◎ 主编　李大治　丁　勇

# 医用高等数学

YIYONG GAODENG SHUXUE

东南大学出版社

# 医用高等数学

主　编　李大治　丁　勇
副主编　张　勤　孙文娴

东南大学出版社
·南京·

## 内容提要

本书包括一元函数和多元函数的微积分学、微分方程、概率论、数理统计、模糊数学和线性代数初步。

本书注重数学和医学的结合，具有"医用"高等数学的特色。

本书可作为医学院校本科各专业、研究生和进修生的教材，也可作为医学科研人员的参考书。同时，本书叙述清晰、语言流畅，便于读者自学。

**图书在版编目(CIP)数据**

医用高等数学/李大治，丁勇主编；张勤，孙文娴编.
南京：东南大学出版社，2001.6
ISBN 7-81050-805-9

Ⅰ.医…　Ⅱ.①李…②丁…③张…④孙…
Ⅲ.医学：应用数学　Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第039904号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号　邮编210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销　江苏省地质测绘院印刷厂印刷
开本：850mm×1168mm 1/32　印张：17.75　字数：461千字
2001年8月第1版　2004年6月第3次印刷
印数：9501～11000　总定价：24.00元(全套两册)

(凡因印装质量问题，可直接向发行科调换，电话：025－83792327)

# 前　　言

本书是由南京医科大学、东南大学医学院和南通医学院的数学同仁联合撰写的。

本书的内容包括一元函数和多元函数的微积分学、微分方程、概率论、模糊数学和线性代数初步。每章都配备了适量的习题，书末给出了参考答案，还出版了配套的“习题解答”。

本书可作为医学院校本科各专业、研究生和进修生的教材。教学中，可根据各专业的需要，对内容作适当的取舍。本书也可作为医学院校的教师和医务工作者的参考书。

本书在注重数学的严谨性的同时，也注重数学和医学的结合，力求具有“医用”高等数学的特色。希望本书在使读者掌握一定的高等数学知识的同时，也使读者学到一些利用数学工具解决医学问题的方法。

参加本书撰写工作的，除主编、副主编外，还有陈净词、郑宇、张晖等老师。在本书的撰写过程中，得到很多有关方面同志的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中的缺点甚至错误在所难免，敬请读者不吝赐教。

编者

2001 年 3 月

# 目 录

第一章 函数、极限与连续 …………………………………… (1)
§1.1 函数 …………………………………………… (1)
§1.2 极限 …………………………………………… (5)
§1.3 无穷小量与无穷大量…………………………… (15)
§1.4 函数的连续性…………………………………… (17)
习题一 ……………………………………………… (23)
第二章 导数与微分 ……………………………………… (29)
§2.1 导数的概念……………………………………… (29)
§2.2 导数的基本公式与运算法则…………………… (34)
§2.3 高阶导数………………………………………… (47)
§2.4 导数的应用……………………………………… (49)
§2.5 微分……………………………………………… (64)
习题二 ……………………………………………… (71)
第三章 不定积分 ………………………………………… (75)
§3.1 原函数与不定积分的概念……………………… (75)
§3.2 不定积分的性质和基本公式…………………… (77)
§3.3 换元积分法……………………………………… (81)
§3.4 分部积分法……………………………………… (89)
§3.5 积分表的使用…………………………………… (92)
习题三 ……………………………………………… (94)
第四章 定积分 …………………………………………… (97)
§4.1 定积分的概念…………………………………… (97)
§4.2 定积分的计算 ………………………………… (103)
§4.3 定积分的两个积分法则 ……………………… (106)

