高等数学中的若干问题解析

舒阳春　编著

- 集特色问题、有趣问题、新颖问题于一体
- 开阔的解题思路，博采众长的解题方法
- 深入地探讨问题，激发研究问题的兴趣
- 通俗易懂，喜爱高等数学读者的良师益友

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书从高等数学中选取了73个比较有意义的单元.这些单元中的问题主要来自典型的习题、与高等数学书中内容相关的问题以及一些数学竞赛的问题,其中也有一些问题是作者在教学过程中的研究结果和作者积累的资料中的精华部分.本书对这些问题进行了多方面的讨论,包括解决问题的方法、考虑问题的思路以及对某些问题进行的深入的推广.对这些高等数学问题带有研讨的性质是本书的一大特色.本书对高等数学的教学研究、考研和参加数学竞赛都有参考意义.

本书可作为高等数学的教学参考书或本科大学生的数学课外读物.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学中的若干问题解析/舒阳春编著.—北京:科学出版社,2005
ISBN 7-03-014418-X

Ⅰ.高… Ⅱ.舒… Ⅲ.高等数学-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第099006号

责任编辑:陈玉琢 姚庆爽/责任校对:包志虹
责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年6月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2005年6月第一次印刷 印张:14 1/2
印数:1—4 000 字数:271 000

定价:29.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

本书是为读过高等数学并对数学有兴趣的读者而写的.本书的内容大多是解决高等数学中的一些问题,有些问题看起来简单,但是解决起来就不那么简单了.有些问题虽然是初等的问题,但必须使用微积分来进行解决.

本书的很多内容是我从事数学教学中多年收集起来的,其中有些是我自己在教学中的体会,有些内容还是从一些高等数学习题和竞赛题吸取而来的,对于这些问题的研讨使我们得到的结果更有意义.举个例子说,我们把几个考研题进行深化,得到了一些具有规律性的结果,把一些看起来没有联系的题给串起来了,给人的是一种欣赏.另外对于一些经典的问题,书中给出了不同的或者是更详细的解释.在解决问题方面,有些方法是博采众长,比如对 e 的无理数证明的确是非常精彩的,而方法很简洁,给人一种清新的感觉,当然有些解决问题的方法是自己在实际教学研究中体会到的.

有的问题虽然是高等数学的问题,但是处理起来还要用到稍深一点的知识,但这些知识都可在数学本科的教科书中找到,如贝尔纲定理的使用,但解法显得都不是那么“深沉”.有些问题还是经典问题的新的处理,使问题的处理更加简洁.有些问题也用了数学分析中的一些结果,使问题的结果更漂亮,如对 p 级数求和问题的处理.

要说到写这本书的动机很复杂.一是对高等数学的爱好,喜欢对一些问题思考.二是在教学中发现一些问题,有些问题一些书写得不是那么细,或是没有提到,当年让自己花了不少的时间.如果我能把它们写出来,不就省了以后读者的时间了吗? 于是产生了写书的念头.三是在多年的教学中,自己也对一些问题做了一些研究,把这些研究的结果写出来,一是总结,二是对学过高等数学的人怎么进行数学的教学研究也是一个激励和启发.

书可以写成各种各样的,我的这本书希望是写成一本大众一点的书,读的人多一些.其实像美国这样发达的国家也越来越注意数学书籍的可读性.当然,它不光是使问题的解决有可读性,更重要的是使我们的眼界进一步扩大,特别是在培养如何进行数学研究方面是一个启迪,并从中展现数学本身的有趣性.数学如果不把它有趣的一面、美的一面展现给读者的话,谁还想读数学呢?

从思想上,本书追求的是解决问题的方式以及怎么从一些简单的问题中找出一般性,并不是一本全面的教科书或习题集.因为书中涉及的面比较宽而杂,不能写成洋洋的、系统的、面面俱到的,一是现成的教科书已经是多得随手可拈,再则自

己还没有那种战略的高度,故名为《高等数学中的若干问题解析》.

当然,我也希望本书对教数学的人有一定参考价值,对数学爱好者是一个激励,说是这样说,不知结果怎么样? 即使是再好的书也还是有不少的缺点和不足之处,希望读者多提宝贵意见,我会不断地把这本书更加完善,使更多的数学爱好者喜欢它.

