第三版

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

5

第三版

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (5)/费定晖 周学圣编演 .—3 版 .—济南:山东科学技术出版社,2005.1

ISBN 7-5331-0103-0

Ⅰ.Б… Ⅱ.①费… ②周… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43956 号

Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(5)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

出版者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002 电话:(0531)2098088

网址:www.lkj.com.cn

电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn

发行者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002 电话:(0531)2098071

印刷者:济南申汇印务有限责任公司

地址:济南市王官庄 12 号

邮编:250022 电话:(0531)7966822

开本:850mm×1168mm 1/32

印张:18

字数:444 千

版次:2005 年 1 月第 3 版第 15 次印刷

印数:221001-229000

ISBN 7-5331-0103-0 O·9

定价:23.00 元

第三版前言

DISANBANQIANYAN

这套书自 1979 年出版发行以来，20 余年一直畅销不衰，读者称其为学习数学分析“不可替代”之图书，我们对此倍感欣慰。

本次第三版主要做了如下改动：

第一，修正了部分题目的解法，使其更加注重了科学性、规范性和简明性。

第二，改正了第二版的个别印刷错误。

第三，在文字上进行了些润色，力求文字更加准确。

第四，对版面和开本进行了调整，突出了时代感。

这次的修改得到山东科学技术出版社的大力支持，责任编辑宋德万、胡新蓉等对该书的再版付出了艰辛的劳动，在此深表感谢。

在第三版修改过程中由费定晖逐章逐题予以校阅，不当之处恳请指正。

费定晖

2005.1

出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，

特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目 录

MULU

第六章　多变量函数的微分法

§1. 多变量函数的极限. 连续性

1° 多变量函数的极限　设函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义.若对于任何的 $\varepsilon>0$ 存在有 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$,使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P,P_0)<\delta$[其中 $\rho(P,P_0)$为 P 和 P_0 二点间的距离],则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2° 连续性　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$于 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$于已知域内的每一点连续,则称函数 $f(P)$于此域内是连续的.

3° 一致连续性　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在仅与 ε 有关的$\delta>0$,使得对于域 G 中的任何点P',P'',只要是

$$\rho(P',P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立,则称函数 $f(P)$于域 G 内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的.

确定并绘出下列函数存在的域：

【3136】 $u=x+\sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$$y\geqslant 0,$$

如图 6.1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内.

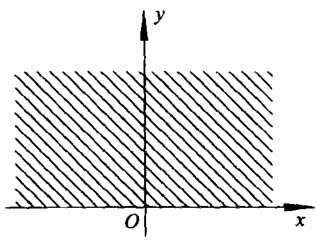

图 6.1

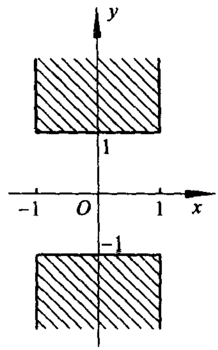

图 6.2

【3137】 $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不等式 $|x|\leqslant 1$, $|y|\geqslant 1$ 的点集，如图 6.2阴影部分所示，包括边界(粗实线)在内.

【3138】 $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1,$$

如图 6.3 阴影部分所示，包括圆周在内.

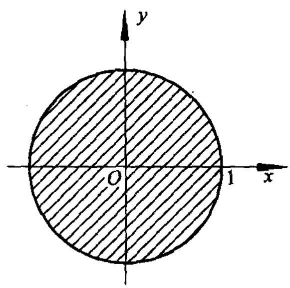

图 6.3

【3139】 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x^2+y^2>1$$

的点集，即圆 $x^2+y^2=1$ 的外面，如图6.4所示，不包括圆周（虚线）在内．

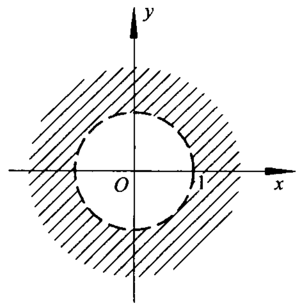

图 6.4

【3140】

$$u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}.$$

解 存在域为满足不等式

$$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$$

的点集，如图6.5所示的环，包括边界在内．

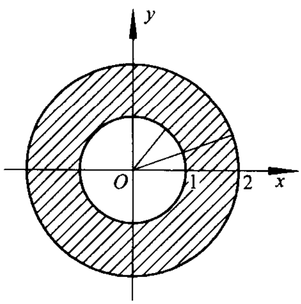

图 6.5

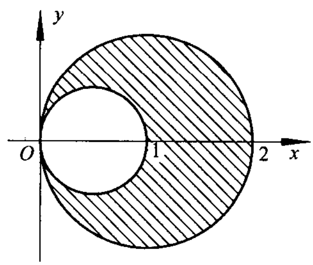

图 6.6

【3141】 $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x\leqslant x^2+y^2<2x$$

的点集．由 $x^2+y^2\geqslant x$ 得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出 $(x-1)^2+y^2<1$，两者组成一月形，如图6.6阴影部分所示．

【3142】 $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$$

的点集,如图 6.7 阴影部分所示,包括边界在内.