§4.4　定积分的应用 …………………………… (109)
§4.5　定积分的近似计算 ………………………… (114)
§4.6　广义积分 ……………………………… (119)
习题四……………………………………… (122)
**第五章　微分方程**……………………………… (125)
§5.1　微分方程的基本概念 ……………………… (125)
§5.2　一阶微分方程 …………………………… (128)
§5.3　二阶微分方程 …………………………… (136)
§5.4　拉普拉斯变换 …………………………… (149)
§5.5　应用拉普拉斯变换求解常系数线性微分方程(组)
……………………………………………… (155)
§5.6　医药学中的数学模型 ……………………… (158)
习题五……………………………………… (164)
**第六章　多元函数微积分**…………………………… (168)
§6.1　多元函数 ……………………………… (168)
§6.2　偏导数与全微分 ………………………… (175)
§6.3　多元复合函数的求导法则 ………………… (183)
§6.4　多元函数的极值 ………………………… (185)
§6.5　最小二乘法 ……………………………… (188)
§6.6　二重积分 ……………………………… (192)
习题六……………………………………… (199)
**第七章　概率论**………………………………… (205)
§7.1　基本运算法则 …………………………… (205)
§7.2　随机事件及其概率 ……………………… (210)
§7.3　概率计算的基本公式 ……………………… (217)
§7.4　随机变量及其概率分布 …………………… (232)
§7.5　随机变量的数字特征 ……………………… (247)
习题七……………………………………… (265)
**第八章　线性代数初步**…………………………… (267)

§8.1 行列式 …………………………………… (267)
§8.2 矩阵 …………………………………… (277)
§8.3 逆矩阵 …………………………………… (282)
§8.4 矩阵的初等变换 …………………………………… (285)
§8.5 线性方程组 …………………………………… (290)
习题八…………………………………… (302)
**第九章 模糊数学**…………………………………… (308)
§9.1 普通集合 …………………………………… (308)
§9.2 模糊集合 …………………………………… (312)
§9.3 模糊关系 …………………………………… (320)
§9.4 综合评判 …………………………………… (331)
§9.5 模糊聚类分析 …………………………………… (339)
§9.6 模式识别的模糊集方法 …………………………………… (347)
习题九…………………………………… (351)
**附表一 简明不定积分表**…………………………………… (354)
**附表二 拉普拉斯变换表**…………………………………… (362)
**附表三 泊松分布表**…………………………………… (364)
**附表四 标准正态分布表**…………………………………… (368)
**附录五 习题参考答案**…………………………………… (371)
**参考文献**…………………………………… (391)

# 第一章　函数、极限与连续

函数是微积分学最主要的研究对象.极限是人们从有限中了解无限,从近似中得到精确,从量变中认识质变的一种数学理论和方法,它深化了人们对客观世界的认识.极限方法是微积分学的基本研究方法.本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及有关极限运算的一些方法.

## §1.1　函　　数

### 一、函数的概念

现实世界中各种不同的变化着的事物不是孤立的,而是相互联系、相互制约的,因此我们不但要研究事物的量的变化,更重要的是要研究各个变量之间的相互依赖关系,这种关系反映了事物的内在联系和内部规律.函数概念正是这种变量间依赖关系的抽象和概括.先考察医药生物学中的几个例子.

**例 1.1.1**　外界环境温度对人体代谢率的影响可表达如表 1－1所示 .

**表 1－1**

| 环境温度(℃) | …4 | 10 | 20 | 30 | 38… |
|---|---|---|---|---|---|
| 代谢率(kcal/(h·m$^2$)) | …60 | 44 | 40 | 40.5 | 54… |

其中每一对数值可以在直角坐标系中找到相应的点,于是便得到 $A,B,C,D,E$ 5 点,见图 1－1.医学中常用折线把它们连起来,这

时环境温度和代谢率两个变量之间的相互影响关系从图中便一目了然了.

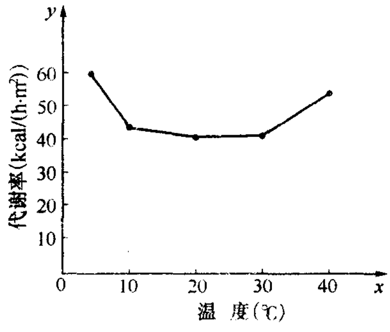


图 1－1

**例1.1.2** 设某种细菌的繁殖个数 $N$ 与时间 $t$ 呈指数生长规律

$$N = N_0 e^{\frac{t}{T_c}},$$

其中 $N_0$ 为繁殖开始时细菌数, $T_c$ 为生长周期,均为正的常数.

上面两个例子中的每个问题都包含着两个变量和一个确定的对应关系,尽管这个对应关系的表达方式各有不同(如例 1.1.1 中由表格或图像表示,例 1.1.2 中由公式表示),但都指明了两个变量间相互对应的具体内容.这种两个变量间的对应关系就是函数概念的实质.