感谢博士生导师任德麟教授对本书的有益建议.

舒阳春

2005 年 5 月 19 日

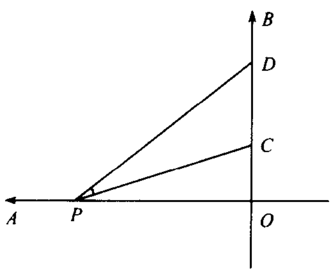
本书部分精采问题导引

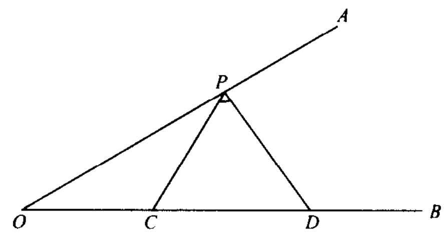
问题 我们知道：$\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}, n=1,2,3,\cdots$. 如果有单调增加函数$f(x)$满足积分：$\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}, n=1,2,3,\cdots$；能不能证明 $f(x)=x$ 成立呢？形式上看，对这个问题不能积分也不能微分，如何求证？这是一个令人感兴趣的问题.（见 4.12 节）

问题 设 $c>1, x_1=a>0, x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n},\cdots, n=1,2,3,\cdots$；那么，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{c}$. 通常的高等数学书中的解法比较复杂. 特别是，当 $0<c<1$ 时，所用的证明失效. 那么，当 $0<c<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{c}$还成立吗？我们找到了一个简单的统一证明.（见 1.6 节）

问题 设正数列$\{a_n\}$满足 $a_0\leqslant 1, (2-a_n)a_{n+1}=1, n=0,1,2,\cdots$；常见的是要证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$. 那么，$\{a_n\}$收敛于 1 的速度如何？这是一个收敛的渐近性问题. 我们发现：$\lim\limits_{n\to\infty} n(1-a_n)=1$. 您想知道是怎么求出来的吗？（见 1.8 节.）

问题 如下左图所示，$\angle AOB$ 为 90°，C, D 为OB 上的两个定点，求点 P 的位置，使$\angle CPD$ 为最大. 这是我们很多高等数学的书上常见的最大视角问题. 那么，一个自然会想到的是下面的新问题，见下右图：





如果$\angle AOB$ 的值在区间$(0,\pi)$内，换句话说，比如可能墙不是垂直的，P 点应该在什么位置使$\angle CPD$ 为最大呢？能不能用高等数学的方法做出这个推广的情况呢？进一步，如果 AO 在一个圆周上的话，会有什么结果呢？（见 3.3 节.）

问题 我们都知道 Wallis 公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\frac{\pi}{2}$，它收敛的速度如何？是不是按教科书说的收敛很慢？慢到什么程度呢？（见 4.9 节.）

问题 虽然利用泰勒公式可以计算 e 的近似值，就是用计算机直接计算要算到小数点后的 20 位是不容易的．那么，怎样用高等数学的知识结合 C 语言算出它小数点后的 10000 位并做出其精确度估计呢？我们用的计算原理非常简单．（见 2.10 节）

问题 曲线绕坐标轴转所成的旋转体的体积是高等数学中积分重要应用之一，如果曲线绕的是一条斜直线所成的旋转体的体积该如何计算呢？（见 5.5 节.）

问题 正圆锥曲面被平面所截得的圆锥曲线能用解析几何的方法验证（按其截线方程）就是椭圆、抛物线、双曲线的一种吗？很多学过高等数学的学生对此感到非常棘手……（见 8.8 节.）

……

上面的问题只是本书的一小部分，都是学过高等数学的人们想要搞清楚的问题．本书收集了类似问题共 70 多个单元，愿这些问题的解答和讨论能引起读者的兴趣．

目　　录

第 1 章　函数与数列的极限

1.1　有关函数的问题

我们仅考虑在给定的函数方程中，如何求出能满足方程的函数．所用的思路就是从初等函数出发来考虑问题．对一般的问题，教科书中太多了，所以，所选的问题是有一定的特色和难度的．

问题 1　已知在 $x=0$ 有界的连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)+\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$，求 $f(x)$ 的表达式．