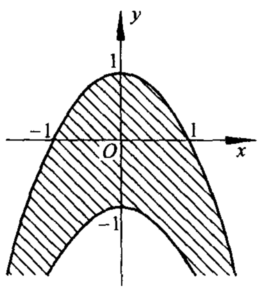

图 6.7

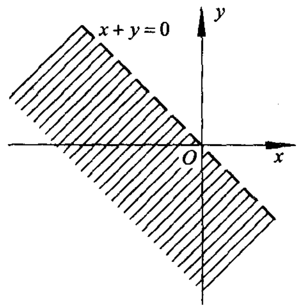

图 6.8

【3143】 $u=\ln(-x-y)$.

解 存在域为半平面

$$x+y<0,$$

如图 6.8 阴影部分所示,不包括直线 $x+y=0$ 在内.

【3144】 $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right|\leqslant 1 \quad 或 \quad |y|\leqslant|x| \quad (x\neq 0)$$

的点集,这是一对对顶的直角,如图 6.9 阴影部分所示,不包括原点在内.

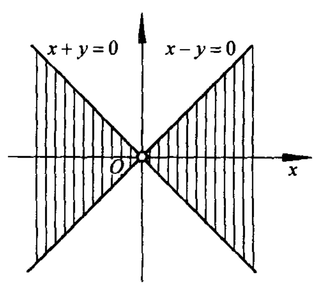

图 6.9

【3145】 $u=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$$

的点集，由 $\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$ 得 $|x|\leqslant|x+y|$ $(x\neq -y)$，即 $x^2\leqslant x^2+2xy+y^2$ 或 $y(y+2x)\geqslant 0$，也即

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\geqslant -2x, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y\leqslant 0, \\ y\leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x，y 不能同时为零，这是由直线：$y=0$ 和 $y=-2x$ 所围成的一对对顶的角，如图 6.10 阴影部分所示，包括边界在内，但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内.

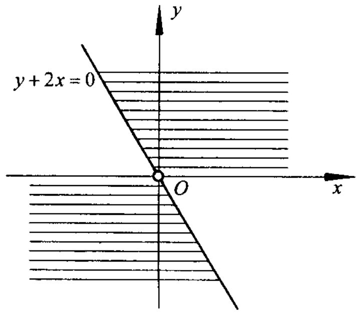

图 6.10

【3146】 $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|<1 \quad 及 \quad |1-y|\leqslant 1 \quad (y\neq 0)$$

的点集，即

$$\begin{cases} y^2\geqslant x, \\ 0<y\leqslant 2, \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} y^2\geqslant -x, \\ 0<y\leqslant 2. \end{cases}$$

这是由抛物线：$y^2=x$，$y^2=-x$ 和直线 $y=2$ 所围成的的曲边三角形，如图 6.11 阴影部分所示，不包括原点在内.

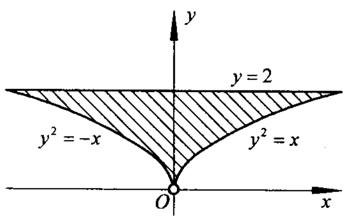

图 6.11

【3147】 $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0 \quad 或 \quad 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$$

$(k=0,1,2,\cdots)$的点集,如图 6.12 所示的同心环族.

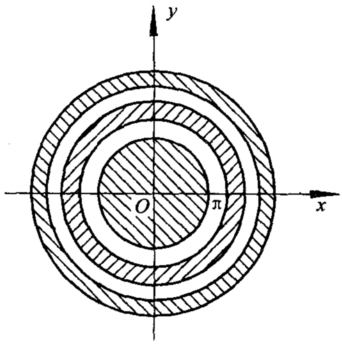

图 6.12

【3148】 $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1 \quad 或 \quad x^2+y^2-z^2\geqslant 0$$

$(x,y$ 不同时为零$)$的点集,这是圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外面,如图 6.13 阴影部分所示,包括边界在内,但要除去圆锥的顶点.

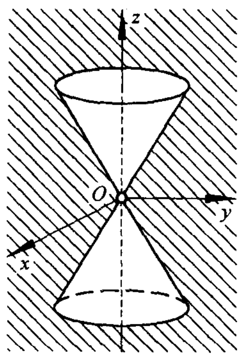

图 6.13

【3149】 $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式 $xyz>0$ 的点集,即

$$x>0,\ y>0,\ z>0; \quad 或 \quad x>0,\ y<0,\ z<0;$$

$$x<0,\ y<0,\ z>0; \quad 或 \quad x<0,\ y>0,\ z<0.$$

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面，由于图形为读者所熟知，故省略. 以下有类似情况，不再说明.

【3150】 $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式

$$-x^2-y^2+z^2>1$$

的点集. 这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部，如图 6.14 阴影部分所示，不包括界面在内.

