因式分解及其应用

臧海亭

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

陕西科学技术出版社

因式分解及其应用

臧海亭

陕西科学技术出版社

因式分解及其应用

臧海亭

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　安康地区印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张6.5　字数135,200

1982年10月第1版　　1982年10月第1次印刷

印数 1—30,000

统一书号：7202·37　　定价：0.54元

前　言

因式分解是初等代数里的一个重要课题．它在代数式的恒等变换中有重要的作用，在解二次方程和高次方程中也有直接的应用．因为因式分解的方法较多，题目也比较难，所以不少同学都希望能有一本读物，比较系统地介绍因式分解各类题目的解法和各种方法的应用．本书就是应这种要求而编写的．

本书的编写，力求内容由浅入深，文字通俗易懂．为了提高同学们的学习兴趣和解题能力，还注意了对思索问题的途径以及题目间的相互关系的探求．此外，本书在汲取各家有关因式分解著述的长处的同时，还融入了编者自己学习研究“十字相乘法”和“二项式的因式分解”的一些心得体会；对实数和复数范围内的因式分解也作了一些理论上的介绍．这些，对中学生和中学数学教师可能会有所帮助．

本书编写过程中，曾得到魏庚人教授和赵根榕先生的帮助，他们对本书提出了若干有益的建议；初稿编成后，又蒙王军政、卢四维二同志读过一遍，并作了一些文字上的修改．在此统志致谢！由于编者水平有限．错误之处在所难免，恳请同志们批评指正．

臧海亭

1981年5月

目　录

一 因 数

质 因 数

在自然数中，若一个数可以除尽另一个数，我们就说这个数是另一个数的因数。反过来，另一个数就是这个数的倍数。例如2就是6的因数，而6则是2的倍数。

一般地，如果自然数 n 等于自然数 b 除自然数 a 的商，也就是当 n 乘上 b 后得到 a，我们就说 a 是 b 的倍数，而 b 为 a 的因数。写成公式，即

$$a=bn。$$

若 a 为 b 的倍数，我们便说 a 被 b 整除。在这种可除性理论中，有下面三个定理：

1．如果 a 能被 b 整除，而 b 又能被 c 整除，则 a 可被 c 整除。

2．如果某些数的代数和等于 0 或者能被数 n 整除，并且所有加数除了一个尚不知道的以外，其余都是 n 的倍数，那么这个尚不知道的加数同样也可被 n 整除。例如，36能被9整除，而9能被3整除，显然36也能被3整除；若 $(3-x-9+27)$ 是3的倍数，那么 x 也应该为3的倍数。

3．如果两个整数 a 和 b 的乘积能被 m 整除，而 m 不能整除 a，那么 m 一定能整除 b。例如，3与8的乘积能被4整除，而3不能用4整除，则8一定能被4整除。

知道了什么是因数和倍数以及有关定理后，我们再来看一看什么叫质数和质因数。

我们知道，1这个数只有一个因数，就是它本身。而任何大于1的自然数a至少都有两个因数，就是1和它本身a。若$a>1$，且a只有1和a这两个因数，我们就把a称为质数。比如2，3，5，7，11等都是质数，而大于1不是质数的数叫做合数，比如4，6，8，10，1980等。质数也称为素数，合数也称为合成数。按照这种定义，全体自然数可分为三类：

Ⅰ．1

Ⅱ．质数

Ⅲ．合数

质数和合数都有无穷多个，只有第一类是一个数，即1。

若一个质数是某个数的因数，我们就说这个质数是某个数的质因数。比方说3就是24的质因数，而8就不是24的质因数，因为8是个合数，而不是质数。

在无限的质数长河中，人们发现了许多相邻二质数的差是2。如3，5；5，7；11，13；17，19；29，31；…，我们把它们称为双生质数。那么双生质数是否也有无限多对呢？这个问题直到现在还没有确定的答案。

整除准则

前面说过，$6=3\times2$，6是个合数，3和2都是质数，于是6等于两个质数的乘积。那么我们要问：任何一个自然数都能分解成质因数的连乘积吗？这是一定的。我们先

