数学机械化丛书

4

多项式系统的实根分离算法及其应用

陆征一 何碧 罗勇 著

科学出版社
www.sciencep.com

数学机械化丛书　　4

多项式系统的实根分离算法及其应用

陆征一　何　碧　罗　勇　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书利用吴方法、一元多项式实根分离算法及多项式的单调性分解，提出了一般多元多项式组实零点的区间分离算法．将此算法应用于几类典型的微分方程定型性质的研究得到了一些新的结果：一类单调系统的全局稳定性，Lienard 系统的小扰动极限环构造，二次系统的弱中心阶数的判定，以及高维系统的极限环构造．

本书适用于大学高年级本科生、研究生及相关的科技工作者使用．

图书在版编目（CIP）数据

多项式系统的实根分离算法及其应用/陆征一等著．
北京：科学出版社，2004
（数学机械化丛书；4）
ISBN 7-03-012427-8

Ⅰ．多…　Ⅱ．陆…　Ⅲ．多项式—算法　Ⅳ．O174.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 106947 号

责任编辑　吕　虹　范庆奎／责任校对　朱九九
责任印制　钱玉芬／封面设计　黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂　印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004 年 5 月第 一 版　　开本：B5（720×1000）
2004 年 5 月第一次印刷　　印张：10
印数：1—2 500　　字数：200 000

定价：30.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

《数学机械化丛书》前言[①]

十六七世纪以来，人类历史上经历了一场史无前例的技术革命，出现了各种类型的机器，取代各种形式的体力劳动，使人类进入一个新时代. 几百年后的今天，电子计算机已可开始有条件地代替一部分特定的脑力劳动，因而人类已面临另一场更宏伟的技术革命，处在又一个新时代的前夕. 数学是一种典型的脑力劳动，它在这一场新的技术革命中，无疑将扮演一个重要的角色. 为了了解数学在当前这场革命中所扮演的角色，就应对机器的作用，以及作为数学的脑力劳动的方式，进行一定的分析.

1. 什么是数学的机械化

不论是机器代替体力劳动，或是计算机代替某种脑力劳动，其所以成为可能，关键在于所需代替的劳动已经“机械化”，也就是说已实现了刻板化或规格化. 正因为割麦、刈草、纺纱、织布的动作已经是机械化刻板化了的，因而可据以造出割麦机、刈草机、纺纱机、织布机来. 也正因为加减乘除开方等运算这一类脑力劳动，几千年来就已经是机械地刻板地进行的，才有可能使得 17 世纪的法国数学家巴斯喀，利用齿轮传动造出了第一台机械计算机 —— 加法机，并由莱布尼茨改进成为也能进行乘法的机器. 数学问题的机械化，就要求在运算或证明过程中，每前进一步之后，都有一个确定的、必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论.

在中小学数学的范围里，就有着不少已经机械化了的课题. 除了四则、开方等运算外，解线性联立方程组就是一个很好的例子. 在中学用的数学课本中，往往介绍解线性方程组的各种“消去法”，其求解过程是一个按一定程序进行的计算过程，也就是一种机械的、刻板的过程. 根据这一过程编成程序，由电子计算机付诸实施，就可以不仅机器化而且达到自动化，在几分钟甚至几秒钟之内求出一个未知数多至上百个的线性方程组的解答来，这在手工计算几乎是不可能的. 如果用手工计算，即使是解只有三四个未知数的方程组，也将是繁琐而令人厌烦的. 现代化的国防、经济建设中，大量出现的例如网络一类的问题，

---

① 20 世纪七八十年代之交，我尝试用计算机证明几何定理取得成功，由此并提出了数学机械化的设想. 先后在一些通俗报告与写作中，解释数学机械化的意义与前景，例如 1978 年发表于《自然辩证法通讯》的“数学机械化问题”以及 1980 年发表于《百科知识》的“数学的机械化”. 二文都重载于 1995 年由山东教育出版社出版的《吴文俊论数学机械化》一书. 经过二十多年众多学者的努力，数学机械化在各个方面都取得了丰富多彩的成就，并已出版了多种专著，汇集成现在的数学机械化丛书. 现据 1980 年的《百科知识》的“数学的机械化”一文，稍加修改并作增补，以代丛书前言.

