大学数学基础指导丛书

概率论与数理统计指导

鲍兰平 编

清华大学出版社

大学数学基础指导丛书

概率论与数理统计指导

鲍兰平 编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书在体现主要内容表格化、来龙去脉直观化、关键方法口诀化、学习方法具体化的同时，对于解题方法的获得过程给予了直观、简便的分析，以帮助读者尽快地领会问题的核心. 对于容易引起混乱的概念和方法进行了全面的比较，以便排除干扰；对于具有普遍意义的方法进行了深入的分析和讨论；以利于举一反三. 最后分两个层次配备了练习题.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计指导/鲍兰平编. 一北京：清华大学出版社，2005.2
(大学数学基础指导丛书)
ISBN 7-302-09582-5

Ⅰ.概… Ⅱ.鲍… Ⅲ.①概率论一高等学校一教学参考资料②数理统计一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 096003 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：刘晓艳
印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×230　**印张**：16.5　**字数**：336 千字
版　次：2005 年 2 月第 1 版　2005 年 2 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-09582-5/O・409
印　数：1～3000
定　价：24.00 元

前言

在多年的教学中，遇到的一个普遍现象是大多数学生都感到概率论与数理统计比较难学，在解题时不能正确地进行思考或不能运用适当的概率语言来表达自己的思想．本书就是在积累多年学习指导经验的基础上，为解决这方面的问题而做的一种努力．

首先，对核心问题进行了高度的概括．具体表现为主要内容表格化、来龙去脉直观化、关键方法口诀化、学习方法具体化．如概率论解题中的三大法宝、随机变量的四大工具、数理统计中的案例学习法等．读者会感到易学、易记、易掌握．

其次，重点分析了解题中的思维定向．对于解法的获得过程给予了直观、简便的分析，帮助读者尽快领会问题的核心；对于容易引起混乱的概念和方法进行了全面的比较，从而顺利地排除干扰；对于具有广泛应用价值的方法进行了深入的思考和分析，以求举一反三．

最后，在解题指导中，问题的安排充分与认知结构的发展过程接轨．注重对概率论解题核心能力的训练，创设了多种情景，自编了一些问题，并按两个层次编写了相应的练习题．

总之，使用本书，你会由衷地感到：学好概率论与数理统计，其实很容易．

编写本书时，引用了有关书籍的一些例子，恕不一一指明出处，在此向有关作者致谢．

书中不足之处，诚恳地希望广大同仁、读者批评指正．

鲍兰平

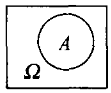
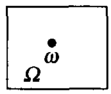
2004 年 11 月

目录

第1单元　随机事件及其概率

1.1　内容提要

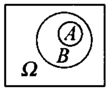
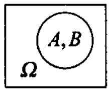
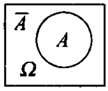
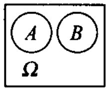
1　随机试验与随机事件的六个基本概念

名　称	符号	定　义	集合解释	示意图
随机试验	E	对随机现象的观察		
样本空间	Ω	试验的所有可能结果组成的集合	全集	
随机事件	A,B,C 等	在一次试验中可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果	Ω 的子集	
基本事件	ω	不可再分的试验结果	单点集	
必然事件	Ω	每次试验中必然发生	全集 Ω	
不可能事件	$\varnothing$	每次试验中一定不发生	空集 $\varnothing$	

备注　(1) 必然事件 Ω 与一定不发生事件 $\varnothing$ 都不具有随机性，只是为了逻辑上的方便，将它们作为特殊随机事件；

(2) 在一次试验中事件 A 发生，从集合论的观点看，就是该次试验出现的结果属于集合 A

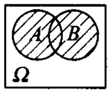
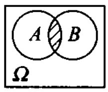
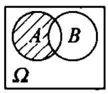
2　事件之间的四种关系

名　称	符号	定　义	集合解释	示意图
包含关系	$A\subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集	
等价关系	$A=B$	事件 A 发生必有事件 B 发生，且事件 B 发生也必有事件 A 发生	A 与 B 相等	
互逆关系（对立关系）	$\overline{A}$	事件 $\overline{A}$ 发生 事件 A 必不发生 反之也成立	A 的余集	
互不相容（互斥关系）	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 一定不会同时发生	A 与 B 无公共元素	

备注　(1) 在实际问题中，事件之间的关系主要是从事件之间的相互影响进行分析，集合论只是提供了一种严格的数学刻画手段；

(2) 每次试验中，A 与 $\overline{A}$ 必有且仅有其中之一发生，即 $\overline{A}\cup A=\Omega$，$\overline{A}A=\varnothing$.

