高等学校教材

# 非线性连续介质力学教程

金　明　主编
高玉臣　主审

清华大学出版社
北京交通大学出版社

高等学校教材

# 非线性连续介质力学教程

金　明　主编
高玉臣　主审

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

## 内容简介

本书用张量的绝对记法和并矢符号，介绍了非线性连续介质力学的基本理论。所有公式均在任意曲线坐标系中讨论。前5章讨论张量的概念和理论，包括曲线坐标系、张量、张量的运算、张量场、二阶张量、不变量等内容；后5章讨论非线性连续介质力学的基本概念和基本理论，包括应变、应变速率、应力、运动方程、弹性本构关系等内容。

只要读者具备高等数学、线性代数、理论力学、材料力学和弹性力学的基本知识，就可以阅读本书。本书可作为力学、土建、机械、航空等专业研究生、高年级本科生学习非线性连续介质力学的教材，也可供有关科研人员参考。



**图书在版编目(CIP)数据**

非线性连续介质力学教程／金明主编．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2005.7
（高等学校教材）
ISBN 7-81082-550-X

Ⅰ．非…　Ⅱ．金…　Ⅲ．非线性连续介质力学-高等学校-教材　Ⅳ．O33

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第060551号

责任编辑：高振宇
出 版 者：清华大学出版社　邮编：100084　电话：010-62776969　http://www.tup.com.cn
　　　　　北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010-51686414　http://press.bjtu.edu.cn
印 刷 者：北京东光印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　印张：10　字数：217千字
版　　次：2005年7月第1版　2005年7月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-81082-550-X/O·28
印　　数：1～3 000册　定价：18.00元

---

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@center.bjtu.edu.cn。

# 序

金明副教授编写的这本书是在我写的《固体力学基础》一书的框架下编写的。我的书自1999年出版后，我本人只教过一次，其后的教学都是由金明完成的。此次出版基金是我们联合申请的。他在教学过程中补充了许多习题，这些习题对初学者来说都是必要的。在讲述方式上，本书也较原来的"固体力学基础"有较大改进，但是从内容上看，仍保持其原有特色。作者几次请我联合署名，我都谢绝了，我认为这种教科书没有什么"侵权"问题。最后，作者请本人写个序，于是就写了以上这段话。

中国科学院院士　高玉臣

2005年7月

# 前言

非线性连续介质力学是连续介质力学的一个重要分支,也是进一步学习和力学有关的其他专业课程的基础。就非线性连续介质力学本身而言,它还有许多意义重要并富有挑战性的研究课题;就研究方法而言,张量是研究非线性连续介质力学的主要手段。不仅如此,张量在其他力学学科也有广泛应用。如今,许多和力学有关的学术著作、科研论文都在不同程度上使用了张量。因此,学习非线性连续介质力学非常重要。目前,在国内外许多高等院校和研究机构的研究生培养方案中,都将非线性连续介质力学列入力学、土建、机械、航空等专业的必修课。

非线性连续介质力学内容抽象、理论性强、数学符号多,虽然有许多专著和教材可供参考,但这方面的书不容易读懂,尤其是工科院校的学生普遍感到这门课程学起来很吃力。因此,如何在有限的学时内让学生系统掌握这门课程的基本内容,便成为一个值得研究的问题。高玉臣教授在《固体力学基础》一书中提出一整套张量记法来描述非线性连续介质力学的基本理论,并对该学科中的一些基本概念提出了见解。这为学习、理解和掌握非线性连续介质力学的基本内容提供了一条新的途径。作者曾有机会在高玉臣教授的指导下学习非线性连续介质力学。后来,作者为北京交通大学力学及其他一些相关专业的研究生讲授《固体力学基础》一书中的基本观点和方法。教学实践表明,只要系统补充张量分析方面的知识,工科院校的学生也能掌握非线性连续介质力学的基本理论。

本书是在授课讲义的基础上编写的。同时,作者也参考了国内外的一些教材和专著。考虑到工科院校学生的特点,本书在内容叙述上尽量做到直观、形象和具体。公式推导是学生学习中的一大难点,因此,本书特意给出了绝大多数公式的详细推导过程,并尽可能多地举例说明张量的运算规则。目的是使学生学会运用张量这一数学工具分析问题。

