高考

SHUXUE 数学 SHUXUE

能力题思路与解法

蔡玉书 主编

南京师范大学出版社

高考

SHUXUE **数学** SHUXUE

能力题

思路与解法

高考数学能力题
思路与解法

主编　蔡玉书

南京师范大学出版社

高考数学能力题思路与解法
蔡玉书　主编
*
南京师范大学出版社出版发行
（江苏省南京市宁海路 122 号　邮编 210097）
江苏省新华书店经销　丹阳练湖印刷厂印刷
*
开本 850×1168毫米　1/32　印张 15.125　字数 378 千字
1997 年 7 月第 1 版　1997 年 7 月第 1 次印刷
印数 1　20000
ISBN 7-81047-082-5/G·53
定价：12.00 元

编者的话

一年一度的高考牵动着千家万户，牵动着每一个考生，也牵动着从事教学和研究的教师。高考是竞争激烈的选拔性考试，在高考中对每个考生数学水平的评价，要看其掌握数学知识的多寡；更要看其运用数学知识和方法解决问题的能力。我国的高考数学试题从 1983 年以来题型已趋于稳定，试题由客观性命题（选择题、填空题）及主观性命题（解答、证明题）组成。我们把着重考查考生数学能力的命题称为“能力题”，高考得分的高低很大程度上取决于这类题的解答。为系统地研究和掌握历届高考试题的冷热点、变化情况，减少复习迎考的盲目性，进行针对性复习训练，我们将历年的高考能力题进行分类，并对每道试题给出若干思路与解法，撰写了《高考数学能力题思路与解法》一书。书中若干解法不同于国家教委颁布的参考答案。本书集众家之长为一体，是教师研究高考、学生复习迎考不可多得的参考文献。在一个题目的众多解法中自然有优劣之分，正如爱因斯坦所讲，有的方法“优雅”，有的方法“丑陋”，希望读者抱着学习数学、研究数学的观点去读本书，从中受到裨益，作出更多更好的优雅解法。愿本书为广大考生赢得时间，赢得成功。

由于时间有限，疏漏之处在所难免，望广大师生指正。

编者

1996.10

目　录

第一章　三角……………………………………………（1）

第二章　集合与函数 ………………………………（53）

第三章　不等式 ……………………………………（81）

第四章　数列、极限、数学归纳法………………（106）

第五章　复数………………………………………（170）

第六章　直线和平面………………………………（225）

第七章　多面体和旋转体…………………………（295）

第八章　解析几何…………………………………（314）

第一章　三角

例 1. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，求 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ 的值。（1990 年高考题）

思路一：从和差化积出发，求出 $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}$，再利用万能公式求 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$。

解法一：由和差化积公式得

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3},$$

两式相除得　$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}$，

由万能公式得　$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\dfrac{24}{7}$。

思路二：利用公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 及 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 分别将题设条件相乘、平方相减，再运用和差化积公式。

解法二：∵ $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$，　　(1)

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，　　(2)

(1)×(2)得：　$\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\sin2\alpha+\sin2\beta)=\frac{1}{12}$，

和差化积得：　$\sin(\alpha+\beta)[1+\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1}{12}$，　　(3)

$(2)^2-(1)^2$ 得：　$2\cos(\alpha+\beta)+\cos2\alpha+\cos2\beta=\frac{7}{144}$，

和差化积得： $\cos(\alpha+\beta)[1+\cos(\alpha-\beta)]=\frac{7}{288}$， (4)

(3)式与(4)式相除得： $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{24}{7}$。

思路三：利用角变换 $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$ 代入原式，运用和角公式展开，列出关于 $\sin(\alpha+\beta)$、$\cos(\alpha+\beta)$的方程组，解出 $\sin(\alpha+\beta)$和 $\cos(\alpha+\beta)$，从而求出 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$。

解法三：∵ $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，

∴ $\sin[(\alpha+\beta)-\beta]+\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{1}{4}$，

展开得 $\sin(\alpha+\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)-\cos(\alpha+\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{1}{4}$，