往往可归结为求解很多未知数的线性方程组. 这使得已经机械化了的线性方程解法在四个现代化中起着一种重要作用.

即使是不专门研究数学的人们, 也大都知道, 数学的脑力劳动有两种主要形式: 数值计算与定理证明 (或许还应包括公式推导, 但这终究是次要的). 著名的数理逻辑学家美国洛克菲勒大学教授王浩先生在一篇"向机械化数学前进"的有名文章中, 曾列举了这两种数学脑力劳动的若干不同之点. 我们可以简略而概括地把它们对比一下:

计算	证明
易	难
繁	简
刻板	灵活
枯燥	美妙

计算, 如已经提到过的加减乘除开方与解线性方程组, 其所以虽繁而易, 根本原因正在于它已经机械化. 而证明的巧而难, 是大家都深有体会的, 其根本原因也正在于它并没有机械化. 例如, 我们在中学初等几何定理的证明中, 就经常要依靠诸如直观、洞察、经验以及其他一些模糊不清的原则, 去寻找捷径.

2. 从证明的机械化到机器证明

一个值得提出的问题是: 定理的证明是不是也能像计算那样机械化, 因而把巧而难的证明, 化为计算那样虽繁而易的劳动呢? 事实上, 这一证明机械化的设想, 并不始自今日, 它早就为 17 世纪时的大哲学家、大思想家和大数学家笛卡儿和莱布尼茨所具有. 只是直到 19 世纪末, 希尔伯特 (德国数学家, 1862~1943) 等创立并发展了数理逻辑以来, 这一设想才有了明确的数学形式. 又由于 20 世纪 40 年代电子计算机的出现, 才使这一设想的实现有了现实可能性.

从 20 世纪二三十年代以来, 数理逻辑学家们对于定理证明机械化的可能性进行了大量的理论探讨, 他们的结果大都是否定的. 例如哥德尔 (Gödel) 等的一条著名定理就说, 即使看来最简单的初等数论这一范围, 它的定理证明的机械化也是不可能的. 另一方面, 1950 年波兰数学家塔斯基 (Tarski) 则证明了初等几何 (以及初等代数) 这一范围的定理证明, 却是可以机械化的. 只是塔斯基的结果近于例外, 在初等几何及初等代数以外的大量结果都是反面的, 即机械化是不可能的. 1956 年以来美国开始了利用电子计算机做证明定理的尝试. 1959 年王浩先生设计了一个机械化方法, 用计算机证明了罗素等著的《数学原理》这一经典著作中的几百条定理, 只用了 9 分钟, 在数学与数理逻辑学界引

起了轰动. 有一时机器证明的前景似乎非常乐观. 例如 1958 年时就有人曾经预测: 在 10 年之内计算机将发现并证明一个重要的数学新定理. 还有人认为, 如果这样, 则不仅许多著名哲学家与数学家如庞阿诺、怀特海、罗素、希尔伯特以及杜灵等人的梦想得以实现, 而且计算将成为科学的皇后, 人类的主人!

然而, 事情的发展却并不如预期那样美好. 尽管在 1976 年时, 美国的哈肯等人, 在高速计算机上用了 1200 小时的计算时间, 解决了数学家们 100 多年来所未能解决的一个著名难题 —— 四色问题, 因此而轰动一时, 但是, 这只能说明计算机作为定理证明的辅助工具有着巨大潜力, 还不能认为这样的证明就是一种真正的机器证明. 用王浩先生的说法, 哈肯等关于四色定理的证明是一种使用计算机的特例机证, 它只适用于四色这一特殊的定理, 这与所谓基础机器证明之能适用于一类定理者有别. 后者才真正体现了机械化定理证明, 进而实现机器证明的实质. 另一面, 在真正的机械化证明方面, 虽然塔斯基在理论上早已证明了初等几何的定理证明是能机械化的, 还提出了据以造判定机也即是证明机的设想, 但实际上他的机械化方法非常繁, 繁到不可收拾, 因而远远不是切实可行的. 1976 年时, 美国做了许多在计算机上证明定理的实验, 在泰斯基的初等几何范围内, 用计算机所能证明的只是一些近于同义反复的“儿戏式”的“定理”. 因此, 有些专家曾经发出过这样悲观的论调: 如果专依靠机器, 则再过 100 年也未必能证明出多少有意义的新定理来.

