $2(n-1)$ 个,…. 最后 $\mathbf{Q}$ 可表示成

$$\mathbf{Q}=\Big\{0,\underbrace{\frac{1}{1},-\frac{1}{1}}_{p+|q|=2},\underbrace{\frac{2}{1},-\frac{2}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{p+|q|=3},\cdots,$$
$$\underbrace{\frac{n-1}{1},-\frac{n-1}{1},\cdots,\frac{1}{n-1},-\frac{1}{n-1}}_{p+|q|=n},\cdots\Big\}.$$

这就证明了 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

三、空集

一个元素也不存在的集合称为**空集**,记作$\varnothing$. 例如,方程 $x^2+1=0$ 的实根所组成集合

$$\{x\mid x^2+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$$

就是个空集. 但集合$\{x|x$ 是外星人$\}$是不是非空集至今还未确认.

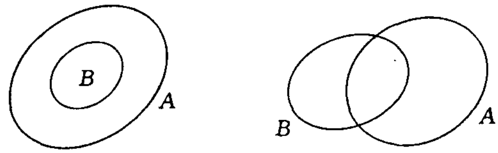
应注意,集合$\{\varnothing\}$不是空集,因为该集合中有一个元素$\varnothing$!

四、子集

设 A, B 是两个集合. 如果 B 的元素都是 A 的元素,则称 B 是 A 的**子集**,并记为

$$B\subset A.$$

若 B 不是 A 的子集,则记为 $B\not\subset A$ 或 $B\overline{\subset}A$ (图 1-1). 例如, $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}\not\subset\mathbf{R}_+$.



$B \subset A$ $\qquad$ $B \not\subset A$

图 1-1

命题 A 是任意一个集合,必有

$$A \subset A, \ \varnothing \subset A.$$

证 $A \subset A$ 是显然的,因为 A 的元素自然是 A 的元素. 第二式 $\varnothing \subset A$ 可用反证法. 假定 $\varnothing \not\subset A$,则这就意味着存在元素 $\xi \in \varnothing$ 但 $\xi \notin A$. 已知 $\varnothing$ 是个空集,故元素 ξ 是不存在的,这个矛盾表明反证假定 $\varnothing \not\subset A$ 不成立,从而 $\varnothing \subset A$.

上述命题指出 A 的最大子集是 A 本身,最小子集是空集 $\varnothing$.

例 5 写出集 $\{1, 2\}$ 的一切子集.

解 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$.

五、练习

1. 纠正下列错误:

(1) $1 \subset \{1, 2, 3\}$; $\qquad$ (2) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$;

(3) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$; $\qquad$ (4) $\{a, \{a\}\} = \{a\}$.

2. 设 A, B 是两个集合. 下列对 $A \neq B$ 的三个阐述中,哪些是正确的,哪些是错误的? 说明理由:

(1) A 的一切元素都不属于 B,B 的一切元素也不属于 A;

(2) A 中至少存在一个元素不属于 B,反之亦然;

(3) A 中至少存在一个元素不属于 B,或者 B 中至少存在一个元素不属于 A.

3. 严格阐述 $B \not\subset A$.

4. $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 相等吗?

5. 证明整数集合是可列集.

6. 将下列集合表示出来:

(1) 比 1 小的正有理数的全体;

(2) 满足 $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$ 的实数 x 的全体;

(3) 实部和虚部都是整数的复数全体;

(4) 当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时 x^2 所组成的集合;

(5) 或者 $x \geqslant 0$ 或者 $y \geqslant 0$ 的点 (x, y) 的全体;

(6) $x \geqslant 0$ 并且 $y \geqslant 0$ 的点(x, y)的全体.
在 xy 平面上将(5)和(6)的两个集合用阴影表示之.

六、若干逻辑记号

设 P, Q 是两个命题. $P \Longrightarrow Q$ 表示命题 P 成立时命题 Q 也成立,俗称从 P 可推出 Q. $P \Longleftrightarrow Q$ 表示 $P \Longrightarrow Q$ 且 $Q \Longrightarrow P$,即 P 成立的充要条件是 Q 成立.
例如,

$p(x)$是 n 次多项式且 $n \geqslant 1 \Longrightarrow p(x) = 0$ 有 n 个复根;

a, b, c 是正数 $\Longrightarrow (a+b+c)/3 \geqslant \sqrt[3]{abc}$;

A 是空集 $\Longleftrightarrow$ A 没有元素;

集 $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.