∴ $\frac{1}{3}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}$， (1)

同理，$\cos[(\alpha+\beta)-\beta]+\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{1}{3}$，

$\cos(\alpha+\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)+\sin(\alpha+\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{1}{3}$，

$\frac{1}{3}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$， (2)

解(1)、(2)得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{24}{25}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}$，

从而： $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{24}{7}$。

注：列出方程(1)可移项得：

$\frac{1}{3}\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}[1+\cos(\alpha+\beta)]$ 即 $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}$，

运用万能公式得 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{24}{7}$。

思路四：利用辅助角公式 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$
$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$。

解法四：由题设条件得

$4(\sin\alpha+\sin\beta)=3(\cos\alpha+\cos\beta)$，

将上式变形为

$$\frac{4}{5}\sin\alpha-\frac{3}{5}\cos\alpha=\frac{3}{5}\cos\beta-\frac{4}{5}\sin\beta, \tag{1}$$

设 $\cos\varphi=\frac{4}{5},\sin\varphi=\frac{3}{5}$, (2)

将(2)式代入(1)式得：$\sin(\alpha-\varphi)=\sin(\varphi-\beta)$,

于是 $\alpha-\varphi=(2k+1)\pi-(\varphi-\beta),(k\in Z)$

或 $\alpha-\varphi=2k\pi+(\varphi-\beta),(k\in Z)$

若 $\alpha-\varphi=(2k+1)\pi-(\varphi-\beta)(k\in Z)$，则 $\alpha=\beta+(2k+1)\pi(k\in Z)$。于是 $\sin\alpha=-\sin\beta$，即 $\sin\alpha+\sin\beta=0$，这与已知条件 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$ 矛盾，由此可知 $\alpha-\varphi=2k\pi+(\varphi-\beta)(k\in Z)$ 即 $\alpha+\beta=2\varphi+2k\pi(k\in Z)$。

由(2)得 $\quad \mathrm{tg}\varphi=\frac{3}{4}$,

所以 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}2\varphi=\frac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}$。

思路五：利用复数乘法公式 $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ 其中 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,

解法五：令 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,z_2=\cos\beta+i\sin\beta$

$z_1z_2=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$,

又 $|z_1|=|z_2|=1$，∴ $z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=1$。

$\bar{z}_1=\frac{1}{z_1},\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$,

$z_1+z_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}i,\overline{z_1+z_2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}i$,

$$z_1z_2=\frac{z_1+z_2}{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}=\frac{z_1+z_2}{\overline{z_1+z_2}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}i}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}i}=\frac{4+3i}{4-3i}=\frac{7+24i}{25},$$

即 $\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$,

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25},\sin(\alpha+\beta)=\frac{24}{25}$,

从而 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{24}{7}$。

解法六：设 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,z_2=\cos\beta+i\sin\beta,z=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$，则 $z=z_1z_2$。

由已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$ 得：

$\frac{z_1{}^2-1}{2iz_1}+\frac{z_2^2-1}{2iz_2}=\frac{1}{4}$,

通分得 $\frac{1}{2iz}(z-1)(z_1+z_2)=\frac{1}{4}$,　　(1)

又由 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，得 $\frac{z_1^2+1}{2z_1}+\frac{z_2^2+1}{2z_2}=\frac{1}{3}$,

通分得 $\frac{2z}{1}(z+1)(z_1+z_2)=\frac{1}{3}$,　　(2)

将(1)、(2)两式相除得 $\frac{z-1}{i(z+1)}=\frac{3}{4}$,　　(3)

解此式得　$z=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$，于是　$\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25},\sin(\alpha+\beta)=\frac{24}{25}$,

由此得　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{24}{7}$。

注：① 由 $z_1+z_2=(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}i$ 代入(1)式即可解出 $z=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$；②(3)式实质上意味着 $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}$。

思路六：视点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$ 为单位圆上的点，充分利用图形的几何意义。