3. 一条切实可行的道路

1976 年冬, 我们开始了定理证明机械化的研究. 1977 年春取得了初步成果, 证明初等几何主要一类定理的证明可以机械化. 在理论上说来, 我们的结果已包括在塔斯基的定理之中. 但与塔斯基的结果不同, 我们的机械化方法是切实可行的, 即使用手算, 依据机械化的方法逐步进行, 虽然繁复, 也可以证明一些艰深的定理.

我们的方法主要分两步, 第一步是引进坐标, 然后把需证定理中的假设与终结部分都用坐标间的代数关系来表示. 我们所考虑的定理局限于这些代数关系都是多项式等式关系的范围, 例如平行、垂直、相交、距离等关系都是如此. 这一步可以叫做几何的代数化. 第二步是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的坐标逐个消去, 如果消去的结果为零, 即表明定理正确, 否则再作进一步检查. 这一步完全是代数的, 即用多项式的消元法来验证.

上述两步都可以机械与刻板地进行. 根据我们的机械化方法编成程序, 以在计算机上实现机器证明, 并无实质上的困难. 事实上数学所某些同志以及国外的王浩先生都曾在计算机上试行过. 我们自己也曾在国产的长城 203 台式机上证明了像西姆森线那样不算简单的定理. 1978 年初我们又证明了初等微分

几何中主要的一类定理证明也可以机械化. 而且这种机械化方法也是切实可行的, 并据此用手算证明了不算简单的一些定理.

从我们的工作中可以看出, 定理的机械化证明, 往往极度繁复, 与通常既简且妙的证明形成对照, 这种以量的复杂来换取质的困难, 正是利用计算机所需要的.

在电子计算机如此发展的今天, 把我们的机械化方法在计算机上实现不仅不难, 而且有一台微型的台式机也就够了. 就像我们曾经使用过的长城 203, 它的存数最多只能到 234 个 10 进位的 12 位数, 就已能用以证明西姆逊线那样的定理. 随着超大规模集成电路与其他技术的出现与改进, 微型机将愈来愈小型化而内存却愈来愈大, 功能愈来愈多, 自动化的程度也愈来愈高. 进入 21 世纪以后, 这一类方便的小型机器将为广大群众普遍使用. 它们不仅将成为证明一些不很简单的定理的武器, 而且还可用以发现并证明一些艰深的定理, 而这种定理的发现与证明, 在数学研究手工业式的过去, 将是不可想像的. 这里我们应该着重指出, 我们并不鼓励以后人们将使用计算机来证明甚至发现一些有趣的几何定理. 恰恰相反, 我们希望人们不再从事这种虽然有趣却即是对数学甚至几何学本身也已意义不大的工作, 而把自己从这种工作中解放出来, 把自己的聪明才智与创造能力贯注到更有意义的脑力劳动上去.

还应该指出, 目前我们所能证明的定理, 局限于已经发现的机械化方法的范围, 例如初等几何与初等微分几何之内. 而如何超出与扩大这些机械化的范围, 则是今后需要探索的长期的理论性工作.

4. 历史的启示与中国古代数学

我们发现几何定理证明的机械化方法是在 1976 至 1977 年之间. 约在两年之后我们发现早在 1899 年出版的希尔伯特的经典名著《几何基础》中, 就有着一条真正的正面的机械化定理: 初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化. 当然, 原来的叙述并不是以机械化的语言来表达的, 也许就连希尔伯特本人也并没有对这一定理的机械化意义有明确的认识, 自然更不见得有其他人提到过这一定理的机械化内容. 希尔伯特是以公理化的典范而著称于世的, 但我认为, 该书更重要处, 是在于提供了一条从公理化出发, 通过代数化以到达机械化的道路. 自然, 处于希尔伯特以及其后数学的一张纸一支笔的手工作业时代里, 公理化的思想与方法得到足够的重视与充分的发展, 而机械化的方向与意义受到数学家的忽视是完全可以理解的. 但在电子计算机已日益普及, 因而繁琐而重复的计算已成为不足道的事情了, 机械化的思想应比公理化思想受到更大重视, 似乎是合乎实际的.