3　事件之间的三大运算

名　称	符号	定　义	集合解释	示意图
事件的和	$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少一个发生	A 与 B 的并集	
事件的积	$A\cap B$（或 AB）	事件 A 与事件 B 都发生	A 与 B 的交集	
事件的差	$A-B$	事件 A 发生且事件 B 不发生	A 与 B 的差集	

备注　事件运算律

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4) De Morgan 律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；

(5) 差积转换律　$A-B=A\overline{B}=A-AB=A\cup B-B$.

4 事件概率的四种形式

名称	符号	适用范围	计算方法	关键点
古典概率	$P(A)$	古典概型 随机试验满足： (1) 只有有限个基本事件； (2) 每一基本事件是否发生具有相同的可能性	$P(A)=\frac{k}{n}$ n——基本事件总数 k——事件 A 所含基本事件数	(1) 等可能性的确定 (2) n 与 k 要按相同的规则计数
几何概率	$P(A)$	几何概型 随机试验满足： (1)样本空间 Ω 为某一可度量的几何区域； (2) 该几何区域内每一点发生的可能性是相同的	$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$ $L(A)$,$L(\Omega)$ 可指长度、面积或体积	两大转化 (见解题指导)
条件概率	$P(B\|A)$	在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率	(1) 由直观意义计算 (2) 先计算$P(A)$与$P(AB)$，再由 $P(B\|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$	(1) $P(B\|A)$的直观意义 (2) $P(B\|A)$与 $P(AB)$的区别
公理化定义	$P(A)$	为任何随机试验 E 提供了一个统一的理论结构. 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，赋予一个实数 $P(A)$，若有(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；(2) $P(\Omega)=1$；(3) 满足可列可加性，则称 $P(A)$为 A 的概率		

备注 概率性质

(1) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$；

(2) $P(\bar{A})=1-P(A)$；

(3) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$，且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

5 计算概率的五大公式

名 称	表达式	适用范围	应用关键
加法公式	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$	$P(A),P(B),P(AB)$易于计算	将所关心的事件合适地表达为$A\cup B$
	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	A与B互不相容	
乘法公式	$P(AB)=P(A)P(B\|A)$ $P(A_1A_2\cdots A_n)$ $=P(A_1)P(A_2\|A_1)\cdots P(A_n\|A_1\cdots A_{n-1})$	条件概率由直观意义较易计算	(1) 将所关心的事件合适地表达为AB; (2) 正确理解$P(B\|A)$
	$P(AB)=P(A)P(B)$	已知A与B相互独立	由试验的特点或实际意义先确定出事件的独立性
	$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)\cdots P(A_n)$	已知$A_1,\cdots,A_n$相互独立	
全概率公式	设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为Ω的一个划分(完备事件组),则 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\|A_i)$	(1) 事件B是伴随事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$其中之一的发生而发生的; (2) $P(B\|A_i)$由直观意义容易计算	(1) 合适划分的选定; (2) $P(A_i)$及$P(B\|A_i)$的准确理解与直观计算
贝叶斯公式	在全概率公式条件下若$P(B)>0$,则$P(A_k\|B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$	已知试验已发生某种"结果",确定其中某一"原因"发生的概率	由题意确定出待求概率为$P(A_k\|B)$
伯努利公式	$P(B_k)=C_n^kp^kq^{n-k}$ 其中$p=P(A),q=1-p$	一次试验中A发生的概率为p,则在n次独立重复试验中,事件A恰好发生k次记为B_k	(1) 试验可等价地理解成这种类型; (2) $P(A)$的正确计算

备注 (1) A与B独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$;

A,B,C相互独立$\Leftrightarrow A,B,C$两两独立,且$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

(2) Ω的常用划分:

① $\Omega=A\cup\bar{A}$;

② $\Omega=(A\cup\bar{A})\cap(B\cup\bar{B})=AB\cup\bar{A}\bar{B}\cup A\bar{B}\cup\bar{A}B$.

1.2 学习指导

1 基本要求

(1) 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算.

(2) 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典概型和简单几何概型的概率.

(3) 掌握概率的加法公式、乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式.

(4) 理解事件独立性的概念，掌握应用事件独立性进行概率计算.

(5) 理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

2 重点、难点提示

(1) 重点：事件的表示与事件的独立性；概率的性质与概率的计算.

