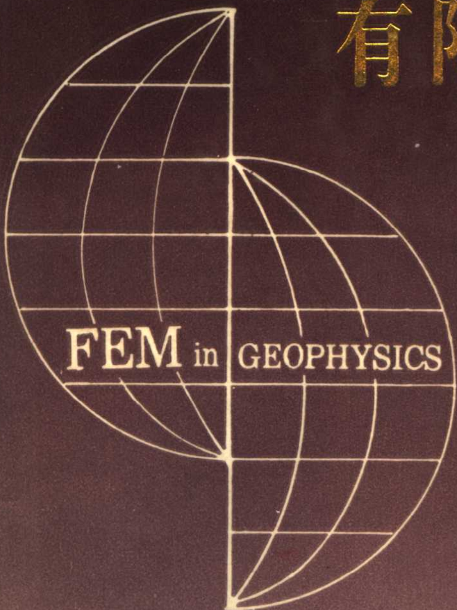
地球物理中的有限单元法



徐世浙 著

科学出版社

地球物理中的有限单元法

徐世浙　著

科　学　出　版　社

1994

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书介绍有限单元法的基本原理及其在地球物理中求解各类边值问题中的应用. 全书共九章，第一、二章介绍变分原理及等参单元，使读者了解有限单元法的基本原理和方法；第三章至第八章是应用部分，介绍有限单元法在地球物理各领域：位场延拓与变换、直流电场、重磁场、大地电磁场、弹性波场、地热场等问题中的应用；第九章对加权余量法作了简单介绍. 书中给出最基本的计算程序.

本书的读者对象是地球物理专业的大学生、研究生和科技人员，也可作为应用数学专业师生的参考材料.

本书是作者的计算地球物理系列著作中的第二部，第一部是《地球物理中的复变函数》，第三部是《地球物理中的边界单元法》.

地球物理中的有限单元法

徐世浙　著

责任编辑　彭　斌　　朱咸滨

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

山东省胶州市印刷厂　印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1994 年 12 月第一版　　开本：850×1168 1/32

1994 年 12 月第一次印刷　　印张：10

印数：0001－1,000　　字数：265,000

ISBN 7－03－004609－9/P・817

定价：11.95 元

谨以此书纪念我的老师

何 泽 庆 先 生

（1926—1974）

何泽庆先生是我的老师.他的渊博的学识为地球物理学界同仁所称颂,他为真理而奋斗的高尚品质为他的朋友所钦佩.在我担任他的助教期间,学术上和思想上深受他的教诲.每当我回忆他坎坷的一生,为他英年早逝而无比痛惜.他离开人世已二十年整,我谨以此书表达对他无比敬仰之心.

徐世浙

序

有限单元法是解偏微分方程的有力的数值方法，50年代，首先在力学中发展起来；70年代，开始应用于地球物理的正演计算，解决了许多计算难题，现已成为地球物理正演中最主要的数值方法之一.

有限单元法在力学中应用的书籍比较多，但介绍有限单元法在地球物理中应用的专著不多见. 作者在其科研实践中，将有限单元法应用于地球物理的许多方面，首次解决了某些地球物理计算问题. 例如，电导率分层线性变化的水平层的点电源场的数值解，点源二维电场中次剖面上电位的计算，一维分层连续介质大地电磁场模拟和地形对大地电磁场的影响等. 作者将这方面的成果系统整理，并收集有限单元法在地震和地热中的应用研究成果，再结合有限单元法的基本理论撰写此书. 这是国内第一本比较系统阐述这一方法在地球物理中应用的专著.

本书主要从变分原理出发来推导有限单元方程. 由于使用了哈密顿算子，使推导过程比一般文献中所用的方法简单得多. 书中对有限单元法的两个基础部分：变分原理和形函数，作了较清楚的说明. 叙述条理清晰，容易阅读. 书中还介绍了最基本的有限单元法计算程序，所以，本书对于初学者也颇具价值. 我相信，本书的出版将对我国计算地球物理工作起重要的推动作用.