本书前5章为张量分析的基础知识。这部分内容注重理论上的系统性,绝大部分结论都给出了证明过程;注重张量绝对记法的使用,使学生掌握张量绝对记法的运算规则,特别是张量的微分运算规则。后5章为非线性连续介质力学的基本理论。这部分内容详细讲解《固体力学基础》一书中的观点和方法。强调理论上的系统性和物理概念的直观性。对各种物理量的基本性质进行了论证,并尽可能多地用图示来直观地解释这些性质。

在本书的编写过程中,高玉臣教授给予悉心指导,兑关锁副教授阅读了本书的初稿并提出了许多改进意见。研究生王志乔、王足、安雄桃、李璟等承担了部分打字工作。本书得到了"北京交通大学教材出版基金"、"力学一级学科博士点申请及建设"项目、国家自然科学基金项目"新型形状记忆合金纤维智能复合材料力学性能"(项目编号:90205007)、"北京市共建项

目——固体力学重点学科建设"项目的资助。作者就此表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免会出现缺点和错误，恳请读者指正。

金　明

2005年7月

# 目　　录

# 第 1 章　绪　　论

## 1.1　几个概念

对于连续介质的概念,我国古代学者已有深刻认识。《庄子》中有言:"一尺之捶,日取其半,万世不竭。"就是说,木棒可以被无限地分割下去。近代连续介质的概念仍然是指可以无限分割而不致间断的物质,换句话说,无论用多高倍的显微镜都不会在这种物质内找到间隙。显然,现实中的任何固体、液体和气体都经受不住这种无限制的分割过程。所以,"连续介质"的概念只是在一定条件下在一定的近似程度上代表了物质的某些属性。本书的讨论是在承认"连续介质"概念的前提下进行的。所谓连续固体是连续介质中的一类,它们明显地具有一定的、维持自身形状的能力,或者说,它们具有一定抵抗变形的能力。

无论是天空的云、海中的水,还是陆地的山均可看作连续介质,都有复杂的行为。在它们的各种行为中,运动与变形是力学研究的主要对象。为了描述某连续体,必须把握其中每个部分的行为。从连续体中选定的一个充分小的部分称为微元,见图 1.1。所谓充分小,这只是一个相对概念,并非绝对尺寸。当我们考虑某一海域时,数平方公里的面积也可被当作微元。但是,如果我们研究玻璃中的裂纹,裂纹前方以毫米计算的区域仍不可视为一个微元。微元必须是充分简单,其中的物理量没有复杂的分布。如果一个微元不具有几何特征,或几何特征已无关紧要,则称为质点。质点也是一个简化模型。当研究地球绕太阳运动时,若将地球看成质点,就能反映地球的主要运动规律,并具有足够的精度;当研究地球自转或地壳变迁时,若将地球看成一个质点,就无法研究地球的这种运动规律。

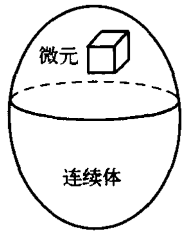

图 1.1　连续体与微元

在三维空间中,连续体在任意时刻 $t$ 占据一定的空间区域;连续体中的每个质点占据一定的空间位置。质点的位置可以用一个从某参考点 $O$(原点)出发的矢量 $\boldsymbol{P}$ 表示,见图 1.2,此矢量称为该点在时刻 $t$ 的矢径。

例如,用手去拉固定在天花板上的橡皮筋,见图 1.3,显然橡皮筋被拉长。若在地面上观察橡皮筋中某一质点 $m$ 空间位置的变化,则可选定地面上一点 $O$ 作为参考点。设橡皮筋被拉长前质点 $m$ 处于三维空间中的 $A$ 点,时刻为 $t_0$;橡皮筋被拉长后质点 $m$ 移动到三维空间中的另一点 $B$,时刻为 $t$。则橡皮筋被拉长前质点 $m$ 的矢径为 $\boldsymbol{P}(t_0)=OA$,橡皮筋被拉长后质点 $m$ 的矢径为 $\boldsymbol{P}(t)=OB$。