概率统计研究的是随机现象的统计规律性，即在大量重复试验下所表现的一种“大势所趋”.本部分所述的事件、概率与事件的独立性是概率论中最基本、最重要的三个概念.对随机现象统计规律性的分析首先概括为对事件概率的分析，从而事件就成为认识随机现象的出发点，事件概率的计算就成为一项核心工作.事件间的相互独立性的分析不仅为复杂事件概率的计算提供了方便，而且也成为概率论有别于其他数学学科的一道独特的风景.

(2) 难点：复杂事件的表示与分解；试验概型的选定与正确运用公式计算事件概率；条件概率概念的理解与应用；独立性的理解、判定与应用；全概率公式的应用.

3 学习方法

本单元的核心问题是随机事件概率的计算.对于简单的事件，可由古典概型或几何概型等直接计算；对于稍复杂的事件，就要根据试验与事件的特点，借助事件的三大运算，将复杂事件分解成简单事件，然后再计算其概率.这一过程体现了概率方法的精华所在，是学习的重中之重，也是进一步学习随机变量的基础.掌握这个过程，需要准确理解各种概念、运算、公式的意义，通过对具体问题的分析与演练，逐步积累将复杂问题进行等价转换的经验并掌握常用的方法.在学习这一部分时，要注意以下几点：

(1) 突破难点的两大秘诀——简单化与直观化

简单化是指首先从几类简单问题(如掷硬币、掷骰子)中，准确理解概念与方法的内涵.有了一定的经验之后，再结合一般的叙述方法，逐步扩大范围和变换问题情景.通过这样一个从特殊到一般的认识过程，就可以抓住问题的本质，提高认识的层次.直观化是指，

一方面，事件的运算，概率的性质等可借助示意图加深印象和理解；另一方面，在具体问题中事件的运算是通过直观的逻辑分析而进行的，这里还包括逆事件、互不相容、相互独立、条件概率等，它们的计算常常也是由直观意义来确定的. 因此，要注意对这种直观性的培养，要善于将概念与方法与实际生活中所熟悉的情景相联系.

(2) 走出迷雾的捷径——比较

有比较才能有鉴别. 如果某些概念、某些解法不易掌握，这时一方面可参考一些其他教材，看一看这样的问题从别的角度是如何解释的；另一方面，就要搜集几个简单例子，然后在这些例子中把正确解法与错误解法进行比较，找出问题的关键所在. 同时，凡是容易混淆的地方都要进行这种比较. 经过一段时间的练习，就可以培养出正确的感觉，就可以快速地发现差异，达到准确、深刻理解的境界. 这类问题有：AB 与 $A\cup B$ 的区别、“都不发生”与“不都发生”的区别、$P(AB)$ 与 $P(B|A)$ 的区别、相互独立与互不相容的区别、全概率公式中不同划分方式的区别等.

(3) 达到灵活的基本方式——从模仿到推广

概率的概念，只是规定了一些基本原则，概念本身并没有给出一般算法(这不同于高等数学中概念). 在事件概率的计算中，最重要的一步是把所叙述的事件用字母表示出来，然后，根据试验和事件的特征，选择合适的等价表示形式(对于复杂事件，常常要借助事件的运算). 这样，再结合概率的性质，就可把复杂事件的概率计算转化成一系列的基本计算. 本书把这一过程概括为解题的三大法宝：表示、分解和转化问题. 掌握这个过程，可首先从熟悉一些简单问题(如掷硬币问题)的概率计算方法开始，然后在略复杂的问题上(如随机取球问题等)模仿并应用这些基本方法，从而积累出一般的经验，总结出共性. 这样，就可以不断变换问题的情景，通过更广泛的问题，实现深刻理解和灵活运用.

1.3 解题指导

概率解题三大法宝：表示、分解和转化问题

1 掷硬币问题

例 1 掷一枚硬币，求正面向上的概率.

分析 这是一个最基本的试验，基本事件有两个：正面与反面，习惯上用 H 表示正面，T 表示反面，因此 $\Omega=\{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$. 由对称性可知，正面与反面出现的可能性相等，可用古典概型计算概率.

解 $\Omega=\{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$，设 $A=$“出现正面”，则 $A=\{\mathrm{H}\}$，因此

$$P(A)=\frac{1}{2}.$$

例 2 将一枚硬币连抛两次，求下列事件的概率：

(1) 二次都是正面；

(2) 第一次正面，第二次反面；

(3) 一次正面，一次反面；

(4) 至少一次正面.

分析 连抛两次可能的结果是 HH，HT，TH，TT，且由对称性易知，每个基本事件发生的可能性相等，因此可用古典概型计算概率.