来看一些例子：

$34 = 2 \times 17$

$492 = 2 \times 2 \times 3 \times 41$

$8316 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11$

$2743 = 13 \times 211$

$173 = 173$

若一个数本身是质数，那么它就是本身的质因数．如173是个质数，173也就是它本身的质因数．若一个数是合数，那么这个数除了1和它本身以外，必定还有其它因数．如34是个合数，则34除了1和34外，还有因数2和17。可以证明，若$a > 1$，则a的大于1的最小因数是质数．而且这个a可以分解成质因数的连乘积。那么，一个质数的质因数如何去找呢？下面，我们来研究能被一些质数整除的准则．

显然能被质数2整除的准则是：末位数字是偶数或0的数。

能被质数3整除的准则是众所周知的，即各位数字之和是3的倍数的数．为了说明这个问题，我们先介绍一下十进位数的表示法，例如：

$372 = 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 2$

$9724 = 9 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10 + 4$

一般地，由n个数字a，b，…，k，l等组成的数

$$ab\cdots kl$$

可以写成

$$a\cdot 10^{n-1} + b\cdot 10^{n-2} + \cdots + k\cdot 10 + l$$

应该注意：$ab\cdots kl$并不是连乘积，它是一个数．个位数字是l，十位数字是k，等等。既然如此，

$$372=3\times100+7\times10+2=3\times(99+1)+7(9+1)+2$$
$$=(3\times99+7\times9)+(3\times1+7\times1+2)$$
$$=3\times(99+7\times3)+(3+7+2)$$

因此，372 有没有质因数 3，只要看（ 3 ＋ 7 ＋ 2 ）是不是 3 的倍数就行了。而（ 3 ＋ 7 ＋ 2 ）就是 372 的各位数字之和。显然 3 7 2 有质因数 3，而

$$9724=9\times1000+7\times100+2\times10+4$$
$$=9(999+1)+7(99+1)+2(9+1)+4$$
$$=(9\times999+7\times99+2\times9)+(9+7+2+4)$$
$$9+7+2+4=22$$

2 2 不是 3 的倍数，即9724的各位数字之和不是 3 的倍数，故9724没有质因数 3。

能被质数 5 整除的准则是：末位数字是 0 或 5 的数，相反地，末位数字不是 0 或 5 的数，都没有质因数 5，这个事实是很好想象的。例如 35 和 210 都有质因数 5。

能被质数11整除的准则是，奇位上各数字之和与偶位上各数字之和的差为 0 或为 11 的整倍数。例如 869 和24409

$$869=8\times100+6\times10+9$$
$$=(9\times11+1)\times8+(11-1)\times6+9$$
$$=(9\times11\times8+11\times6)+(8-6+9)$$
$$24409=2\times10000+4\times1000+4\times100+0\times10+9$$
$$=(909\times11+1)\times2+(91\times11-1)\times4+$$
$$+(99+1)\times4+0\times11+9$$
$$=(909\times11\times2+91\times11\times4+9\times11\times4+11\times0)+$$
$$+(2-4+4-0+9)$$

显然它们的第一个括号（ 9 ×11× 8 ＋11×6）和（909×11

$\times 2+91\times 11\times 4+9\times 11\times 4+11\times 0$）都是11的倍数，而第二个括号（$8-6+9$）和（$2-4+4-0+9$）恰好是其奇位上的数字之和与偶位上的数字之和的差，所以原数能不能被11整除，就要看第二个括号的结果是不是11的倍数。

一般地，我们有以下的证明：

$$10=11-1=11\text{的倍数}-1$$
$$10^2=(11-1)^2=11\text{的倍数}+1$$
$$10^3=(11-1)^3=11\text{的倍数}-1$$
$$10^4=(11-1)^4=11\text{的倍数}+1$$
$$\cdots\cdots$$
$$10^{n-1}=(11-1)^{n-1}=11\text{的倍数}+(-1)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 &= a_1+a_2\cdot 10+a_3\cdot 10^2+\cdots+\\ &\quad +a_n\cdot 10^{n-1}\\ &= a_1+a_2(11\text{的倍数}-1)+\\ &\quad +a_3(11\text{的倍数}+1)+\\ &\quad \cdots\\ &\quad +a_n\left[11\text{的倍数}+(-1)^{n-1}\right]\\ &= 11\text{的倍数}+\Big[(a_1+a_3+\cdots)-\\ &\quad -(a_2+a_4+\cdots)\Big]\end{aligned}$$

故若$\left[(a_1+a_3+\cdots)-(a_2+a_4+\cdots)\right]$是11的倍数，则$a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1$就是11的倍数；否则就不是。