解法七：如图 1—1，不妨设 $0\leqslant\alpha<\beta<2\pi$，且点 A 的坐标是 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，点 B 的坐标是 $(\cos\beta,\sin\beta)$，则点 A,B 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上，连结 AB，若 C 是 AB 的中点，由题设知 C 的坐标是 $(\frac{1}{6},\frac{1}{8})$。

连结 OC，于是 $OC\perp AB$，若设 D 的坐标是(1，0)，再连结 OA、OB，则有 $\angle DOA=\alpha$，$\angle DOB=\beta$，$\angle DOC=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\pi$，

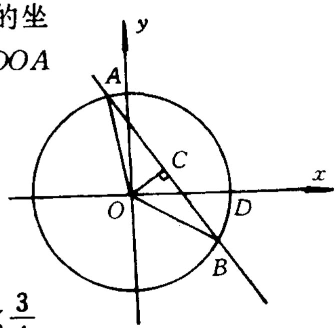

图 1—1

从而 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}\angle DOC=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{3}{4}$，

所以 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}$

$=\dfrac{24}{7}$。

注：一般地，设 $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=a,\\ \cos\alpha+\cos\beta=b,\end{cases}(ab\neq 0)$ 可得：

（Ⅰ） $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a}{b}$，$\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{a^2+b^2-2}{4}$；

（Ⅱ） $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$，$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$；

（Ⅲ） $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2)$，

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{(a^2+b^2)^2-4a^2}{4(a^2+b^2)}$，

$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{(a^2+b^2)^2-4b^2}{4(a^2+b^2)}$，

$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{(a^2+b^2)^2-4b^2}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$，

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{8ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$，

$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{8ab}{(a^2+b^2)^2-4b^2}$；

（Ⅳ） $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{4a}{a^2+b^2+2b}$，

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{a^2+b^2-2b}{a^2+b^2+2b},\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{4a}{a^2+b^2-2b}$$

等结论。

以上结论请读者给出证明。

例 2. 求 $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}117^\circ-\operatorname{tg}243^\circ-\operatorname{ctg}351^\circ$的值(1982 年高考题)

思路一:利用诱导公式化为锐角三角函数,将互余角的函数值集中在一起,通过切化弦、和差化积化简求值。

解法一:原式$=\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$

$=(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}81^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}63^\circ)=(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}27^\circ)$

$$=\frac{1}{\sin9^\circ\cos9^\circ}-\frac{1}{\sin27^\circ\cos27^\circ}=\frac{2}{\sin18^\circ}-\frac{2}{\sin54^\circ}$$

$$=\frac{2(\sin54^\circ-\sin18^\circ)}{\sin18^\circ\sin54^\circ}=\frac{4\cos36^\circ\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}=4。$$

思路二:集项后用万能公式、和差化积公式化简。

解法二:原式$=(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}81^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}63^\circ)$

$$=(\operatorname{tg}9^\circ+\frac{1}{\operatorname{tg}9^\circ})-(\operatorname{tg}27^\circ+\frac{1}{\operatorname{tg}27^\circ})=\frac{\operatorname{tg}^2 9^\circ+1}{\operatorname{tg}9^\circ}-\frac{\operatorname{tg}^2 27^\circ+1}{\operatorname{tg}27^\circ}$$

$$=\frac{2}{2\operatorname{tg}9^\circ/(\operatorname{tg}^2 9^\circ+1)}-\frac{2}{2\operatorname{tg}27^\circ/(\operatorname{tg}^2 27^\circ+1)}=\frac{2}{\sin18^\circ}-\frac{2}{\sin54^\circ}$$

$$=\frac{2(\sin54^\circ-\sin18^\circ)}{\sin18^\circ\sin54^\circ}=\frac{4\cos36^\circ\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}=4。$$

思路三:化为锐角三角函数后,注意 $27^\circ-9^\circ=81^\circ-63^\circ=18^\circ$,利用两角差正切公式提出公因式 $\operatorname{tg}18^\circ$,余下的式子化为正弦、余弦,用两角和差的余弦公式化简求值。

解法三:原式$=\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$

$=(\operatorname{tg}81^\circ-\operatorname{tg}63^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}9^\circ)$