解　由题设的递推公式 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$，反复使用这个公式我们得到

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right]\\
&= x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)\\
&= x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)^2-\frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right)\\
&= x^2\left[1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{3n}}\right]+\frac{1}{2^{3n}}(-1)^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

由题设 $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ 是有界的，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{3n}}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=0$；令 $n\to\infty$，对 $f(x)$ 的表达式两边取极限得到

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left[1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{3n}}+\cdots\right]+\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{3n}}f\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
&= x^2\left[1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{3n}}+\cdots\right]=\frac{1}{1+\frac{1}{2^3}}x^2=\frac{8}{9}x^2
\end{aligned}
$$

注　如果我们直接用 $f(x)=Cx^2$ 的话，我们得到的只是一个解，但没有解决解的唯一性问题．而我们上面的做法，在求出了解的同时也验证了此解是唯一的．

上面问题可以推广如下：

推论　对于正的常数 k,q，常数 p 满足 $|p|<2^k$，已知在 $x=0$ 有界的连续函

数满足关系式 $f(x)-pf\left(\dfrac{x}{2}\right)=qx^k$,那么满足该方程的只有一个解为 $f(x)=\dfrac{q}{1-\dfrac{p}{2^k}}x^k$.

问题 2 证明在 $x\geqslant 0$ 上有非零连续函数 $f(x)$满足

$$f(2^2x)=f(2x)+f(x)$$

证明 尝试对数函数、指数函数都不符合要求.从形式上看幂函数比较合适.因此,我们设 $f(x)=x^{\mu}$,其中 μ 为待定常数.代入题设函数式得到

$$(2^2x)^{\mu}=(2x)^{\mu}+x^{\mu}$$

于是我们得到:$2^{2\mu}=2^{\mu}+1$,解这个方程得 $2^{\mu}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,因此,$2^{\mu}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,从而,$\mu=\log_2\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.于是,我们所求的函数为 $f(x)=x^{\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.证毕.

我们知道,对于对数函数有 $\ln x^n=n\ln x$,下面我们考虑的是相关的情况:

问题 3 对于正整数 n 和正数 α,在 $(0,+\infty)$内,求满足函数方程 $f(x^n)=\alpha f(x)$的 $f(x)$.

解 如果 $n=\alpha$,我们取 $f(x)=\ln x$ 即可.$n\neq\alpha$ 时,我们想办法利用指数函数和对数函数.设 $f(x)=b^{\ln|\ln x|}$,其中 b 为待定系数.那么由条件 $f(x^n)=\alpha f(x)$得到 $b^{\ln n+\ln|\ln x|}=\alpha b^{\ln|\ln x|}$;于是 $b^{\ln n}=\alpha$;从而,$\ln n\ln b=\ln\alpha$,解之得 $b=e^{\frac{\ln\alpha}{\ln n}}=(e^{\ln\alpha})^{\frac{1}{\ln n}}=(\alpha)^{\frac{1}{\ln n}}$.因此,所求的函数可以表示为 $f(x)=\alpha^{\frac{\ln|\ln x|}{\ln n}}$.解毕.

我们再来看看函数有不动点时的特性.

问题 4 设 $f(x)$为在实轴上有定义的连续函数,若 $f(f(x))$有唯一的不动点,那么,$f(x)$也有唯一的不动点.

证明 先证,$f(x)$有不动点.反证法,若不然,如果对于任何的 x,$f(x)\neq x$,由 $f(x)$的连续性,不妨设 $f(x)>x$;那么对任何的 x,$f(f(x))>f(x)>x$,这与 $f(f(x))$有不动点是矛盾的.因此,$f(x)$有不动点.进一步,$f(x)$的不动点也是 $f(f(x))$的不动点.因此,由于 $f(f(x))$的不动点是唯一的,因此,$f(x)$的不动点也是唯一的.证毕.

下面的问题反映的是可以根据不动点的特性来否定具体函数的存在性.

问题 5 求证在实轴上不存在可微的函数 $f(x)$,使其满足 $f(f(x))=-x^3+x^2+1$.