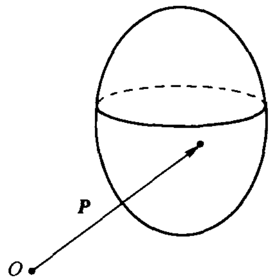


图 1.2 矢径

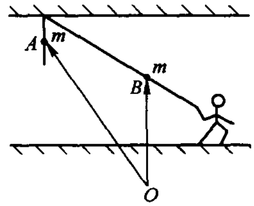


图 1.3 橡皮筋中一质点 $m$ 的矢径

当连续体的位置和形状发生变化时,连续体中每个质点的位置也在变化。在这个变化过程中,为了记录每一个质点的运动情况,须对每一个质点起一个“名字”,当然不能有重名的现象。即对连续体中的每个质点分别赋予不同的一组数 $X^i(i=1,2,3)$,称之为随体坐标(或物质坐标、Lagrange 坐标)。一个质点的随体坐标就是这个质点的“名字”。一个质点无论运动到哪里,它的名字不变。对于连续介质,物体内的质点在运动过程中既不会消失,也不会产生。就是说,在物体运动过程中,质点和随体坐标始终是一一对应的。

当质点在空间运动时,其随体坐标不变。随体坐标与质点的关系正如身份证号码与每个公民的关系一样,无论这个公民走到哪里,他(她)的身份证号码不变。并且,公安机关在办理公民身份证时,不允许出现两个公民身份证号码相同的情况,也不允许出现同一个公民具有两个不同的身份证号码这种情况。

当然,随体坐标只是一种表征每个质点的参数。随体坐标 $X^i$ 可以根据情况任意选取。

例如,为了定义处于运动状态中的连续体内某一个质点的随体坐标,我们可选定一个参考系,建立一个直角坐标系,在某一时刻测量该质点在这个直角坐标系中的 3 个坐标 $X^i$,以 $X^i$ 为该质点在任意时刻的随体坐标。虽然该质点在其他时刻移动到另外的位置,但该质点的随体坐标仍是 $X^i$,就是说,在连续体的运动过程中,一个质点的随体坐标始终不变。当然,也可建立其他坐标系记录每个质点,如柱坐标系、球坐标系等。

又例如,为了记录弹性体中每个质点,既可在变形前记录,也可在变形后记录。图 1.4 为一个含裂纹的、受拉的橡胶体,点 $m$ 为橡胶体中的一个质点。在柱坐标系中,变形前质点 $m$ 的坐标为$(R,\Theta)$,受拉变形后质点 $m$ 的坐标为$(r,\theta)$。质点 $m$ 的随体坐标既可选为$(R,\Theta)$,也可选为$(r,\theta)$。

在一个给定的参照系中,为了记录空间中某一个几何点,需对这个几何点起“名字”。即对空间中的每个几何点分别赋予不同的一组数 $x^i(i=1,2,3)$,称之为空间坐标(又称 Euler 坐标)。空间坐标与几何点的关系正如门牌号与住所之间的关系一样,并且门牌号不能有重复的现象。就是说,几何点和它的空间坐标是一一对应的。

$x^i$ 可根据分析问题的方便来选取。例如,可建立一个直角坐标系,以该点的 3 个坐标作为该点一个空间坐标,见图 1.5。

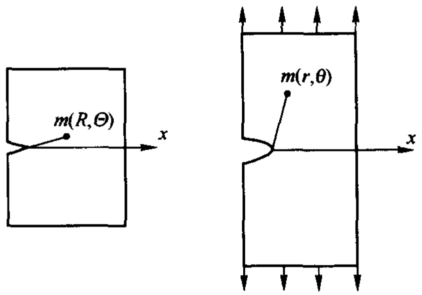


图 1.4 含裂纹橡胶体的随体坐标

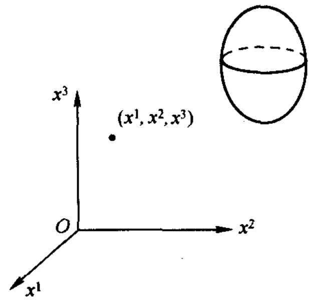


图 1.5 空间坐标与运动中的物体

在一个给定的参照系中,要描述一个质点的运动情况,可按以下两种方式来进行。一种方式为,具有随体坐标 $X^j$ 的质点在时刻 $t$ 处于具有空间坐标 $x^i$ 的空间几何点,那么 $x^i$ 是 $t$ 与 $X^j$ 的函数,即