记号"$\exists$"意为存在,记号"$\forall$"意为每一个或任意的. 例如:

$A \not\subset B \Longleftrightarrow \exists x \in A$, 使得 $x \notin B$;

$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A$, 有 $x \in B$,

$\forall$ 活人,心脏在跳动.

$\exists$ 学生,学习努力.

七、集合运算

集合的基本运算有并、交、差、补(余)四种.

设 A, B 是两个集合.

1. 并集 $A \cup B$

$A \cup B$ 是 A 和 B 的元素汇总所成的集(图 1-2),即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

例如

$$\{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\};$$
$$\{x \mid x \leqslant 0\} \cup \{x \mid x > 0\} = \mathbf{R};$$
$$\{\text{女大学生}\} \cup \{\text{男大学生}\} = \{\text{大学生}\}.$$

2. 交集 $A \cap B$

$A \cap B$ 是 A 和 B 的公共元素所成的集(图 1-2),即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

例如

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\};$$

$$\{x \mid x \leqslant 1\} \cap \{x \mid x > 0\} = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\};$$
$$\{\text{大学生}\} \cap \{20\text{ 岁的人}\} = \{20\text{ 岁的大学生}\}.$$

显然，$\varnothing \cup A = A$，$\varnothing \cap A = \varnothing$，$A \cap B \subset A \subset A \cup B$，$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$，$A \cup A = A \cap A = A$.

3. **差集** $A - B$

$A - B$ 表示由在 A 中但不在 B 中的元素所组成的集(图 1-2)，即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

例如

$$\{1, 2\} - \{2, 3, 4\} = \{1\};$$
$$\{x \mid x \leqslant 1\} - \{x \mid x > 0\} = \{x \mid x \leqslant 0\};$$
$$\mathbf{R} - \mathbf{Q} = \{x \mid x \text{ 是无理数}\}.$$

显然，$A - \varnothing = A$，$\varnothing - A = \varnothing$，$A - B \subset A$.

4. **补集** A^c

设在集合 X 中讨论某一问题，A 是 X 的一个子集，A 的补集(又称余集)A^c 定义为

$$A^c = X - A$$

(图 1-2).

显然，$A \cup A^c = X$，$A \cap A^c = \varnothing$.

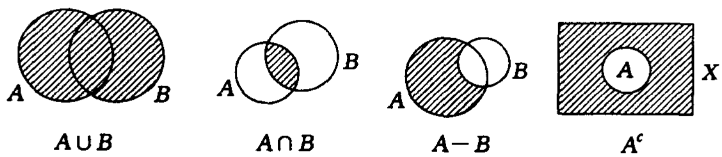


图 1-2

例如，取 $X = \mathbf{R}$，则

$$\mathbf{Q}^c = \{x \mid x \text{ 是无理数}\};$$
$$\mathbf{R}_+^c = \{x \mid x \leqslant 0\}.$$

又如，$X = \{\text{大学生}\}$，$A = \{\text{男大学生}\}$，则

$$A^c = \{\text{女大学生}\}.$$

八、练习

1. 设 $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$，$A = \{a, b, c, d, e\}$，$B = \{a, c, e, g\}$，$C = \{b, e, f, g\}$，求：

(1) $A\cup C$; (2) $B\cap A$;

(3) $C-B$; (4) $B^c\cap C$;

(5) $C^c\cap A$; (6) $(A-C)^c$;

(7) $(A-B^c)^c$; (8) $(A\cap A^c)^c$.

2. 举一个 $(A-B)\cup B\neq A$ 的例子.

3. 举一个 $A\cap B=A\cap C$ 但 $B\neq C$ 的例子.

4. "$x\notin A\cup B \Longleftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$" 对吗? 改正之.

九、集合运算公式

(1) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ (交换律).

(2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$(结合律).

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$(分配律).

(4) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ (对偶律).

我们分别以分配律和对偶律的前一式为代表,说明公式验证的办法.