解 我们来考察 $f(x)$的不动点.令 $f(f(x))=-x^3+x^2+1=x$,我们得到

$$-x^3+x^2+1-x=0$$

我们得到 $x=1$ 是 $f(f(x))$唯一的不动点. 于是,$f(x)$有唯一的不动点. 显然,$x=1$是 $f(x)$的不动点.

进一步,由 $f(x)$是可微的,根据复合函数的导数法则得

$$f'(f(x))f'(x) = -3x^2+2x$$

因此,我们得到

$$f'(1)f'(1) = -3\times 1^2+2\times 1 = -1$$

这是一个矛盾. 因此,不存在可微的函数 $f(x)$,使其满足 $f(f(x))=-x^3+x^2+1$. 证毕.

根据连续函数的介值定理,可以确定某些函数取值的状态. 如下问题:

问题 6　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)=f(b)=0$,$f(x)>0$,$x\in(a,b)$,证明:对于任何取定的 $t\in(0,b-a)$,存在着相应的 $x_0\in(a,b-t)$使得 $f(x_0)=f(x_0+t)$.

证明　记 $F(x)=f(x+t)-f(x)$,那么,由 $f(a)=f(b)=0$ 得

$$F(a) = f(t+a)-f(a) = f(t+a)>0,$$
$$F(b-t) = f(b)-f(b-t) = -f(b-t)<0.$$

由连续函数的介值定理,有 $x_0\in(a,b-t)$,使 $F(x_0)=f(x_0+t)-f(x_0)=0$,证毕.

但是如果不要求函数是正的,我们有如下的问题.

问题 6.1　设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,$f(0)=f(1)=0$,证明:对于任何自然数 $n>2$,都存在着相应的 $x_0\in(0,1)$使得 $f(x_0)=f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)$.

证明　设 $F(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$,$x\in\left(0,1-\dfrac{1}{n}\right)$;如果 $F(x)\neq 0$,$x\in\left(0,1-\dfrac{1}{n}\right)$,由 $F(x)$的连续性,不妨设 $F(x)>0$,$x\in\left(0,1-\dfrac{1}{n}\right)$. 于是,$f(0)\geqslant f\left(\dfrac{1}{n}\right)>f\left(\dfrac{2}{n}\right)>\cdots\geqslant f(1)=0$. 矛盾. 证毕.

Descartes (1596~1650)

注 1　$n=2$,上面的问题 6.1 的结论不再成立.

有反例:$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ (1-x)\left(x-\dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$

注 2　有没有连续函数对每个值恰取两次呢? 答案是否定的.

1.2 关于数列$\{\sin n\}$敛散性

我们知道，$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 是不存在的，但是，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 是否存在呢？这是我们要研究的问题.

问题 1 $\{\sin kn\}$的极限不存在，其中 k 为正整数.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin kn=a$，由$\lim\limits_{n\to\infty}[\sin k(n+2)-\sin k(n-2)]=\lim\limits_{n\to\infty}2\cos kn\sin 2k=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos kn=0$. 另一方面，$\sin 2kn=2\sin kn\cos kn$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2kn=\lim\limits_{n\to\infty}2\sin kn\cos kn=0$，而又 $\sin^2 2kn+\cos^2 2kn=1$，矛盾. 证毕.

问题 2 $\{\cos kn\}$的极限不存在，其中 k 为正整数.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty}\cos kn=a$，由

$$\lim_{n\to\infty}[\cos k(n+2)-\cos k(n-2)]=-\lim_{n\to\infty}2\sin kn\sin 2k=0$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sin kn=0$，这与问题 1 是矛盾的. 从而命题得证. 证毕.

进一步，由于 $\sin(2kn+k)-\sin(2kn-k)=2\cos 2kn\sin k$，有下面结论：

推论 1 $\{\sin(2kn+k)\}$的极限不存在，其中 k 为正整数.

推论 2 $\{\cos(2kn+k)\}$的极限不存在，其中 k 为正整数.

问题 3 $\{\sin n^2\}$的极限不存在.