$$x^i = x^i(X^j, t)。\tag{1.1}$$

反之,对固定的空间点 $x^i$,在时刻 $t$,将有质点 $X^j$ 在此逗留或经过,即 $X^j$ 是 $t$ 与 $x^i$ 的函数,即

$$X^j = X^j(x^i, t)。\tag{1.2}$$

式(1.1)和式(1.2)互为反函数。在给定时刻 $t$,只要 $X^j$ 与 $x^i$ 一一对应,任选其一便可描述运动。

这正像公安机关有两种方法把握每个人的行踪,其一是在给定时刻确定出每个人的住所,相当于式(1.1);其二是在给定时刻对每个住所确定出其中的人,相当于式(1.2)。

实际上,在给定时刻 $t$,若给出随体坐标和空间坐标的一一对应关系,如式(1.1)、(1.2),就可以确切地描述物体内各质点的运动情况了。

【例 1.1】 双向均匀拉伸的橡皮膜,见图 1.6,试给出运动描述。

**解** (1) 选择随体坐标。

在变形前的橡皮膜上建立直角坐标系 $OX^1X^2$,橡皮膜上一质点 $m$ 在这个坐标系中的坐标为 $(X^1, X^2)$,选择 $(X^1, X^2)$ 为质点 $m$ 的随体坐标。

(2) 选择空间坐标。

在基础上建立直角坐标系 $o\,x^1x^2$,空间点 $A$ 在这个坐标系中的坐标为 $(x^1, x^2)$,选择 $(x^1, x^2)$ 为空间点 $A$ 的空间坐标。

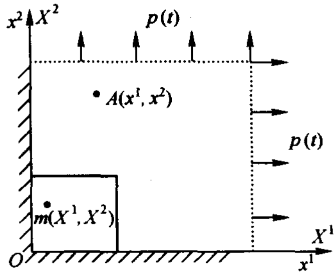


图 1.6 双向均匀拉伸的橡皮膜

(3) 假设质点 $m$ 沿 $X^1$ 方向的位移为 $u^1 = X^1 t$,沿 $X^2$ 方向的位移为 $u^2 = X^2 t$。

(4) 以式(1.1)形式的运动描述为

$$\begin{cases} x^1 = X^1 + u^1 = X^1 + X^1 t \\ x^2 = X^2 + u^2 = X^2 + X^2 t \end{cases},$$

以式(1.2)形式的运动描述为

$$\begin{cases} X^1 = \dfrac{x^1}{1+t} \\ X^2 = \dfrac{x^2}{1+t} \end{cases}。$$

为了分析问题方便，我们作如下求和约定，称为求和惯则。

(1) 当同一个角标仅在等式一端出现两次时，表示对这个角标的取值范围求和。例如，

$$p^{i1}\boldsymbol{P}_1 + p^{i2}\boldsymbol{P}_2 + p^{i3}\boldsymbol{P}_3 = p^{ij}\boldsymbol{P}_j, \qquad (i,j=1,2,3)。$$

如不求和，要作特殊说明。

(2) 当同一角标出现在等式两端时，不对这一角标求和。例如，

$$\boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}^j = \delta_i^j, (i,j=1,2,3)$$

表示的是以下 9 个等式：$\boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{P}^1 = \delta_1^1, \cdots, \boldsymbol{P}_3 \cdot \boldsymbol{P}^3 = \delta_3^3$。