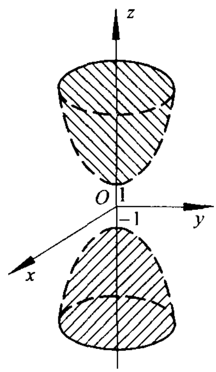

图 6.14

作出下列函数的等位线：

【3151】 $z=x+y$.

解 等位线为平行直线族

$$x+y=k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6.15 所示.

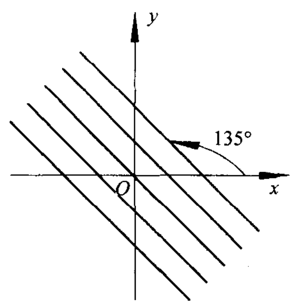

图 6.15

【3152】 $z=x^2+y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2+y^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为原点；当 $a>0$ 时，等位线为以原点为圆心的同心圆族.

【3153】 $z=x^2-y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2-y^2=k.$$

当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x$，$y=-x$. 当 $k\neq 0$ 时为以 $y=\pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中当 $k>0$ 时顶

点为$(-\sqrt{k},0)$，$(\sqrt{k},0)$，当 $k<0$ 时顶点为$(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\sqrt{-k})$.

【3154】 $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x+y)^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为直线 $x+y=0$. 当 $a\neq 0$ 时为与直线 $x+y=0$ 平行的且等距的直线 $x+y=\pm a$.

【3155】 $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y=kx \quad (x\neq 0),$$

不包括 Oy 轴在内.

【3156】 $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2+2y^2=a^2 \quad (a>0).$$

长半轴为 a，短半轴为$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为$\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$及$\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$.

【3157】 $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为坐标轴 $x=0$ 及 $y=0$. 当 $a>0$ 时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等边双曲线族，顶点为$(-a,-a)$及(a,a).

【3158】 $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+y=k,$$

其中 k 为一切实数. 当 $x \geqslant 0$ 时为 $x+y=k$; 当 $x<0$ 时为 $-x+y=k$. 这是顶点在轴 Oy 上两支互相垂直的射线所构成的折线族, 如图 6.16 所示.

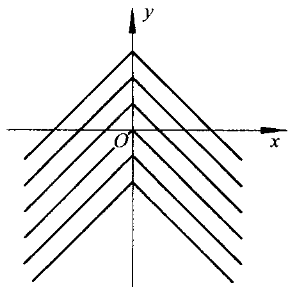

图 6.16

【3159】

$z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+|y|-|x+y|=a.$$

因为恒有 $|x|+|y| \geqslant |x+y|$, 所以 $a \geqslant 0$. 当 $a=0$ 时, 由 $|x|+|y|=|x+y|$ 两边平方即得

$$xy \geqslant 0,$$

即为整个第一、第三象限, 包括两坐标轴在内.

当 $a>0$ 时, $xy<0$ 分下面四组求解:

(1) $x>0,\ y<0,\ x+y \geqslant 0,\ |x|+|y|-|x+y|=a$,

解之得 $y=-\dfrac{a}{2}$;

(2) $x>0,\ y<0,\ x+y \leqslant 0,\ |x|+|y|-|x+y|=a$,

解之得 $x=\dfrac{a}{2}$;

(3) $x<0,\ y>0,\ x+y \geqslant 0,\ |x|+|y|-|x+y|=a$,

解之得 $x=-\dfrac{a}{2}$;

(4) $x<0,\ y>0,\ x+y \leqslant 0,\ |x|+|y|-|x+y|=a$,

解之得 $y=\dfrac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族, 它的各射线平行于坐标轴, 如图 6.17 所示.

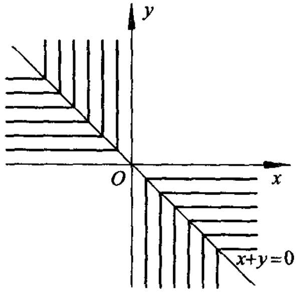

图 6.17

【3160】 $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k \quad (x, y\ \text{不同时为零}),$$

其中 k 为异于零的一切实数. 上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2 (k\neq 0).$$

当 $k=0$ 时, 即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$, 从而等位线为 $x=0$ 即 Oy 轴, 但不包括原点.

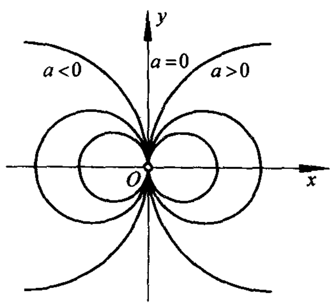

图 6.18

当 $k\neq 0$ 时为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点(但不包括原点在内)的圆束, 圆心在 $\left(\frac{1}{k}, 0\right)$ 半径为 $\left|\frac{1}{k}\right|$, 如图 6.18 所示.

【3161】 $z=x^y \quad (x>0)$.

解 等位线为曲线族