证明分配律的第一式. 先证明 $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$:

$x\in A\cap(B\cup C)\Longrightarrow x\in A$ 且 $x\in B\cup C$

$\Longrightarrow x\in A$ 且 "$x\in B$ 或 $x\in C$"

$\Longrightarrow$ "$x\in A$ 且 $x\in B$" 或 "$x\in A$ 且 $x\in C$"

$\Longrightarrow x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C\Longrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

再来证明相反包含关系:

$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Longrightarrow x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$

$\Longrightarrow$ "$x\in A$ 且 $x\in B$" 或 "$x\in A$ 且 $x\in C$"

$\Longrightarrow x\in A$ 且 "$x\in B$ 或 $x\in C$"

$\Longrightarrow x\in A$ 且 $x\in B\cup C\Longrightarrow x\in A\cap(B\cup C)$.

综上所证,即得分配律的第一式.

证明对偶律的第一式.

$x\in(A\cup B)^c\Longleftrightarrow x\notin A\cup B$

$\Longleftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$

$\Longleftrightarrow x\in A^c$ 且 $x\in B^c\Longleftrightarrow x\in A^c\cap B^c$.

上述各步都是充分必要的,由此得对偶律的第一式.

作为练习验证这两条定律的第二式.

十、无限个集合的运算

许多重要的数学课题涉及到无限个集合的运算.对集合而言,这与有限个情形无本质区别.例如,可列多个集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$的并集

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \equiv A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

表示将每个集合 A_n 的元素汇总而成的集合,即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \exists\, n \in \mathbf{N},\ x \in A_n\}.$$

交集

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \equiv A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$$

表示由所有 A_n 的公共元素所组成的集合,即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \in A_n,\ \forall\, n \in \mathbf{N}\}.$$

例 6 证明:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid x \geqslant \frac{1}{n}\right\} = \mathbf{R}_+.$$

证 每个 $\left\{x \mid x \geqslant \frac{1}{n}\right\} \subset \mathbf{R}_+$, 故其并集

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid x \geqslant \frac{1}{n}\right\} \subset \mathbf{R}_+. \tag{1.1.1}$$

反之,对 $\mathbf{R}_+$ 中任一数 x_0,取自然数 $n_0 > 1/x_0$ (因 $x_0 > 0$), 从而

$$x_0 \in \{x \mid x \geqslant 1/n_0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid x \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

因为 x_0 是 $\mathbf{R}_+$ 中的任一数,故得

$$\mathbf{R}_+ \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid x \geqslant \frac{1}{n}\right\}. \tag{1.1.2}$$

合并(1.1.1)与(1.1.2)两式,即得所要的等式.

对于不可列个集合 A_α, $\alpha \in \Gamma$,Γ 为任意集合(称为指标集),同样可定义并集 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ 与交集 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$,具体定义留给读者.特别指出有以下公式

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c,\ \left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c.$$

§1.2　数集及其确界

本节讨论实数集 $\mathbf{R}$ 的子集,简称数集.

一、区间与邻域

设 a, b 是两个实数且 $a \leqslant b$. 闭区间 $[a, b]$,开区间 (a, b),闭开区间 $[a, b)$ 及开闭区间 $(a, b]$ 是指下列数集:

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},$$

数 a, b 称为**端点**. $\langle a, b\rangle$ 用来泛指以上四种区间. 若 $a > b$, 则 $\langle a, b\rangle$ 理解为 $\langle b, a\rangle$.

我们还会遇到端点含 $\pm\infty$ 的区间,例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\},$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R},$$

这里"$+\infty$"与"$-\infty$"分别读作正无穷与负无穷.

约定 $\forall$ 实数 a 满足

$$-\infty < a < +\infty.$$

设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $|x - y|$ 表示了 x 和 y 之间的距离. 显然

$$|x - y| \leqslant |x| + |y|.$$

设 $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$. 集合

$$O_\delta(a) \equiv O(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ **邻域**,它表示了与 a 距离小于 δ 的 x 全体. 集合

$$\overline{O}_\delta(a) = [a - \delta, a + \delta] = \{x \mid |x - a| \leqslant \delta\}$$

称为点 a 的 δ **闭邻域**. 而集合

$$O_\delta(a) - \{a\} = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$