$=\operatorname{tg}(81^\circ-63^\circ)(1+\operatorname{tg}81^\circ\operatorname{tg}63^\circ)-\operatorname{tg}(27^\circ-9^\circ)(1+\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}9^\circ)$

$=\operatorname{tg}18^\circ(\operatorname{ctg}9^\circ\operatorname{ctg}27^\circ-\operatorname{tg}9^\circ\operatorname{tg}27^\circ)$

$$=\frac{\sin18^\circ}{\cos18^\circ}\cdot\frac{\cos^2 9^\circ\cos^2 7^\circ-\sin^2 9^\circ\sin27^\circ}{\sin9^\circ\sin27^\circ\cos9^\circ\cos27^\circ}$$

$$=\frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}\frac{\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{\frac{1}{2}\sin 18^\circ\cdot\frac{1}{2}\sin 54^\circ}=4。$$

注：本题也可先求出 $\sin 18^\circ$，按解法一代入，或用复数法解。

例 3. 求值：$\sin^2 20^\circ+\cos^2 80^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$。（1992 年高考文科题）

思路一：利用倍角公式、积化和差、和差化积公式降次消元。

解法一：$\sin^2 20^\circ+\cos^2 80^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$

$$=\frac{1-\cos 40^\circ}{2}+\frac{1+\cos 160^\circ}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 100^\circ-\sin 60^\circ)$$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos 160^\circ-\cos 40^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100^\circ-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[(\cos 160^\circ-\cos 40^\circ)+\sqrt{3}\sin 100^\circ]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(-2\sin 100^\circ\sin 60^\circ+\sqrt{3}\sin 100^\circ)=\frac{1}{4}。$$

思路二：利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及 $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ 构造对偶式列方程求之。

解法二：设 $A=\sin^2 20^\circ+\cos^2 80^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$，

$B=\cos^2 20^\circ+\sin^2 80^\circ-\sqrt{3}\cos 20^\circ\sin 80^\circ$，

$$则\begin{cases}A+B=2-\sqrt{3}\sin 60^\circ=\frac{1}{2},\\ A-B=\cos 160^\circ-\cos 40^\circ+\sqrt{3}\sin 100^\circ\\ =-2\sin 100^\circ\sin 60^\circ+\sqrt{3}\sin 100^\circ=0。\end{cases}$$

两式相加得 $A=B=\frac{1}{4}$。

思路三：考虑题中结构与余弦定理十分酷似，从而可构造三角形求解。

解法三：构造一个内角为 20°、10°、150°且外接圆直径为 1 的三角形，由正弦定理三角形三边为 $\sin 20^\circ$、$\sin 10^\circ$、$\sin 150^\circ$。再由余弦定理得

$$\sin^2 150^\circ=\sin^2 20^\circ+\sin^2 10^\circ-2\sin 20^\circ\sin 10^\circ\cos 150^\circ,$$

$\therefore\ \sin^2 20°+\sin^2 10°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°=\dfrac{1}{4}$,

即：$\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°=\dfrac{1}{4}$。

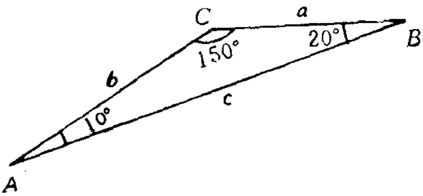

图 1—2

思路四：利用△ABC 中的恒等式：

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$；

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B+\cos C$。

取 A、B、C 为特殊值代入。（解略）

思路五：考虑到题中 $\sin 20°$ 与 $\cos 80°$的平等地位，采用平均值代换 $A+B=\sin 20°$，$A-B=\cos 80°$。

解法五：作对称变换 $\sin 20°=A+B$，$\cos 80°=A-B$，

则有：$A=\dfrac{\sin 20°+\cos 80°}{2}=\dfrac{\sin 20°+\sin 10°}{2}=\sin 15°\cos 5°$，