其次应该着重指出, 我们从事机械化定理证明工作获得成果之前, 对塔斯

基的已有工作并无接触，更没有想到希尔伯特的《几何基础》会与机械化有任何关系．我们是在中国古代数学的启发之下提出问题并想出解决办法来的．

说起来道理也很简单：中国的古代数学基本上是一种机械化的数学．四则运算与开方的机械化算法由来已久．汉初完成的《九章算术》中，对开平、立方与解线性联立方程组的机械化过程，都有详细说明．宋代更发展到高次代数方程求数值解的机械化算法．

总之各个数学领域都有定理证明的问题，并不限于初等几何或微分几何．这种定理证明肇始于古希腊的欧几里得传统，现已成为近代纯粹数学或核心数学的主流．与之相异，中国的古代学者重视的是各种问题特别是来自实际要求的具体问题的解决．各种问题的已知数据与要求的数据之间，很自然地往往以多项式方程的形式出现．因之，多项式方程的求解问题，也就自然成为中国古代数学家研究的中心问题．从秦汉以来，所研究的方程由简到繁，不断有所前进，有所创新．到宋元时期，更出现了一个思想与方法的飞跃：天元术的创立．

“天元术”到元代朱世杰时又发展成四元术，所引入的天元、地元、人元、物元实际上相当于近代的未知元或未知数．将这些未知元作为通常的已知数那样加减乘除，就可得到与近代多项式与有理函数相当的概念与相应的表达形式与运算法则．一些几何性质与关系很容易转化成这种多项式或有理函数的形式及其关系．这使得过去依题意列方程这种无法可循需要高度技巧的工作从此变成轻而易举．朱世杰 1303 年的《四元玉鉴》又给出了解任意多至四个未知元的多项式方程组的方法．这里限于 4 个未知元只是由于所使用的计算工具 (算筹和算板) 的限制．实质上他解方程的思想路线与方法完全可以适用于任意多的未知元．

不问可知，在当时的具体条件下，朱的方法有许多缺陷．首先，当时还没有复数的概念，因之朱往往限于求出 (正) 实值．这无可厚非，甚至在 17 世纪 Descartes 的时代也还往往如此．但此外朱在方法上也未臻完善．尽管如此，朱的思想路线与方法步骤是完全正确的，我们在 20 世纪 70 年代之末，遵循朱的思想与方法的基本实质，采用美国数学家 J. F. Ritt 在 1935, 1950 年关于微分方程代数研究书中所提供的某些技术，得出了解任意复多项式方程组的一般算法，并给出了全部复数解的具体表达形式．此后又得出了实系数时求实解的方法，为重要的优化问题提供了一个具体的方法．

由于多种问题往往自然导致多项式方程组的求解，因而我们解方程的一般方法可被应用于形形式式的问题．这些问题可以来自数学自身，也可以来自其他自然科学或工程技术．在本丛书的第一本书，吴文俊的《数学机械化》一书中，可以看到这些应用的实例．在工程技术方面的应用，在本丛书中已有高小山的《几何自动作图与智能 CAD 》与陈发来和冯玉瑜的《代数曲面拼接》两

本专著. 上述解多项式方程组的一般方法已推广至代微分方程的情形. 许多应用以及相应论著正在酝酿之中.

5. 未来的技术革命与时代的使命

宋元时代天元术与四元术的创造，把许多问题特别是几何问题转化成代数方程与方程组的求解问题. 这一方法用于几何可称为几何的代数化. 12 世纪的刘益将新法与“古法”比较，称“省功数倍”，这可以说是减轻脑力劳动使数学走上机械化的道路的一项伟大的成就.