**定义1.1** 设 $x$ 与 $y$ 是某个变化过程中的两个变量,如果对于变量 $x$ 的每一个允许取的值,变量 $y$ 依照一定的对应关系,有惟一确定的值与之对应,则称变量 $y$ 为变量 $x$ 的函数,记作

$$y = f(x),$$

其中 $x$ 称为自变量, $y$ 称为因变量.自变量所有允许取的值的集合称为函数的定义域.与自变量的值相对应的因变量的值称为函数值,函数值的全体称为函数的值域.

关于函数定义的几点说明：

(1) 确定函数的要素有两条：一是对应规律；二是函数的定义域.要确定两个函数相同，必须保证这两个要素相同.例如 $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x, x\in(-\infty,+\infty)$ 是相同的函数.又如 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，虽然对应规律相同，但定义域不同，因此两个函数是不相同的.

(2) 关于函数的表示.在函数定义中，对函数的表示方法未加任何限制，它可以用解析式表达，也可通过表格、图示或其他方式表达.

(3) 函数定义域的确定.当 $x$ 取 $x_0$ 时，函数有确定的对应值 $f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有定义.因此，函数的定义域就是使函数有定义的自变量取值的全体.

**例 1.1.3** 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin\pi x}$ 的定义域.

**解** 使该函数有定义的 $x$ 值须满足

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0 \\ \sin\pi x\neq 0 \end{cases}$$

即 $$x\geqslant -1 \text{ 且 } x\neq n(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

或用区间表示为 $(n,n+1)(n=-1,0,1,2,\cdots)$.

**例 1.1.4** 有人在一项研究中测得的血液中胰岛素浓度 $C(t)$(单位 /ml) 随时间 $t$(min) 的变化数据，建立如下经验公式：

$$C(t)=\begin{cases} t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5 \\ 25e^{-k(t-5)}, & t>5 \end{cases}$$

其中 $k$ 为常数.

这里，函数 $C(t)$ 的表达式与我们通常遇到的函数表达式有所不同，其函数关系是用两个解析式表示的.有时，还会遇到用两个以上解析式表示的函数，这种在函数定义域的不同部分用不同的解析

式表示的是一个函数,它称为分段函数.在求分段函数的函数值时,必须将自变量的值代入它所对应的解析式计算.例 1.1.4 中,函数的定义域为$[0,+\infty)$,当$t=2$时,对应的浓度$C(2)=2\times(10-2)=16$,当$t=10$时,对应的浓度$C(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$.

## 二、复合函数

**定义 1.2** 设$y=f(u)$,而$u=\varphi(x)$,且$x$在函数$\varphi(x)$的定义域或其一部分上取值时所对应的$u$值,函数$y=f(u)$是有定义的,则称$y$是$x$的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中$u$称为中间变量.

例如,$y=\sin u$,$u=\sqrt{x}$,经复合可以得到$y$关于$x$的复合函数$y=\sin\sqrt{x}$.

以上是两个函数的"嵌套"关系构成的复合函数,不难将其推广到有限个函数的层层"嵌套"关系构成的复合函数.例如,$y=\lg u$,$u=1+\sqrt{v}$,$v=1+x^2$,可以复合成$y$关于$x$的复合函数$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$.

但须注意,不是任意两个函数都可以复合的,例如,$y=\sqrt{1-u^2}$,$u=x^2+2$就不能复合成$y=\sqrt{1-(x^2+2)^2}$,因为$u=x^2+2$的值域为$[2,+\infty)$与$y=\sqrt{1-u^2}$的定义域$[-1,1]$的交集是空集,因此不能复合.

将若干个简单函数"复合"只是一种层层"代入"的运算.我们还应掌握把一个复杂的复合函数分解为若干个简单的函数.例如,$y=(\arctan e^x)^2$是由$y=u^2$,$u=\arctan v$,$v=e^x$复合而成.这种从外到里层层分解,以后的微分运算中经常用到.

## 三、初等函数

中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三

角函数，统称为基本初等函数.

**定义 1.3** 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的由一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如，多项式函数 $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$，有理分式函数 $y = \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$，以及 $y = \sqrt{\cot 3x} + e^{1+x}$ 等都是初等函数. 但须注意：分段函数不是初等函数.

# §1.2 极　　限

极限是描述在自变量的某个变化过程中，对应的函数值的变化趋势.