(3) 当同一角标出现 3 次或 3 次以上时，对不求和的角标加括号，例如，

$$\mu^1 \boldsymbol{P}_1 \otimes \boldsymbol{P}^1 + \mu^2 \boldsymbol{P}_2 \otimes \boldsymbol{P}^2 + \mu^3 \boldsymbol{P}_3 \otimes \boldsymbol{P}^3 = \mu^{(i)} \boldsymbol{P}_i \otimes \boldsymbol{P}^i, (i=1,2,3)$$

$$\mathrm{d}\overset{*}{\boldsymbol{T}}{}^i \cdot \delta\boldsymbol{u}_i \mathrm{d}x^{(i)} = \mathrm{d}\overset{*}{\boldsymbol{T}}{}^1 \cdot \delta\boldsymbol{u}_1 \mathrm{d}x^{(1)} + \mathrm{d}\overset{*}{\boldsymbol{T}}{}^2 \cdot \delta\boldsymbol{u}_2 \mathrm{d}x^{(2)} + \mathrm{d}\overset{*}{\boldsymbol{T}}{}^3 \cdot \delta\boldsymbol{u}_3 \mathrm{d}x^{(3)}, (i=1,2,3)。$$

## 1.2 协变基

如果在三维空间中给定了一个直角坐标系 $Oxyz$，它的原点为 $O$，坐标轴为 $Ox$、$Oy$、$Oz$，这 3 个坐标轴上的单位向量记为 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{i}_3$，则空间任意点 $A$ 对应的矢径 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P} = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2 + z\boldsymbol{i}_3,$$

见图 1.7。显然，矢径 $\boldsymbol{P}$ 是 $x$、$y$、$z$ 的函数，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(x,y,z)$。

若 $x$、$y$、$z$ 是另外 3 个参量 $X^1$、$X^2$、$X^3$ 的连续函数，则矢径 $\boldsymbol{P}$ 也可表示成参量 $X^1$、$X^2$、$X^3$ 的函数

$$\boldsymbol{P}(X^1,X^2,X^3) = x(X^1,X^2,X^3)\boldsymbol{i}_1 + y(X^1,X^2,X^3)\boldsymbol{i}_2 + z(X^1,X^2,X^3)\boldsymbol{i}_3, \qquad (1.3)$$

这里我们假设数组 $x$、$y$、$z$ 与数组 $X^1$、$X^2$、$X^3$ 一一对应。那么，空间点 $A$ 和数组 $X^1$、$X^2$、$X^3$ 也是一一对应的。

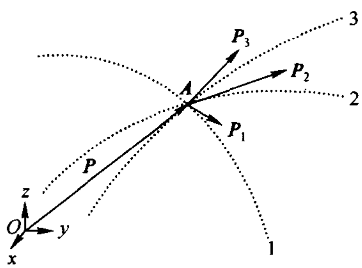

图 1.7 基矢

若固定 $X^1$、$X^2$、$X^3$ 中任意两个量而让第三个量变化，则在三维空间中矢径 $\boldsymbol{P}$ 的轨迹是一条曲线。例如，固定 $X^2$、$X^3$ 而让 $X^1$ 变化，可以得到图 1.7 中的曲线 1；同样，分别让 $X^2$、$X^3$ 变化，就得到曲线 2、3。因此，$X^1$、$X^2$、$X^3$ 称为点 $A$ 的曲线坐标。

当连续体的状态给定后，随体坐标 $X^i$ 可作为确定质点的一种参量，即质点的矢径 $\boldsymbol{P}$ 可看成随体坐标 $X^i$ 的函

数,即

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(X^i)。\tag{1.4}$$

对式(1.4)进行微商运算,便得到3个向量,即

$$\boldsymbol{P}_i=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial X^i},i=1,2,3。\tag{1.5}$$

矢量 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 分别为图1.7中曲线1、2、3在 $X^i$ 点的切向量。矢量组 $\boldsymbol{P}_i$ 称为曲线坐标系在点 $X^i$ 的矢基或基矢。如果分别以矢量 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 的方向为3个坐标轴的方向,那么这3个坐标轴在该点构成一个局部坐标系,称为与该点对应的标架。在三维空间上的每一点都对应着这样一个标架,因此又称为活动标架。在三维空间上,这些标架的全体构成一个标架场,又称为活动标架场。我们约定矢量 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 组成右手系。