与天元术的创造相伴，宋元时代的数学又引进了相当于现代多项式的概念，建立了多项式的运算法则和消元法的有关代数工具，使几何代数化的方法得到了有系统的发展，具见于宋元时代幸以保存至今的杨辉、李冶、朱世杰的许多著作之中. 几何的代数化是解析几何的前身，这些创造使我国古代数学达到了又一个高峰. 可以说，当时我国已到达了解析几何与微积分的大门，具备了创立这些数学关键领域的条件，但是各种原因使我们数学的雄伟步伐就在这些大门之前停顿下来. 几百年的停顿，使我们这个古代的数学大国在近代变成了数学上的纯粹入超国家. 然而，我国古代机械化与代数化的光辉思想和伟大成就是无法磨灭的. 本人关于数学机械化的研究工作，就是在这些思想与成就启发之下的产物，它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承.

恩格斯曾经指出，枪炮的出现消除了体力上的差别，使中世纪的骑士阶级从此销声匿迹，为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件. 近年有些计算机科学家指出，个人用计算机的出现，其冲击作用可与枪炮的出现相比. 枪炮使人们在体力上难分强弱，而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明愚鲁. 又有人对数学的未来提出看法，认为计算机的出现，将使数学现在一张纸一支笔的方法，在历史的长河中，无异于石器时代的手工方法. 今天的数学家们，不得不面对计算机的挑战，但是，也不必妄自菲薄. 大量繁复的事情交给计算机去做了，人脑将仍然从事富有创造性的劳动.

我国在体力劳动的机械化革命中曾经掉队，以致造成现在的落后状态. 在当前新的一场脑力劳动的机械化革命中，我们不能重蹈覆辙. 数学是一种典型的脑力劳动，它的机械化有着许多其他类型脑力劳动所不及的有利条件. 它的发扬与实现对我国的数学家是一种时代的使命. 我国古代数学的光辉，鼓舞着我们为实现数学的机械化，在某种意义上也可以说是真正的现代化而勇往直前.

吴文俊

2002 年 6 月于北京

前　言

多元多项式的实根分离 (mrealroot) 算法及其相关应用的思想于 1999 年提出，并且初步编制了 Maple 下的相关程序. 同年 10 月，在中国科学院成都计算机应用研究所举行的第一届数学机械化高级讨论班上以及 11 月在四川大学举办的全国第三次生物动力系统研讨会上分别做了报告. 时间仓促，取几位作者名称首字母，称为 HLLP 算法.

随后，我们进一步应用该算法于大量的动力系统定性分析问题，统一处理了 10 余年来文献中关于小扰动极限环的构造，证实了算法的有效性. 2000 年 5 月，在国家重点基础规划项目 (“973” 项目) 年度报告会上，以及 7 月，应马知恩教授邀请，在西安交大举行的全国研究生暑期应用数学讲习班上，报告了我们的工作进展. 同年 10~11 月，应竹内康博教授邀请，由日本数学会资助，在日本静冈大学报告了本书的内容. 2001 年 2 月，应杨路教授邀请，在中国科学院成都计算机应用研究所再次详细报告了我们的内容. 我们应用 mrealroot 算法在高维 Lotka-Volterra 系统和 Liénard 系统获得的新结果已经引起国内外同行的广泛兴趣.

希望本书的出版能够提供给同行们关于实根分离算法以及在微分方程定性分析应用方面的一个参考. 并希望能起到抛砖引玉的作用，对读者有所启发.

致　谢:

本书的初稿完成于 2001 年 2 月. 其后，我们将预印本赠送国内数十位同行专家. 值本书出版之际，对给予我们支持和帮助的各位专家表示真诚的谢意.

本书的写作及完成得到了国家九五攀登项目、国家 “973” 项目、数学机械化应用推广专项经费、国家自然科学基金和浙江省自然科学基金的资助.

感谢吴文俊先生和高小山首席科学家将本书列入《数学机械化丛书》.