证明 若不然，设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2$ 存在，那么 $\sin(n+1)^2-\sin(n-1)^2=2\cos(n^2+1)\sin(2n+1)\to 0, n\to\infty$. 我们可以选取一子列$\{n_k\}$使得 $\cos(n_k^2+1)$收敛，并且 $\sin(2n_k+1)$不收敛于零. 由上式知 $\cos(n_k^2+1)$收敛于 0. 由 $\cos(n_k^2+1)=\cos n_k^2\cos 1-\sin n_k^2\sin 1$，记 $b=\lim\limits_{k\to\infty}\sin n_k^2$，那么 $a=\lim\limits_{k\to\infty}\cos n_k^2$ 存在，且有 $a\cos 1=b\sin 1$. 由 $a^2+b^2=1$，不难推出 $a=\pm\sin 1$.

进一步，由 $\sin(n+2)^2-\sin(n-2)^2=2\cos(n^2+4)\sin(4n+4)\to 0, n\to\infty$，而由推论 1$\{\sin 4(n+1)\}$的极限不存在，故我们可以选取$\{n_l\}$的子列，使得 $\cos(n_l^2+4)$收敛，并且 $\sin(4n_l+4)$不收敛于零，于是$\lim\limits_{l\to\infty}\cos(n_l^2+4)=0$，同法我们可得 $a\cos 4=c\sin 4$，其中 $c=\lim\limits_{l\to\infty}\cos n_l^2$，不难推出，$a=\pm\sin 4$. 这显然是不可能的. 因此，$\{\sin n^2\}$的极限不存在. 证毕.

类似地，我们得到：

问题 4 $\{\cos n^2\}$的极限不存在.

我猜想，$\{\sin n^k\}$，对于正整数 $k>2$ 也是发散的，目前还没有看到相应的结果.

尽管$\{\sin n\}$的极限不存在，但是却有如下的结果：

问题 5 $\{\sin n\}$在$[-1,1]$上是稠密的.

证明　首先我们来证明，$A=\{2l\pi-[2l\pi]\mid l$ 为自然数$\}$在$[0,1]$上是稠密的. 事实上，记 $2k\pi=[2k\pi]+\delta_k$，其中 k 为整数，$[2k\pi]$是 $2k\pi$ 的整数部分，δ_k 为其小数部分. 对于任何给定的 $\varepsilon>0$，在$\{\delta_k\}$中，$k=1,2,\cdots,2+\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$；由于 π 是无理数，故 δ_k 互不相同. 我们把区间$[0,1]$分成 $1+\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$等份的区间，那么至少有一个区间含有两个不同的 δ_k. 不妨设为：δ_{k_1}、δ_{k_2}含在一个等份的区间内，其中，$2+\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]>k_1>k_2$；那么 $|\delta_{k_1}-\delta_{k_2}|<\dfrac{1}{1+[1/\varepsilon]}<\varepsilon$. 我们分两种情况来讨论：

1）$(\delta_{k_1}-\delta_{k_2})>0$. 在此种情况下：

$(k_1-k_2)2\pi-[(k_1-k_2)2\pi]=(\delta_{k_1}-\delta_{k_2})$，对于正数 l，$l=1,2,\cdots,[1/(\delta_{k_1}-\delta_{k_2})]$，$l(k_1-k_2)2\pi-[l(k_1-k_2)2\pi]=l(\delta_{k_1}-\delta_{k_2})$在$[0,1]$中，即任何长度为 ε 的邻域中都含有 $l(k_1-k_2)2\pi-[l(k_1-k_2)2\pi]=l(\delta_{k_1}-\delta_{k_2})$这种类型的点.

2）若$(\delta_{k_1}-\delta_{k_2})<0$，我们来比较 $2\pi=[2\pi]+\delta_1$. 如果 $\delta_1<|(\delta_{k_1}-\delta_{k_2})|$，那么我们取正数 l，$l=1,2,\cdots,\left[\dfrac{1}{\delta_1}\right]$，那么，$2l\pi-[2l\pi]=l\delta_1$ 在$[0,1]$中，即任何长度为 ε 的邻域中都含有 $2l\pi-[2l\pi]=l\delta_1$ 这种类型的点.