显然,直角坐标系 $\boldsymbol{i}_k$ 是一个标架。对 $\boldsymbol{i}_k$ 和 $\boldsymbol{P}_i$ 的关系讨论如下。由式(1.3)和式(1.5)知,可用 $\boldsymbol{i}_k$ 表示 $\boldsymbol{P}_i$,即

$$\boldsymbol{P}_i=\frac{\partial x}{\partial X^i}\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial y}{\partial X^i}\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial z}{\partial X^i}\boldsymbol{i}_3。\tag{1.6}$$

反之,也可用 $\boldsymbol{P}_i$ 表示 $\boldsymbol{i}_k$。式(1.6)可写成

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\\\boldsymbol{P}_2\\\boldsymbol{P}_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}_1\\\boldsymbol{i}_2\\\boldsymbol{i}_3\end{pmatrix},\tag{1.7}$$

式中,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial X^1} & \dfrac{\partial y}{\partial X^1} & \dfrac{\partial z}{\partial X^1}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial X^2} & \dfrac{\partial y}{\partial X^2} & \dfrac{\partial z}{\partial X^2}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial X^3} & \dfrac{\partial y}{\partial X^3} & \dfrac{\partial z}{\partial X^3}\end{pmatrix}$$

为函数 $x$、$y$、$z$ 的Jacobi矩阵。若 $x$、$y$、$z$ 与 $X^1$、$X^2$、$X^3$ 一一对应,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异。这样,由式(1.7),可用 $\boldsymbol{P}_i$ 表示 $\boldsymbol{i}_k$,即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}_1\\\boldsymbol{i}_2\\\boldsymbol{i}_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\\\boldsymbol{P}_2\\\boldsymbol{P}_3\end{pmatrix}。\tag{1.8}$$

当然,$\boldsymbol{P}$ 也是空间坐标 $x^i$ 的函数。由于 $x^i$ 与 $X^i$ 互相单值对应,即可以互相换算;所以只就坐标 $X^i$ 讨论问题便够了。

矢基可充分代表曲线坐标系 $X^i$ 的性质。

有时为了分析问题方便,还将矢基单位化。设 $|\boldsymbol{P}_i|$ 为矢量 $\boldsymbol{P}_i$ 的模,则 $\boldsymbol{P}_i$ 方向的单位矢

量为

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{P}_i}{|\boldsymbol{P}_i|}。\tag{1.9}$$

由式(1.6)得

$$|\boldsymbol{P}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial X^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial X^i}\right)^2}。\tag{1.10}$$

$|\boldsymbol{P}_i|$ 又称为 Lamé 系数或度量系数。

若 $\boldsymbol{e}_i$ 还满足

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \tag{1.11}$$

式中，$\delta_{ij}$为 Kronecker 符号，即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \tag{1.12}$$

则称 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 为单位正交基。

令

$$\boldsymbol{A}^i = \boldsymbol{P}_{i+1} \times \boldsymbol{P}_{i+2}, \tag{1.13}$$

这里约定角标 $4=1$、$5=2$，$\boldsymbol{A}^i$ 称为与矢基 $\boldsymbol{P}_i$ 对应的基面矢量，其方向垂直于 $\boldsymbol{P}_{i+1}$和 $\boldsymbol{P}_{i+2}$所构成的面，其量值等于 $\boldsymbol{P}_{i+1}$与 $\boldsymbol{P}_{i+2}$张成的平行四边形面积。记基面矢量的模为

$$A^i = |\boldsymbol{A}^i|, \tag{1.14}$$

$A^i$ 称为与矢基 $\boldsymbol{P}_i$ 对应的基面。例如，$\boldsymbol{A}^3$ 的几何意义是一个向量，其方向垂直于 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$，并且 $\boldsymbol{A}^3$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 构成右手系；其长度为以 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 为边的平行四边形的面积，见图 1.8。