$B=\dfrac{\sin 20°-\cos 80°}{2}=\dfrac{\sin 20°-\sin 10°}{2}=\cos 15°\sin 5°$，

$\therefore$ 原式$=(A+B)^2+(A-B)^2+\sqrt{3}(A+B)(A-B)$

$=(2+\sqrt{3})A^2+(2-\sqrt{3})B^2$

$=\mathrm{ctg}15°(\sin 15°\cos 5°)^2+\mathrm{tg}15°(\cos 15°\sin 5°)^2$

$=\sin 15°\cos 15°=\dfrac{1}{2}\sin 30°=\dfrac{1}{4}$。

注：$2-\sqrt{3}=\mathrm{tg}15°$，$2+\sqrt{3}=\mathrm{ctg}15°$。

与例 3 类似，1995 年全国理科高考试题(22)题求值 $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50$，1991 年全国高中数学联赛题求值 $\cos^2 10°+\cos^2 50°-\sin 40°\sin 80°$，1987 年江苏省高中夏令营试题求值 $\cos^2 47°+\cos^2 73°+\cos 47°\cos 73°$等题都可按例 3 思路去解，这三道题读者可以仿例 3 练一练，另外这三道题外型上是 $a^2\pm ab+b^2$ 型，易联想公式 $a^3\pm b^3$，再逆用三倍角公式 $\sin^3\alpha=\dfrac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$可作如下解答：

$$\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$$
$$=\sin^2 20°+\sin^2 40°+\sin 20°\sin 40°$$
$$=\frac{\sin^3 20°-\sin^3 40°}{\sin 20°-\sin 40°}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}(3\sin 20°-\sin 60°)-\frac{1}{4}(3\sin 40°-\sin 120°)}{\sin 20°-\sin 40°}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}(\sin 20°-\sin 40°)}{\sin 20°-\sin 40°}=\frac{3}{4}。$$

如果联想 $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$ 也可按下法去解：

$$\sin^2 20°+\sin^2 40°+\sin 20°\sin 40°$$
$$=(\sin 20°+\sin 40°)^2-\sin 20°\sin 40°=(2\sin 30°\cos 10°)^2-\frac{1}{2}(\cos 20°-\cos 60°)=\cos^2 10°-\frac{1}{2}\cos^2 20°+\frac{1}{4}=\frac{1+\cos 20°}{2}-\frac{1}{2}\cos 20°+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{3}{4}。$$

例 4. 求 $\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°$的值。(1987 年高考题)

思路一：利用积化和差、和差化积公式。

解法一：$\sin 10°\sin 50°\sin 70°=\sin 10°\cdot\frac{1}{2}(\cos 20°-\cos 120°)$
$$=\frac{1}{2}\sin 10°(\cos 20°+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(\sin 30°-\sin 10°)+\frac{1}{4}\sin 10°$$
$$=\frac{1}{4}\sin 30°=\frac{1}{8}。$$

$$\therefore\ \sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}。$$

解法二：$\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°$
$$=\frac{1}{4}(\cos 20°-\cos 40°)(\cos 20°-\cos 120°)$$
$$=\frac{1}{4}(\cos 20°-\cos 40°)(\cos 20°+\frac{1}{2})$$
$$=\frac{1}{4}(\cos^2 20°-\cos 40°\cos 20°+\frac{1}{2}\cos 20°-\frac{1}{2}\cos 40°)$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1+\cos40^\circ}{2}-\frac{1}{2}\cos20^\circ-\frac{1}{2}\cos60^\circ+\frac{1}{2}\cos20^\circ-\frac{1}{2}\cos40^\circ)$$

$$=\frac{1}{16}。$$

类似于解法一也可将 $\sin10^\circ\sin50^\circ$或 $\sin10^\circ\sin70^\circ$先积化和差。

思路二:逆用二倍角公式。

解法三: $\sin10^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ=\frac{2\sin10^\circ\cos10^\circ\sin50\sin70^\circ}{2\cos10^\circ}$

$$=\frac{\sin20^\circ\cos20^\circ\sin50^\circ}{2\cos10^\circ}=\frac{\sin40^\circ\sin50^\circ}{4\cos10^\circ}=\frac{\sin40^\circ\cos40^\circ}{4\cos10^\circ}$$

$$=\frac{\sin80^\circ}{8\cos10^\circ}=\frac{1}{8},$$

$\therefore\ \sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ=\frac{1}{16}。$