解 (1) 设 B_1＝“两次都是正面”，$\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$，则 $B_1=\{HH\}$，故

$$P(B_1)=\frac{1}{4}.$$

(2) 设 B_2＝“第一次正面，第二次反面”，则 $B_2=\{HT\}$，故 $P(B_2)=\frac{1}{4}$.

(3) 设 B_3＝“一次正面，一次反面”，则 $B_3=\{HT,TH\}$，故 $P(B_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(4) 设 B_4＝“至少一次正面”，则 $B_4=\{HH,HT,TH\}$，故 $P(B_4)=\frac{3}{4}$.

思考 (1) 本题既是一个基本题，也是一个典型题. 可以设想当抛掷次数较多时，这种处理手法就比较麻烦. 事实上，本题可以用更一般的方法来计算. 一枚硬币连抛两次相当于同一试验作了两次，且两次试验互不影响，即两次试验是相互独立的，试验可独立重复进行，为二重伯努利试验. 因此，可设 A_1＝“第一次为正面”，A_2＝“第二次为正面”，则由试验的独立性可得 A_1 与 A_2 相互独立，并且有

$$B_1=A_1A_2,\quad P(B_1)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$B_2=A_1\overline{A}_2,\quad P(B_2)=P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$B_3=A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2,$$

$$\begin{aligned}P(B_3)&=P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)\\&=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$B_4=A_1\cup A_2,$$

$$\begin{aligned}P(B_4)&=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

这种思维方法，可概括为“表示问题、分解问题、转化问题”，它是处理更一般问题时常

用的方法. 这一点在后面的例题中会反复体现，一定要注意学习和总结.

(2) 现在考虑另一个问题，将两枚硬币一起抛，应如何计算 $P(B_1)$，$P(B_3)$ 和 $P(B_4)$？实际上，此时试验的各种结果的可能性与将一枚硬币连抛两次时相应结果的可能性是一样的，因此仍可按上述方法计算概率. 解该题时，出现的典型错误是，认为样本空间由三个基本事件组成：正正、一正一反、反反，从而计算出 $P(B_1)=\frac{1}{3}$，$P(B_3)=\frac{1}{3}$，$P(B_4)=\frac{1}{3}$. 错误的根源在于此时三个基本事件的发生已不是等可能的，再使用古典概型计算概率就是错误的. 因此应用古典概型时一定要注意各个基本事件是否是等可能的.

(3) 请自己思考两个人每人抛一枚硬币时，相应事件的概率该如何计算.

例3 将一枚硬币独立地抛两次，设事件 $A_1=$“第一次为正面”，$A_2=$“第二次为正面”，$A_3=$“一次正面，一次反面”，$A_4=$“两次都是正面”，则必有( ).

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立

分析 由直观可知 A_1、A_2 必定是相互独立的，A_1 与 A_3，A_2 与 A_3 是否独立并不直观，因此需用独立性定义进行分析. 由例2可知 $P(A_1A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_1)=P(A_3)=\frac{1}{2}$；$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，故有 $P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$，$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$. 因此 A_1 与 A_3 相互独立，A_2 与 A_3 也相互独立. 但是，$A_1A_2A_3=\varnothing$，$P(A_1A_2A_3)=0$，因此 $P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，所以 A_1,A_2,A_3 只是两两独立，而不是相互独立，应选(C).

思考 (1) 判定事件的独立性有两种方式：一种是由试验的独立性直观地得到事件的相互独立性；另一种是由独立性的定义进行推理，验证是否满足定义. 此题中 A_1 与 A_2 的独立性从直观来看是显然的，若用定义验证，则有

$$\Omega=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\},$$
$$A_1=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT}\},A_2=\{\mathrm{HH},\mathrm{TH}\},A_1A_2=\{\mathrm{HH}\}.$$

因此有

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},P(A_1A_2)=\frac{1}{4}.$$
$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2).$$

(2) 此题明确指出了三个事件两两独立时未必有相互独立；

(3) 进一步分析该题可知，A_2 与 A_4 不独立(实际上，$A_2A_4=A_4$，A_4 发生时 A_2 一定发生)；A_3 与 A_4 也不独立(实际上，$A_3A_4=\varnothing$，A_3 发生时，A_4 一定不发生，A_3 与 A_4 互不相容). 因此本题对包含、互不相容、相互独立概念的理解，以及概念之间的联系给出了一个简明的分析.

例4 将一枚硬币连抛4次，试求以下事件的概率：

(1) 正面恰好出现一次;

(2) 到第 4 次才出现正面.