我们再介绍一个能被11整除的准则。因为100，10000，1000000等等（即1后面带偶数个零的数）在被11除时，余

数为1．基于这种事实，我们便将一个数自右至左每两个数字分成一组，而最左边的一组里可能只有一个数字．如57385，自右至左每两位分一组，便成为5′73′85，于是便有

$$
\begin{aligned}
5'73'85' &= 5\times10000+73\times100+85\times1\\
&= 5\times(11\text{的倍数}+1)+73\times(11\text{的倍数}+\\
&\quad +1)+85\\
&=11\text{的倍数}+(5+73+85).
\end{aligned}
$$

这就是说，一个数等于11的某倍数与各组数字之和．所以若各组数字之和能被11整除，那么此数本身就能被11整除，即此数有质因数11，数57385的各组数字之和5＋73＋85＝163，163不是11的倍数，故57385不是11的倍数。当然，对163也可以用同样的准则来判别其是否为11的倍数。事实上，163＝1′63，而各组数字之和为1＋63＝64，64不是11的倍数，故163也不是11的倍数。

下面我们来看一看能被质数7和13整除的准则。

我们注意到1001能被7和13整除，因为1001＝7×11×13，于是被7和13整除的准则也将是能被11整除的第三个准则。1001＝7×11×13便是能被三个孪生质数7，11，13整除的理论根据．我们还是从一个数研究起．如914258，对914258作如下的变换

$$
\begin{aligned}
914258 &= 914000+258+914-914\\
&= 914(1000+1)-(914-258)\\
&= 914\times1001-(914-258)
\end{aligned}
$$

914×1001显然是7，11和13的倍数。而914－258＝656不是7，11和13的倍数，故914258不能被7，11和13整除．又如208824525，我们从208824－525＝208299，299－208＝91，

91＝7 ×13，故208824525是7和13的倍数，但不是 11 的倍数。于是我们有下面的准则：把一个数自右至左每三位分一小节，最左边的一节可能是一个、二个或三个数字，由左边的各节减去最右边的一节，对其差重复上面的过程，直至为三位数为止（也可能是一位数或两位数）．若其差是7，11或13的倍数，则此数有质因数7，11或13．应该注意的是，在检验的过程中，若只剩下两节，就应该用数字大的一节减去数字小的一节．这样，就不会出现负数．

最后说一下能被质数37整除的准则．这个准则是将数自右至左按每三个数字分为一节．若各节的和能被37整除，那么整个数也能被37整除．其理论根据是999能被 37 整除，即1000 及其各次幂被37除时余数为1．如2′099′195，各节的和为 2 ＋99＋195＝296，296为37的倍数，故2099195是37的倍数．

下面举出几个例子：

1．找出两个两位数，使其乘积等于1980．

解

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1\,9\,8\,0 \\ \hline 2 & 9\,9\,0 \\ \hline 3 & 4\,9\,5 \\ \hline 3 & 1\,6\,5 \\ \hline 5 & 5\,5 \\ \hline & 1\,1 \end{array}$$

∴　$1980=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11$

显然各因数的配合有如下六种：

$(2\cdot11)\cdot(2\cdot3^2\cdot5)$；　　$(3\cdot11)\cdot(2^2\cdot3\cdot5)$；

$(2^2\cdot11)\cdot(3^2\cdot5)$；　　$(5\cdot11)\cdot(2^2\cdot3^2)$；

$(2\cdot3\cdot11\cdot)(2\cdot3\cdot5)$；　　$(3^2\cdot11)\cdot(2^2\cdot5)$．

故找出的两位数有下面六对：

22×90；　33×60；　44×45；

55×36；　66×30；　99×20。

2．两个数之积为492，其中一个在20和 80 之间，求这两个数．

解

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4\ 9\ 2 \\ \hline 2 & 2\ 4\ 6 \\ \hline 3 & 1\ 2\ 3 \\ \hline & \ \ 4\ 1 \end{array}$$