如果 $\delta_1>|\delta_{k_1}-\delta_{k_2}|$，令 $\delta_0=\dfrac{\delta_1}{|\delta_{k_1}-\delta_{k_2}|}-\left[\dfrac{\delta_1}{|\delta_{k_1}-\delta_{k_2}|}\right]$，记 $k_0=\left[\dfrac{\delta_1}{|\delta_{k_1}-\delta_{k_2}|}\right]$，那么，$(k_1-k_2)k_0 2\pi-[(k_1-k_2)2\pi]k_0=k_0(\delta_{k_1}-\delta_{k_2})=-\delta_1+\delta_0$

显然，$0<\delta_0<\varepsilon$. 我们取正数 l，$l=1,2,3,\cdots,\left[\dfrac{1}{\delta_0}\right]$，那么

$$l((k_1-k_2)k_0+1)2\pi-[l((k_1-k_2)k_0+1)2\pi]=l\delta_0$$

在$[0,1]$中，任何长度为 ε 的邻域中都含有 $l(k_1-k_2)k_0+1)2\pi-[l((k_1-k_2)k_0+1)2\pi]=l\delta_0$ 这种类型的点.

于是，在上面两种情况下，我们得到了：

在$[0,1]$中的任何长度为 ε 的邻域中都含有 $l2\pi-[l2\pi]=\delta l$ 类型的点. 再由 ε 的任意性知，$A=\{2l\pi-[2l\pi]\mid l$ 为自然数$\}$在$[0,1]$上是稠密的. 从而，$A=\{2l\pi-n\mid l,n$ 为自然数$\}$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上是稠密的. 由于 $\sin x$ 是连续函数，故 $\sin A$ 是$[-1,1]$上的稠密集. 而 $\sin(2l\pi-n)=\sin n$，从而，$\{\sin n\}$在$[-1,1]$上是稠密的. 证毕.

从上面的证明我们可以得到如下的推论.

推论 0是数列$\{\sqrt{n}\sin n\}$的一个极限点.

证明 对于任何的自然数 k,存在着自然数 $n_k\leqslant 2k$,使得$|2n_k\pi-[2n_k\pi]|<\dfrac{1}{k}$,对满足上面式中的 n_k,由$\left|\sqrt{2\pi n_k}\sin 2\pi n_k\right|=\left|\sqrt{2\pi n_k}\sin(2\pi n_k-[2\pi n_k])\right|<\sqrt{2\pi}\sqrt{\dfrac{n_k}{k}}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\to 0$,当 $k\to\infty$时,故0是数列$\{\sqrt{n}\sin n\}$的一个极限点.证毕.

后来,有人证明了0是数列$\{n^{14}\sin n\}$的一个极限点(美国数学月刊,1989,23).但是,数列$\{\sqrt{n}\sin n\}$有没有非0且是有限的极限点?现在还不知道.

问题6 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$.

证明 设 m,n 是正整数,使得 $m>1$,$|n-m\pi|<\dfrac{\pi}{2}$,那么,$m<n$,由文(美国数学月刊,1983,648)中的结果,$|n-m\pi|>m^{-41}$, 因此,$1>|\sin n|>|\sin(n-m\pi)|>\dfrac{2}{\pi}|n-m\pi|>\dfrac{2}{\pi}m^{-41}$.

由此,$\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$,而$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$是显然的,故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$.证毕.

函数列$\{\sin n_k x\}$的收敛性如何呢?

问题7 对于一数列$0<n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,记$F=\{x\mid \lim\limits_{k\to\infty}\sin n_k x$ 存在,$x\in[0,2\pi]\}$,记$f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\sin n_k x$,那么$f(x)=0$几乎处处成立于$F$上.

证明 显然$f(x)$是有界的可积函数.于是有$\lim\limits_{k\to\infty}\int_F f(x)\sin n_k x\mathrm{d}x=\int_F f^2(x)\mathrm{d}x$.由黎曼引理知$\lim\limits_{k\to\infty}\int_F f(x)\sin n_k x\mathrm{d}x=0$,从而,$\int_F f^2(x)\mathrm{d}x=0$,于是$f(x)=0$ 几乎处处成立于F上.

问题8 对于一数列$0<n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,记$F=\{x\mid \lim\limits_{k\to\infty}\sin n_k x$ 存在,$x\in[0,2\pi]\}$,证明 $mF=0$.