分析 将一枚硬币连抛 4 次,试验可看成是 4 次独立试验,每次试验结果只有正面与反面,因此可用 n 重(此处 $n=4$)伯努利试验模型来分析.正面恰好出现一次事件的概率可用公式计算;到第 4 次才出现正面意味着前 3 次都是反面,第 4 次出现正面,可直接用事件独立性求解.

解 (1) 设 A="抛一次出现正面",B="4 次抛掷中正面恰好出现一次",则

$$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(B)=C_4^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}.$$

(2) 设 A_i="第 i 次出现正面",$i=1,2,3,4$,C="第 4 次才出现正面",由试验的独立性可知,A_1,A_2,A_3,A_4 相互独立,且 $C=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$,故有

$$P(C)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)=\frac{1}{16}.$$

思考 (1) 本题进一步说明了应用试验的独立性分析问题的方法,理解有困难的同学可用写样本空间(基本事件个数为 $n=2^4=16$)的方法重新计算各事件的概率,这种对比是有价值的.本题中问题(1) 与问题(2) 常常被混淆,比较其解法,可加深对类似问题的理解与掌握.

(2) 进一步分析将一枚硬币连抛 n 次时相应事件概率的计算,并可考虑其他一些事件,如正面恰好出现 k 次的概率问题.

例 5 将一枚硬币连抛 6 次,试求以下事件概率:

(1) 至少出现一次正面;

(2) 3 次正面出现在 2 次反面之前.

分析 试验过程可以看成 n 重($n=6$)伯努利试验.至少出现一次正面包含的情况比较复杂,而其逆事件为正面一次也未出现,事件比较简单.因此可先计算其逆事件的概率,再借助概率性质转化即可.3 次正面出现在 2 次反面之前,这一事件的含义应是在前 5 次抛掷中,第 5 次结果应是反面,且前 4 次结果应是 3 次正面,1 次反面,而与第 6 次试验结果无关.如此,可借助事件的积运算将此事件表达出来,再应用事件的独立性计算概率.

解 (1) 设 A="掷一次结果为正面",B="掷 6 次,至少出现一次正面",则 $\overline{B}$="掷 6 次,全是反面",且

$$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(\overline{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

故

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

(2) 设 B_1="掷 4 次,正面出现 3 次,反面出现 1 次",B_2="第 5 次抛掷出现反面",则

B_1 与 B_2 相互独立(多个事件相互独立的推论)

$$P(B_1)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4},\quad P(B_2)=\frac{1}{2}.$$

设 C="3 次正面出现在 2 次反面之前",则 $C=B_1B_2$(关键所在),

$$P(C)=P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

思考　(1)"至少一个发生"的概率问题,一般都要转化为先计算其逆事件的概率,这样可减少运算量.

(2) 在第二问中,对所叙述事件的准确理解是至关重要的.计算过程再次体现了"表示、分解、转化"这种解题思路的价值.独立性的应用基于这样一个直观事实:若一次试验与其他试验是相互独立的,则这次试验的结果与其他试验的各种结果必定是相互独立的.

(3) 本题当然也可用列样本空间的方法,再用古典概型计算各事件的概率,只不过运算量更大一些,请读者自己练习.

例 6　将一枚均匀硬币连抛 6 次,已知至少出现一次正面,求第一次正面出现在第 4 次试验的概率.

分析　此题的关键是准确理解题意,"已知至少出现一次正面"条件下的概率,应使用条件概率来分析.

解　设A="至少出现一次正面",B="第一次正面出现在第 4 次试验",则

$$B\subset A,P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{1}{2}\right)^6,$$

$$P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}\quad(B\text{ 即为直到第 4 次才出现正面})$$

故有

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\frac{2^2}{2^6-1}=\frac{4}{63}.$$

思考　(1) 此题容易出现的典型错误之一是把计算条件概率 $P(B|A)$误认为计算 $P(AB)$.事实上,这是一种比较固定的表达方式,当题设中出现"已知某事件发生时",往往所求的事件概率就是条件概率.

(2) 理解有困难时,还可以列出试验的样本空间,并用基本事件的集合表示 A、B、AB,再用古典概型和条件概率的定义计算相应事件的概率,这是加深对概念与方法的理解的一种有效途径.

(3) 有关 $P(AB)$与 $P(B|A)$的对比分析,在"取球问题"中有进一步的说明.

例 7　在 100 枚硬币中有一枚硬币的两面都是国徽,其余的都只有一面有国徽.现从中任取一枚,连掷 5 次,求每次落下来都是国徽向上的概率.