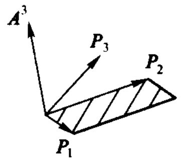

图 1.8 基面

由 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 作混合积，以 $V$ 表示之，有

$$V = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3), \tag{1.15}$$

$V$ 代表 3 个基矢量所张成的平行六面体的容积，简称基容。当矢基 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 组成右手系时，$V>0$。通常我们讨论 $V>0$ 时的情形。令 $\boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}_j = p_{ij}$，基容还可表示成

$$V = |p_{ij}|^{\frac{1}{2}}, \tag{1.16}$$

式中，$|p_{ij}|$为由 $p_{ij}$组成的行列式。

综上所述，基面和基容均由矢基确定。

矢基、基面和基容的概念也可推广到 $n$ 维空间。例如，$n$ 维空间的基容为

$$V = |\boldsymbol{P}_{i_1} \cdot \boldsymbol{P}_{i_2}|^{\frac{1}{2}}, (i_1, i_2 = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.17}$$

式中，

$$\left|\boldsymbol{P}_{i_1}\cdot\boldsymbol{P}_{i_2}\right|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{P}_n\\ \boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{P}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{P}_n\cdot\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_n\cdot\boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{P}_n\cdot\boldsymbol{P}_n\end{vmatrix}。\tag{1.18}$$

点的矢径 $\boldsymbol{P}$ 不依赖于坐标系的选取，但是矢基 $\boldsymbol{P}_i$ 却依赖于坐标系的选取。令 $\boldsymbol{P}_j$ 表示另一坐标系 $Y^j=Y^j(X^i)$ 中的矢基；由复合函数微商法则，得

$$\boldsymbol{P}_j=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial Y^j}=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial X^i}\frac{\partial X^i}{\partial Y^j}=\boldsymbol{P}_i\frac{\partial X^i}{\partial Y^j}。\tag{1.19}$$

式(1.19)采用了求和惯则，即当上指标和下指标相同时，则令该指标 $i$ 取1至3，并求和。式(1.19)即为坐标变换下矢基的变换规则，这一变换规则称为协变规则，$\boldsymbol{P}_i$ 又称为协变基。

一般情况下，我们考虑 $X^i$ 和 $Y^j$ 间的 Jacobi 行列式非零的情形，即 $\left|\frac{\partial Y^j}{\partial X^i}\right|\neq 0$ 和 $\left|\frac{\partial X^i}{\partial Y^j}\right|\neq 0$ 同时成立。在这样的前提下，$X^i$ 是 $Y^j$ 的单值函数；$Y^j$ 也是 $X^i$ 的单值函数。$X^i$ 坐标与 $Y^j$ 坐标具有同等的地位，所以 $\boldsymbol{P}_j$ 也是协变基。

这里的坐标变换不限于随体坐标，可以在任何坐标之间进行变换。

下面讨论基容的变换规则。记 $X^i$ 和 $Y^j$ 坐标系下的基容分别为 $V_X$ 和 $V_Y$，则由式(1.17)，有

$$V_X=\left|\boldsymbol{P}_{i_1}\cdot\boldsymbol{P}_{i_2}\right|^{\frac{1}{2}},\ V_Y=\left|\boldsymbol{P}_{j_1}\cdot\boldsymbol{P}_{j_2}\right|^{\frac{1}{2}}。\tag{1.20}$$

考虑式(1.19)、式(1.20)，得

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{P}_{j_1}\cdot\boldsymbol{P}_{j_2}\right|&=\left|\boldsymbol{P}_{i_1}\frac{\partial X^{i_1}}{\partial Y^{j_1}}\cdot\boldsymbol{P}_{i_2}\frac{\partial X^{i_2}}{\partial Y^{j_2}}\right|=\left|\frac{\partial X^{i_1}}{\partial Y^{j_1}}\boldsymbol{P}_{i_1}\cdot\boldsymbol{P}_{i_2}\frac{\partial X^{i_2}}{\partial Y^{j_2}}\right|=\\&\left|\left(\frac{\partial X^1}{\partial Y^{j_1}}\cdots\frac{\partial X^n}{\partial Y^{j_1}}\right)\left(\boldsymbol{P}_{i_1}\cdot\boldsymbol{P}_{i_2}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial X^1}{\partial Y^{j_2}}\\ \vdots\\ \frac{\partial X^n}{\partial Y^{j_2}}\end{pmatrix}\right|=\\&\left|\frac{\partial X^{i_1}}{\partial Y^{j_1}}\right|\left|\boldsymbol{P}_{i_1}\cdot\boldsymbol{P}_{i_2}\right|\left|\frac{\partial X^{i_2}}{\partial Y^{j_2}}\right|=\\&\left|\frac{\partial X^i}{\partial Y^j}\right|^2\left|\boldsymbol{P}_{i_1}\cdot\boldsymbol{P}_{i_2}\right|。\end{aligned}\tag{1.21}$$