∴　$492=41\times12$。

即这两个数为41和12．

3．将下面的分数约分　$\dfrac{116690151}{427863887}$　．

解　分子的各位数字之和为

$$1+1+6+6+9+0+1+5+1=30,$$

∴　分子有质因数3，故

$116690151=3\times38896717$

将分母自右至左两位一组，

即　$4'27'86'38'87$．其各组数字之和为

$$4+27+86+38+87=242,$$

对242有 $2+42=44$，显然44为11的倍数，

故分母有质因数11，

∴　$427863887=11\times38896717$，

$$\therefore \quad \frac{116690151}{427863887}=\frac{3\times 38896716}{11\times 38896716}=\frac{3}{11}.$$

4．求出能被11整除的最小六位数，其左起第一个数字必须是7，其它各位数字均不相同。

解　前五位数应该是70123，设个位数字为x，因为此六位数是11的倍数，故奇位数字之和与偶位数字之和应该相等，故

$$x+2+0=3+1+7,$$

$$\therefore \quad x=9,$$

∴　所求的能被11整除的最小六位数应为701239。

算术基本定理

前面已经说过，任何一个自然数都能分解成质因数的连乘积．那么我们要问：任何一个自然数的分解式是唯一的吗？这个事实是肯定的。通常我们称它为算术基本定理。它可表述为：若不计质因数的次序，则只有一种方法可以把一个大于1的自然数分解成质因数的连乘积。若把相同的质因数合并成它的幂，那么任何一个大于1的自然数a可表述为：

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n},\ n\geqslant 1\cdots\cdots \quad ①$$

这里的$p_1, p_2, \cdots, p_n$是各不相同的质数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$都是正整数。例如1980就可以分解成

$$1980=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

我们称①式为自然数a的质数分解式，或其标准分解式。当然②式就是1980的标准分解式。这个定理的证明，请参考有关数论的专著。

算术基本定理是与质数有关的一个重要问题，因为它

在数论中是相当重要的。所以才称它为算术基本定理。它表征了我们所研究的算术的基本特征。那么，难道能够有着一种算术，在它里面，一个数的所谓标准分解式就不是唯一的吗？原来这是可能的，因为确实存在着一种数系，将它里面的数分解成不可分解的因子，它的方法不是唯一的，而要分解成质因子也不是永远可分的。诚然，这种数系是相当复杂的，所以要在此地讨论它还不可能。

$T(a)$和$S(a)$

由上节，我们知道：一个自然数，可以分解成质因数的连乘积，即可以找到它的唯一的标准分解式，在标准分解式里，是一些质数的幂的连乘积。如果我们只考虑因数，而不计较其因数是否为质数，那么一个数究竟有多少个因数呢？

我们研究一个不大的数字720，它的标准分解式为

$$720=2^4\cdot3^2\cdot5$$

若将其写成$2^{\beta_1}\cdot3^{\beta_2}\cdot5^{\beta_3}$，让$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$互相独立地通过$\beta_1=0$，1，2，3，4；$\beta_2=0$，1，2；$\beta_3=0$，1。则720的约数依次为1，2，4，8，16，3，6，12，24，48，9，18，36，72，144，5，10，20，40，80，15，30，60，120，240，45，90，180，360，720共30个。

难道就这样去求720的因数的个数吗？为此，我们介绍一个数论函数$T(a)$，$T(a)$表示a的因数的个数，对720有

$$T(720)=30$$

一般地，若$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$，

则 $T(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)=\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+1)$

符号 $\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+1)$ 为连乘积的符号，它的意义正如它的左式．由排列的知识不难理解上面的表达式．事实上，标准分解式里的指数 α_1 有 α_1+1 个不同的变化，α_2 有 α_2+1 个不同的变化，α_n 有 α_n+1 个不同的变化，由乘法原理可知，共有

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$$

个不同的因数，即

$$T(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n})=\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+1).$$

由此可以很容易地算出 $720=2^4\cdot3^2\cdot5$ 有

$$T(2^4\cdot3^2\cdot5)=(4+1)(2+1)(1+1)=30$$

个不同的因数，而 1980 有

$$T(2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11)=(2+1)(2+1)(1+1)(1+1)=36$$

个不同的因数．

那么 $S(a)$ 又是什么意思呢？

我们用 $S(a)$ 表示 a 的因数的和，故 16 的因数的和为

$$S(16)=1+2+4+8+16=31.$$

12的因数和为

$$S(12)=1+2+3+4+6+12=28.$$

那么 1980 和 720 的因数之和为多少呢？这就需要我们去探求 $S(a)$ 的规律．

若 $a=p^{\alpha}$，则