## 一、数列极限

因为数列是以自然数为自变量的一种特殊函数，它的自变量 $n$ 是离散取值的，$n = 1,2,\cdots$. 因此对数列 $\{u_n\}$，只需讨论当自变量 $n$ 无限增大时，因变量 $u_n$ 的变化趋势.

**例 1.2.1** 观察如下三个数列：

$$(1)\ 2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots$$

$$(2)\ 0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,1-\frac{1}{n},\cdots$$

$$(3)\ 0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots,1+\frac{(-1)^n}{n},\cdots$$

在平面直角坐标系中可以直观地看到，当 $n$ 无限增大时，第(1)小题中的 $u_n$ 从 1 的上方无限趋近于 1，第(2)小题中的 $u_n$ 从 1 的下方无限趋近 1，而第(3)小题中的 $u_n$ 从 1 的上、下方跳跃着无限趋近于 1. 三个数列都是以 1 为极限，即随着 $n$ 的无限增大，$|u_n - 1|$ 趋近于 0.

**定义 1.4** 对于数列$\{u_n\}$,如果存在一个常数$A$,当$n$无限增大时,数列$\{u_n\}$中的项$u_n$无限趋近于$A$,则把常数$A$称为数列$\{u_n\}$的极限,记为

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = A \text{ 或 } u_n \to A \quad (n \to +\infty)$$

观察当$n\to+\infty$时,数列$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$,无极限;数列$0,1,0,1,\cdots,\frac{1+(-1)^n}{2},\cdots$,不断地取0与1两个值,不趋近于某一常数$A$,因此无极限.

## 二、函数的极限

对于函数$y=f(x)$,其自变量$x$是连续变化的,$x$的变化趋势通常有两种情况:一种是$|x|\to+\infty$;另一种是$x\to x_0$($x_0$是常数).下面就这两种情况给出函数极限的定义.

**定义 1.5** 如果自变量$x$的绝对值无限增大时,函数$f(x)$无限趋近于一个常数$A$,则称$A$为当$x\to\infty$时$f(x)$的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \quad (x \to \infty),$$

这里$x\to\infty$,表示$|x|$无限增大,它包含$x$总取正值无限增大,即$x\to+\infty$和$x$总取负值$|x|$无限增大,即$x\to-\infty$的情况.

从几何上看,极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,表示只要$|x|$无限地增大,曲线$y=f(x)$上的对应点与直线$y=A$的距离$|f(x)-A|$便可以任意地小,即$|f(x)-A|\to 0$,如图1-2所示.

如果仅考虑$x\to+\infty$或$x\to-\infty$,那么类似地有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$的定义.

结合几何图形观察下面几个函数的极限.

**例 1.2.2** (1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$;

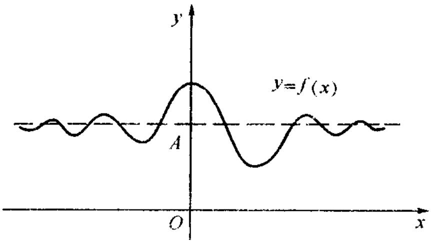


**图 1－2**

$$(3)\ \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

如图 1－3,图 1－4,图 1－5 所示.

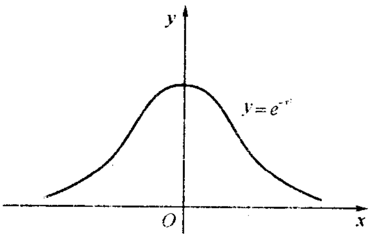


**图 1－3**

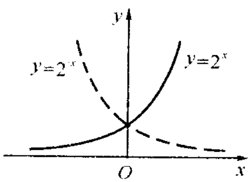


**图 1－4**

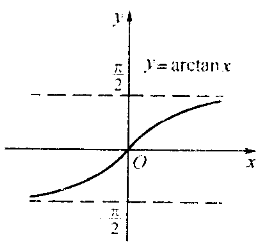


**图 1－5**

**例 1.2.3** 设 $y=\sin x$,当 $x \to \infty$ 时,$\sin x$ 的取值在 $+1$ 与

$-1$ 之间摆动,不趋近任意常数,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

**定义1.6** 设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点附近有定义(在 $x_0$ 点可以无定义),如果当 $x$ 无论以怎样的方式趋近于 $x_0$ 时($x\neq x_0$),函数 $f(x)$ 都趋近于常数 $A$,则称 $A$ 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或} f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