将式(1.21)代入式(1.20)，得基容的变换规则

$$V_Y=V_X\left|\frac{\partial X^i}{\partial Y^j}\right|。\tag{1.22}$$

## 1.3 逆变基

由式(1.5)定义的矢基 $\boldsymbol{P}_i$ 并非用以表示任意矢量的唯一基底。其实，如果不考虑坐标变换，任何 $n$ 个线性无关的矢量都可作为 $n$ 维空间的矢基。除 $\boldsymbol{P}_i$ 之外，还有一组与坐标系 $X^i$ 相关联的矢基，称为 $\boldsymbol{P}_i$ 的共轭基，并记为 $\boldsymbol{P}^i$，它们的确定条件为

$$\boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}^j = \delta_i^j, \tag{1.23}$$

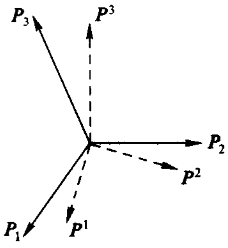


图 1.9 共轭基

式中，$\delta_i^j$ 为 Kronecker 符号，当 $i=j$ 时，取值 1；当 $i \neq j$ 时，取值 0。见图 1.9。

共轭基 $\boldsymbol{P}^i$ 可由矢基 $\boldsymbol{P}_j$ 表示出来，即

$$\boldsymbol{P}^i = p^{ij} \boldsymbol{P}_j, \tag{1.24}$$

式中，$p^{ij}$ 为 $\boldsymbol{P}^i$ 在 $\boldsymbol{P}_j$ 上的分解系数。

为了确定 $p^{ij}$，以 $\boldsymbol{P}^k$ 点乘式(1.24)两侧，并注意到式(1.23)，得

$$\boldsymbol{P}^i \cdot \boldsymbol{P}^k = p^{ik}。 \tag{1.25}$$

式(1.25)给出一个重要关系，但是仍未能利用 $\boldsymbol{P}_j$ 的信息给出 $p^{ik}$。现进一步以 $\boldsymbol{P}_k$ 点乘式(1.24)，于是有

$$\boldsymbol{P}^i \cdot \boldsymbol{P}_k = p^{ij} (\boldsymbol{P}_j \cdot \boldsymbol{P}_k)。 \tag{1.26}$$

令

$$\boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}_j = p_{ij}, \tag{1.27}$$

由式(1.23)、式(1.26)及式(1.27)，可得

$$p^{ij} p_{jk} = \delta_k^i。 \tag{1.28}$$

这样，如果认为 $p_{jk}$ 为已知，并且 $|p_{jk}| \neq 0$，则由式(1.28)可唯一地解出 $p^{ij}$，得到以协变基 $\boldsymbol{P}_j$ 表示的共轭基 $\boldsymbol{P}^i$。由式(1.15)、式(1.16)知，只要基矢 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 非共面，则 $|p_{jk}| \neq 0$。

还有另一种形式表示共轭基 $\boldsymbol{P}^i$。因为

$$\boldsymbol{P}_j \cdot \frac{\boldsymbol{P}_{i+1} \times \boldsymbol{P}_{i+2}}{V} = \delta_j^i, \tag{1.29}$$

式中，$V$ 为式(1.15)定义的基容。所以

$$\boldsymbol{P}^i = \frac{\boldsymbol{P}_{i+1} \times \boldsymbol{P}_{i+2}}{V}, \tag{1.30}$$

以及基容的另一种表达式

$$V = \frac{|\boldsymbol{P}_{i+1} \times \boldsymbol{P}_{i+2}|}{|\boldsymbol{P}^i|}。 \tag{1.31}$$

由式(1.24)及式(1.28)进一步可得

$$\boldsymbol{P}_k = p_{ik} \boldsymbol{P}^i。 \tag{1.32}$$