傅承义

中国科学院院士

1991. 10. 27

引　言

在地球物理的理论计算中，存在着两类基本问题：正问题和反问题.

给定场源的分布，求解场值的大小，这是正问题，或称正演问题. 例如，在磁法勘探中，给定了铁矿体的分布形态、磁化率和磁化强度，计算铁矿体产生的磁异常；在电法勘探中，给定了各种岩石电阻率及岩石的分布形态，计算与各种测量排列装置相应的视电阻率；等等.

解决正问题的途径有：(1)解析法，即用解析公式表达场值的大小，这是各种地球物理教科书讲得最多的方法. 但是，只对少数规则形体，例如球体、板状体和水平层等，才能用解析法导出场值的解析表达式，因而，此方法的适用范围非常有限. (2)模型实验法，这是电法勘探中使用较多的方法. 例如，各种水槽、土槽模型实验. 但模型的制作比较麻烦，尤其是物性分布复杂的模型很难制作. (3)数值模拟法，即根据地球物理中的偏微分方程和边界条件，用数值方法求场值的近似解. 这是一种近似方法，但它适用于复杂物性分布和复杂边界形状的地球物理计算，所以适用范围非常广泛. 数值模拟法需要进行大量的计算工作. 近三十多年来，由于计算机的迅速发展，克服了计算工作量浩大的困难，数值模拟法已成为地球物理正演的最主要的方法.

根据场值的分布，反推出场源的分布，这是反问题，或称反演问题. 地球物理勘探的根本目的是了解地下地质体的分布. 地球物理测量得到的场值，与场源的分布有密切关系. 使用特定的反演方法，从场的分布反演出场源的分布，即求出场源的物性分布的特征，这称为地球物理反演，或地球物理解释. 然后，结合地质情况，将场源的物理特性“翻译”成地质特性，从而获得地下地质体分布的资料，这称为地球物理资料的地质解释. 可见，反演(或反问题)在地球物理中占有极重要的位置.

地球物理反演的方法种类繁多. 例如，特殊点法，即根据地球物理场的某些特殊点的场值与位置，来确定场源的物性与分

布. 这是重磁资料解释中经常用到的方法. 现在用的最普遍的反演方法是选择法(或称拟合法),即假定地下介质有某种物性分布,用正演方法计算出场的分布,与实际测定的场值进行对比,如果两者相差太大,就修改原来的模型,直到计算的场值与实测的场值最佳拟合为止. 由此选择出的模型被看作是最佳的反演结果. 至于如何达到最佳反演结果,其途径也是多种多样的,有人工选择法,有数学上的最优化自动拟合法等. 目前,最优化法用得非常广泛. 在拟合法里,必须用到正演计算,而且是复杂物性分布和复杂边界形状的正演计算. 由此可见,数值模拟的正演计算是地球物理反演的基础,对提高地球勘探的地质效果有重要意义.

地球物理正演的数值计算方法,种类也很多,最常用的方法有二种:有限差分法和有限单元法.

(1)有限差分法(Finit Difference Method—FDM). 这是一种经典的数值方法. 它的优点是方法简便,容易在计算机上实现;缺点是,当物性参数复杂分布或场域的几何特征不规则时,有限差分法的适应性差.

(2)有限单元法(Finit Element Method—FEM). 这是 50 年代首先在弹性力学中发展起来的方法. 主要优点是,适用于物性参数复杂分布的区域,但计算量大. 随着计算机的发展,有限单元法在解决各个工程领域的许多数学物理问题中,得到了广泛的应用,成为一种高效、通用的计算方法. 地球物理中的一些边值问题,也采用了有限单元法,解决了许多从前无法计算的地球物理问题.

有限单元法解决数学物理边值问题的基本思路和过程如下.

1)给出地球物理边值问题中的偏微分方程和边界条件(及初始条件). 这一点看起来似乎容易,但做起来并不容易,特别是边界条件的给定. 只有对地球物理方法的原理和问题有深入的理解,才能给边值问题中的偏微分方程和边界条件以正确的描述. 所以本书在介绍有限单元法在某个边值问题的应用之前,首

先介绍这个边值问题的偏微分方程和边界条件的详细推导.