证明 记$f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\chi_F\sin n_k x$,其中$\chi_F=\begin{cases}1, & x\in F\\ 0, & x\notin F\end{cases}$,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\chi_F(x)\sin^2 n_k x\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\chi_F(x)[1-\cos 2n_k x]\mathrm{d}x \tag{1}$$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\chi_F(x)\cos 2n_k x\mathrm{d}x=0$,故有

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\chi_F(x)\sin^2 n_k x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\chi_F(x)\mathrm{d}x=mF \tag{2}$$

另一方面，

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\chi_F(x)\sin^2 n_k x\,\mathrm{d}x=\int_F f^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\chi_F(x)f(x)\sin n_k x\,\mathrm{d}x=0\quad(3)$$

于是，由(1)、(2)、(3)式得 $mF=0$. 证毕.

上面的结果说明了使得函数列 $\{\sin n_k x\}$ 收敛的点 x 的全体是一个零测度集合. 有了这个结果不难知道：对于一个使 $\{\sin n_k\}$ 收敛的数列，总存在一个常数 c，使得 $\{\sin n_k c\}$ 是一个发散的数列.

问题 9　设 $S(x)=\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$，其中 n 是一个正整数，a_m,b_m 为常数，$m=1,2,\cdots,n$. 如果 $\lim_{x\to\infty}S(x)$ 存在的话，那么 a_m,b_m 全为零或者 $m=0$.

证明　记 $s_0=\lim_{x\to\infty}S(x)$，$S_k(x)=S(kx)$，$k=1,2,\cdots$；那么，对任何 x 有

$$\lim_{k\to\infty}S_k(x)=\lim_{k\to\infty}S(kx)=s_0$$

并且在 $[2\pi,4\pi]$ 上是一致收敛的. 于是

$$2\pi{s_0}^2=\lim_{k\to\infty}\int_{2\pi}^{4\pi}{S_k}^2(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}{S_k}^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mkx+b_m\sin mkx)\Big)^2\mathrm{d}x=\sum_{m=1}^{n}({a_m}^2+{b_m}^2)$$

同理，得

$$2\pi{s_0}^2=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}s_0S_k(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mkx+b_m\sin mkx)\Big)s_0\mathrm{d}x=0$$

于是我们得到 $\sum_{m=1}^{n}({a_m}^2+{b_m}^2)=0$，从而 a_m,b_m 全为零 0. 证毕.

1.3　数列前 n 项均值的极限

我们知道：有限项数列和的极限等于其极限的和，那么当所求的极限的项目随 n 变化时，这个结果就不再成立. 解决这个问题的思想是固定一个 N，分段来进行证明. 这个思想在高等数学的很多证明中都会用到，它的确是一个看家的武器. 本书中用的也多，所以还是列了出来.

命题 1　设 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$，那么我们有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$.

证明　因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>0$，使得 $n>N_1$ 时，$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是，我们有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right|\leqslant\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{N_1}-A|}{n}+\frac{(n-N_1)\varepsilon}{n}$$

因为 N_1 是固定的,所以有正数 N_2,当 $n>N_2$ 时

$$\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{N_1}-A|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是,令 $N=\max(N_1,N_2)$,当 $n>N$ 时,$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right|<\varepsilon$.因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$成立.证毕.

注 这个命题有着非常重要的作用.在命题1求极限的表达式中,项数随着 n 增大而增加时,不能每项先求极限再相加.

命题2 设$\{a_n\}$为一个正项的数列,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在,那么我们有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$存在,并且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

证明 $a_n=a_1\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}$,两边取对数得

$$\frac{1}{n}\ln a_n=\frac{\ln a_1+\ln\frac{a_2}{a_1}+\ln\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}$$

由命题1,我们得到$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$,从而,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$成立.这说明正项级数的判别法中,柯西(Cauchy)判别法比达朗贝尔判别法更强一些.证毕.

例1 设 $a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 这是一个经典的题目.它是上面命题2的一个极好的应用.设 $b_n=a_n^n=\frac{n!}{n^n}$,那么 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $n=1,2,\cdots$.于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\mathrm{e}^{-1}$,再由命题2,我们得到$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\mathrm{e}^{-1}$.解毕.

例2 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_na_1+b_{n-1}a_2+\cdots+b_1a_n}{n}=AB$.

证明 我们这里给一个与一般书上不同的做法.由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,知$\{b_n\}$是一个