陆征一　何 碧　罗 勇

2004 年 2 月

目　录

第1章 引 论

多项式实根分离 (realroot) 算法及其推广 (mrealroot) 不仅具有理论上的重要性，在大量具体问题，包括实根分布、小扰动极限环个数、非等时中心的阶数以及高维系统极限环构造等都有广泛的应用.

1.1 实根分离算法

多项式方程组的求解 (符号和数值) 不仅具有很强的理论意义，同时也有广泛的应用前景. 多项式组求解算法及性质的判定准则包括 Gröbner 基方法，吴方法等. 数值计算的方法包括牛顿算法、同伦算法、特征值方法等. 而与上述两种方法均有不同的关于常系数一元多项式的实根分布 (realroot command) 的算法以区间 (端点为有理数) 形式给出孤立实解的存在和位置估计 (Maple). 利用 Sturm 定理， Descarts 符号准则判别实根位置的算法以及计算时间分析已有较为完整的结果.

此算法根据根的绝对值的上、下界估计，利用 Role 定理， Sturm 序列的符号判别法则，以一系列区间的形式给出实根. 每一个以有理数为端点的区间正好包含一个实根. 在此算法的所有过程中所用到的均为有理数，所以整个计算是无误差的. 本书中，我们要强调的是这种实根分离算法的有效性，即不仅可以确定实根的存在及位置，而且 (特别地) 可以利用所求得的实根 (以区间形式表示) 进行进一步的论证. 我们强调实根分离算法的有效性以及可应用是因为多项式方程组的根作为其系数的函数具有相当的不稳定性. 下面的例子由 Wilkinson 于 1959 年给出，它说明了这种不稳定性.

例 1.1.1 *考虑如下的多项式*

$$W(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+20) = x^{20} + 210x^{19} + \cdots + 20!.$$

显然此多项式正好有 20 个实根 $-1, -2, \cdots, -20$.
现在考虑 $W(x)$ 的一个非常小的扰动

$$\hat{W}(x) = W(x) + 10^{-9}x^{19} = x^{20} + (210 + 10^{-9})x^{19} + \cdots + 20!,$$

其中 10^{-9} 只是在小数点后第九位改变了 x^{19} 的系数. 直观上，因为 $\hat{W}(x)$ 与 $W(x)$ 是如此的接近，$\hat{W}(x)$ 也应该具有 20 个实根. 但事实并非如此，$\hat{W}(x)$ 仅有 12 个实根. 这可由 Sturm 定理直接判断，也可以利用 Maple 的 realroot 命

令验证 (此时 $\hat{W}(x)$ 无重根, 指定分离区间的长度为 1/10):

$$\left[\left[-1,-\frac{15}{16}\right],\ \left[-\frac{33}{16},-2\right],\ \left[-3,-\frac{47}{16}\right],\ \left[-\frac{65}{16},-4\right],\right.$$

$$\left[-5,-\frac{79}{16}\right],\ \left[-\frac{97}{16},-6\right],\ \left[-7,-\frac{111}{16}\right],\ \left[-\frac{129}{16},-8\right],$$

$$\left.\left[-9,-\frac{143}{16}\right],\left[-\frac{161}{16},-10\right],\left[-11,-\frac{175}{16}\right],\left[-\frac{321}{16},-20\right]\right].$$

因为 realroot 算法是一个完全算法, 每个分离区间内含且仅含一个实根, 故 $\hat{W}(x)$ 仅有 12 个实根. 通过完全求解 $\hat{W}(x)=0$ 可以得到另外 4 对复根, 其虚部并不是非常小, 它们介于 0.1 至 0.89 之间. 这说明在求解系数为近似值的多项式实根时, 必须注意根的分布可能受系数的取值精度影响.

一个类似的简单例子为如下方程求解.

例 1.1.2

$$\begin{aligned} x^2+2x+3+y^5-y&=0,\\ y^6-y^2+2y&=0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

显然, 第二个方程除平凡实解 $y=0$ 以外, 在 $[-2,-1]$ 中还有一实根. 取其 10 位有效数字的近似值: $y=-1.267168305$, 将其代入系统 (1.1) 的第一个方程, 有

$$x^2+2x+0.999999995=0.$$

其有解 $x_1=-1.000070711$, $x_2=-0.9999292893$, 即 (1.1) 有两个相异实根.