解法四: $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ=\frac{1}{2}\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ$

$$=\frac{1}{4}\frac{2\sin20^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{2\sin20^\circ}=\frac{1}{16}\frac{\sin160^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{1}{16}。$$

思路三:构造对偶式列方程求之。

解法五:令 $x=\sin10^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$, $y=\cos10^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ$,

则 $xy=\sin10^\circ\cos10^\circ\sin50^\circ\cos50^\circ\sin70^\circ\cos70^\circ$

$$=\frac{1}{2}\sin20^\circ\cdot\frac{1}{2}\sin100^\circ\cdot\frac{1}{2}\sin140^\circ=\frac{1}{8}\sin20^\circ\sin80^\circ\sin40^\circ$$

$$=\frac{1}{8}\cos10^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ=\frac{1}{8}y。$$

$\because\ y\neq0$, $\therefore\ x=\frac{1}{8}$,

从而 $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ=\frac{1}{16}。$

思路四:构造三角形。

解法六:作底角为 20°的等腰$\triangle ABC$,过顶点 A 作两条直线交 BC 于 D、E,使 $\angle BAD=20^\circ$, $\angle DAE=40^\circ$,则 $\angle EAD=80^\circ$, $\triangle ABD$、$\triangle ADE$、$\triangle AEC$ 都是等腰三角形。

在$\triangle ABD$中$AB=2AD\cos20°$，

在$\triangle ADE$中$AD=2AE\cos40°$，

在$\triangle AEC$中$AE=2AC\cdot\cos80°$，

$\therefore AB=8AC\cos20°\cos40°\cos80°$。

$\because AB=AC$，

$\therefore \cos20°\cos40°\cos80°=\frac{1}{8}$，

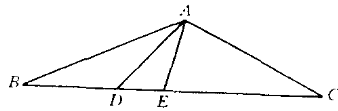

图 1—3

从而 $\sin10°\sin30°\sin50°\sin70°=\frac{1}{16}$。

思路五：运用三倍角公式$\cos3\theta=4\cos\theta\cos(60°-\theta)\cdot\cos(60°+\theta)$或$\sin3\theta=4\sin\theta\sin(60°-\theta)\sin(60°+\theta)$。

例 5. 求$\mathrm{tg}20°+4\sin20°$的值（1993 年高考试题）。

思路一：利用$60°=20°+40°$将$40°$拆成$60°-20°$代入直接展开。

解法一：$\mathrm{tg}20°+4\sin20°$

$$=\frac{\sin20°+4\sin20°\cos20°}{\cos20°}$$

$$=\frac{\sin20°+2\sin40°}{\cos20°}=\frac{\sin20°+2\sin(60°-20°)}{\cos20°}$$

$$=\frac{\sin20°+2(\sin60°\cos20°-\cos60°\sin20°)}{\cos20°}=2\sin60°=\sqrt{3}。$$

思路二：利用切化弦，再拆项和差化积。

解法二：$\mathrm{tg}20°+4\sin20°=\frac{\sin20°+2\sin40°}{\cos20°}$

$$=\frac{(\sin20°+\sin40°)+\sin40°}{\cos20°}=\frac{2\sin30°\cos10°+\sin40°}{\cos20°}$$

$$=\frac{\sin80°+\sin40°}{\cos20°}=\frac{2\sin60°\cos20°}{\cos20°}=2\sin60°=\sqrt{3}。$$

思路三：利用三倍角公式$\cos\alpha\cos(60°-\alpha)\cos(60°+\alpha)=\frac{1}{4}\cos3\alpha$或仿例 4 证法一、证法二进行。

解法三：$\mathrm{tg}20°+4\sin20°=\frac{\sin20°+2\sin40°}{\cos20°}$