对定义 1.6 的两点说明:

(1) $x\to x_0$ 的方式是任意的,即 $x$ 可以从 $x_0$ 的左侧趋近于 $x_0$,记作 $x\to x_0^-$;也可以从 $x_0$ 的右侧趋近于 $x_0$,记作 $x\to x_0^+$;还可以左右跳跃趋近于 $x_0$. 如果 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 有极限 $A$,是指 $x$ 无论以哪种方式趋近于 $x_0$,$f(x)$ 都无限趋近于 $A$.

(2) 当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在 $x_0$ 点是否有定义,以及 $x_0$ 点的函数值 $f(x_0)$ 无关. 因为我们关心的是函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近的变化趋势,而不是 $f(x)$ 在 $x_0$ 点取值的情况.

从几何上看,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,表示只要 $x$ 无限接近于 $x_0$(但 $x\neq x_0$),曲线 $y=f(x)$ 上的对应点与直线 $y=A$ 的距离 $|f(x)-A|$ 便可以任意地小,即 $|f(x)-A|\to 0$,如图 1 - 6 所示.

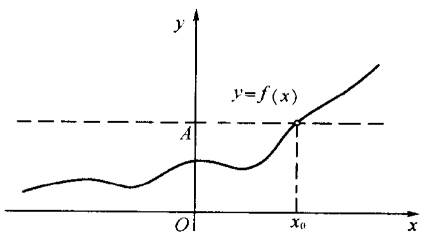


**图 1 - 6**

容易看出,常数 $C$ 的极限就是自身,即 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

**例 1.2.4** 考察函数 $f(x)=x+1$,当 $x\to 1$ 时的极限,因为

$|(x+1)-2|=|x-1|\to 0(x\to 1)$,所以

$$\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

这里,当 $x\to 1$ 时,$f(x)$ 的极限值恰好等于函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 时的函数值,即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

**例 1.2.5** 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

当 $x\to 1$ 时的极限.

**解** 因为 $x\neq 1$ 时,$f(x)=x+1$,所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

这里,极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在,但不等于在 $x=1$ 点的函数值 $f(1)=1$,如图 1 - 7 所示.

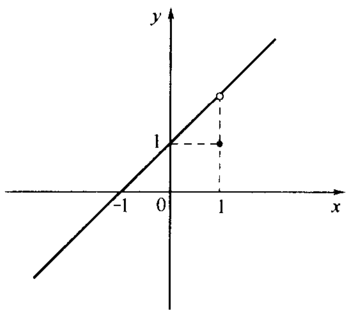


**图 1 - 7**

**例 1.2.6** 考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,当 $x\to 1$ 时的极限.

**解** 虽然在 $x=1$ 处函数无定义,但 $x\to 1(x\neq 1)$ 时,可以约去不为零的因子 $x-1$,这样,在 $x=1$ 处函数虽然没有定义,但 $x\to 1$ 时极限却存在:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

**例 1.2.7** 考察函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to0$ 时的极限.

**解** 当 $x$ 越来越接近于零时,对应的函数值 $\sin\dfrac{1}{x}$ 越来越频繁地在 $-1$ 与 $1$ 之间振动,并不无限地接近一个确定的数,所以 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在(如图 1-8).

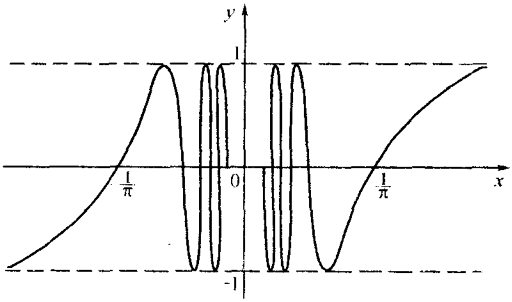


**图 1-8**

如果只考虑 $x$ 从 $x_0$ 的一侧趋近 $x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限,则称为单侧极限.

当 $x$ 从 $x_0$ 的左侧($x<x_0$)趋近于 $x_0$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 $A$,则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

类似地有

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A,$$

称为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限.

可以证明,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是当 $x\to x_0$ 时,左、