现在取 8 位有效数字的近似值: $y=-1.2671683$, 代入第一个方程有

$$x^2+2x+1.000000054=0.$$

此方程有一对共轭的复根 $x_1=-1+0.00023238\mathrm{i}$, $x_2=-1-0.00023238\mathrm{i}$. 这说明, 在某些情况下, 不同的近似程度导致根具有完全不同的性态. 实际上, 第二个方程的非零实根满足 $y^5-y=-2$, 代入第一方程有

$$x^2+2x+1=0.$$

所以, 该方程精确解应为重根 -1. 以上近似计算说明在重根情形, 数值求解的脆弱性.

例 1.1.1 中, $\hat{W}(x)$ 的 12 个实根是通过实根分离算法得到的. 一元多项式的实根分离算法以孤立区间的形式保证了其实根在某种意义上的准确性. 相对于一元多项式实根分布的算法和实现, 一个自然的问题是:

问题 1.1.3 *能否推广 Maple 中的 realroot 算法，使其能确定多元多项式实根的存在性和位置估计？*

本书的目的是将关于一元多项式实根分离算法推广到多元常系数多项式组，并给出这种区间形式的实根的代入方法和判定，使其可应用于一类不等式问题. 第 2 章将给出包括吴方法、结式算法、 Gröbner 基，根的估计等基本理论和结论. 第 3 章给出关于多元多项式的实根分离 (mrealroot) 算法的理论及证明.

多元多项式系统的实根求解问题出现在大量的实际问题中. 考虑如下典型的两种群竞争扩散系统:

$$\dot{x}_1 = x_1(4 - x_1 - y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_2 - y_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2),$$

$$\dot{y}_1 = y_1(3 - 2x_1 - y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1),$$

$$\dot{y}_2 = y_2(3 - 2x_2 - y_2) + \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

Goh 曾用计算机模拟显示此系统有惟一正平衡点且为全局稳定的. 根据单调系统理论，只需证明此系统有惟一的正平衡点即可保证系统的稳定性. 利用本书中的 mrealroot 算法可以给出该系统存在惟一正平衡点的证明并以区间形式给出其精确解. 多项式实根个数的判定及求解为第 4 章的主要内容，一些相关的问题也将在第 4 章中讨论.

1.2 平面系统的小扰动极限环

平面微分多项式系统小扰动极限环的存在性及个数是与 Hilbert 第十六问题密切相关的近 10 年来国际上普遍关注的问题. 现有文献中的各个作者都是针对不同问题，利用各自技巧根据中心 - 焦点的存在条件构造出尽可能多的极限环. 实际上，小扰动极限环的构造问题正是一个多项式组实零点的存在及结构的问题. 另一个自然的问题是:

问题 *能否给出一个一般的算法用于构造平面微分多项式系统小扰动极限环？*

小扰动极限环的构造总是通过利用 Poincaré 方法计算出焦点量，其为对应平面系统系数的多项式组. 对于小扰动极限环，我们证明了本书中 mrealroot 算

法可以判断多项式组的独立与否，并借此统一地完成小扰动极限环的构造．具体地讲，如果 mrealroot 算法求得的前 $k-1$ 个焦点量 (含 $k-1$ 个参数) 有实根使得第 k 个焦点量不为零，则原平面系统至少可以有 k 个小扰动极限环．而对于一个给定的微分系统，小扰动极限环的上界通常可以通过结式算法，验证前 k 个焦点量 (含 k 个参数) 无公共实根而得到．利用此方法，在第 5 章中我们统一地给出了近年来国际上一系列关于平面三次系统小扰动极限环上界或下界的最好结果．此方法理论上对于更为复杂和困难的问题也是有效的，只是需要我们在处理大多项式三角化方面提出更为有效的办法．

Liénard 系统是常微分方程定性及稳定性分析研究中的一类典型和重要的系统，其结论较为丰富．除了在应用科学，包括非线性电子环路，真空管震荡器中的广泛应用之外，在平面系统的相当一部分研究中，人们往往将所研究的系统进行变换化为 Liénard 系统以应用该系统已有研究结果．由于一般多项式微分系统极限环个数的上界问题几乎是一个不可能解决的问题，现在关于多项式 Liénard 系统的研究中，小扰动极限环个数的上界成为了重要的课题．与三次平面系统类似， Liénard 系统小扰动极限环的构造及个数的估计问题也可以化为一个纯代数及多项式组实根的存在判定问题．当然其问题本身与三次系统有一些差异，这是因为 Liénard 系统中的多项式次数可达到十几次，几十次，甚至更高．在第 6 章，我们将对 Liénard 系统的小扰动极限环问题进行详细的讨论．

1.3 弱中心及阶数

在中心焦点问题讨论中，我们没有涉及中心条件的论证，而只是在平面系统具有弱焦点时，利用 mrealroot 算法给出小扰动极限环的统一构造．而前者的讨论主要是一些技巧性和经验性的工作．

另一方面，当系统存在中心时，又可以进一步考虑其等时性．具体的讲，当系统存在 (非退化) 中心时，又可以考虑每个周期轨道的周期．当所有的周期都相同时，此中心称为等时中心．当中心为非等时时，可以根据周期常数定义其阶数，研究其定性性质及相关问题．

第 7 章中，我们首先给出弱中心及等时中心的定义及基本性质，讨论一些构造等时中心的常规论证．我们主要关心的是非等时中心时给出弱中心最大阶数的一般性论证．这包括周期常数的计算，周期函数系统 (多项式) 的三角化及 mrealroot 算法求解．与小扰动极限环类似，利用 mrealroot 算法求出前 k 个周期常数，其独立性保证了系统的中心正好为 k 阶弱中心．

本章中，我们将给出文献中关于弱中心构造问题的一个统一处理．

1.4 高维系统的极限环

除了以上几章考虑的平面多项式系统极限环的上界问题，我们将在第 8 章中考虑三维系统的极限环个数问题，由于其上界问题基本上不可能解决，我们考虑其下界问题，即至少存在多少极限环的问题. 本章考虑数学生物学领域中最为基本和重要的 Lotka-Volterra 系统. May 及 Liénard 于 1975 年首次在一个特殊的三种群竞争 Lotka-Volterra 系统中利用计算机模拟发现了边界面上异宿轨及其排斥、吸引性. 法国数学家 Goste,Peyraud, Coullet, 奥地利数学家 Shuster 及 Hofbauer 分别独立考虑了更为一般的三维 Lotka-Volterra 竞争系统，证明了 May-Liénard 现象的普遍性及系统极限性态与边界异宿轨的非通有性. 虽然高维 Lotka-Volterra 系统极限环的存在性在 20 世纪 70 年代末期已经被解决，但多个极限环的存在性直到 1994 年才由 Hofbauer 和 So 根据 Hirsch 的单调系统和永久生存理论通过 Hopf 分支和 Poincaré-Bendixson 定理得到. 我们将根据 Hirsch 的单调理论，沿 Hofbauer 和 So 的思路，利用线性变换将三维 Lotka-Volterra 系统的系数矩阵化为分块对角型，构造中心流形将三维系统降维. 最后将极限环构造问题化为多项式组实根的存在问题，利用 mrealroot 算法给出结论. 本章的结果给出了 Hofbauer 和 So 的一个公开问题的解答，否定了他们关于三维 Lotka-Volterra 竞争系统极限环最大个数的猜想，同时给出了非竞争三维系统存在两个极限环的例子.

注 释

关于吴方法，在吴文俊的系列论文及专著 [71, 72, 73] 中有详细论述，Gröbner 基方法由 Buchberger 在 [2] 中给出，牛顿算法及复杂度估计由 Smale[62] 给出，同伦算法的理论可在 [39] 中找到.

例 1.1.1 及例 1.1.2 均取自 [19]，其中例 1.1.1 最早由 [70] 给出，高维系统的极限环构造属于 Coste et al [17] 以及 Hofbauer [30].