2)将地球物理边值问题转变为有限单元法方程.实现这种转变的主要数学工具是变分法,用变分法得到的有限元法方程称为泛函极值问题.本书将详细介绍变分法的原理,同时也将介绍加权余量法在推导有限元法方程中的应用.

3)用有限单元法解泛函极值问题,其步骤大致如下:

把研究区域剖分成有限个小单元,在每个单元上,把函数简化成线性函数、二次函数或高次函数,这称为单元上函数的插值.用简化后的函数计算每个单元上的泛函.各单元之间,通过单元间的节点上的函数值相互联系起来.对各单元的泛函求和,获得整个区域上的泛函.这样,有限单元法将连续函数的泛函,离散成各单元节点上函数值的泛函.根据泛函取极值的条件,得到各节点的函数值应满足的线性代数方程组.解代数方程组,得到各节点的函数值.

有限单元法的主要优点是,适用于物性复杂分布的地球物理问题,而且,其解题过程也比较规范化.这些优点使有限单元法在地球物理中获得广泛的应用.但是,有限单元法是区域型方法,必须在全区域进行剖分.剖分后的单元和节点数目多,最后得到的线性代数方程组很大.特别是三维问题和地球物理中常遇的无界区域问题,需要中、大型计算机,才能完成有限单元法的计算.这是有限单元法的主要缺点.

目前已经有许多有限单元法的书籍,其中几本专门介绍有限单元法在地球物理某个分支学科中的应用,但尚未见到系统介绍有限单元法在地球物理中应用的专著.作者在科研实践中,将有限单元法应用于地球物理的许多方面:位场延拓、重磁正演、直流电法正演、大地电磁正演等.本书将这方面的成果系统整理,并收集有限单元法在地震和地热中应用的研究成果,再结合有限单元法的基本理论著述而成.作者希望本书的出版将为地球物理专业的大学生、研究生和科技人员提供学习有限单元法的有益的参考书.

在撰写本书的过程中,李予国、刘斌分别帮助收集、整理第

七章和第八章的资料，对本书的完成起了重要的作用，丁咏霞负责本书的录入，科学出版社彭斌、朱葳滨为本书的校核、出版付出了辛勤的劳动，在此特表谢意.

本书是作者的计算地球物理系列著作中的第二部，第一部是《地球物理中的复变函数》，第三部是《地球物理中的边界单元法》.

由于作者水平限制，缺点和错误在所难免，恳请大家批评指正.

徐世浙

1994 年 3 月 于青岛

目　录

第一章　变分法

变分法是研究求泛函极值的一种方法;求泛函极值的问题,称为变分问题.

地球物理研究的场,如磁场、重力场、电场、电磁场、应力场、温度场等,可用偏微分方程及相应的边界条件(或初始条件)来描述.由偏微分方程及边界条件组成了所谓的边值问题.边值问题与变分问题具有等价性,所以解出变分问题,就等于解出边值问题.

里兹(Ritz)法是求解变分问题的古典方法,它用在全区域内选择近似函数的方法去解变分问题.在复杂边界条件时,这个方法遇到困难.50 年代发展了有限单元法.有限单元法将区域剖分为许多子单元,在单元内选择近似函数,从而成为解变分问题的有力工具.

本章将介绍变分法的基本原理,变分问题与边值问题的关系,并简单介绍里兹法,以及有限单元法解变分问题的基本思路.

§1.1　泛函与变分问题

数学中的函数概念是众所周知的.例如,x 是自变量,y 是应变量,则函数可表示为

$$y = y(x) .$$

如果 v 又是一条曲线 $y = y(x)$ 的函数,即

$$v = v[y] = v[y(x)] , \qquad (1.1.1)$$

则称 v 为 y 的泛函数,简称为泛函,意为函数的函数.

应当指出,泛函与复合函数是完全不同的两个概念.例如,

在

$$z = y^2, \quad y = \sin x \tag{1.1.2}$$

中，给定一个 x 值，得到一个 y 值，相应地有一个 z 值，x 是 y 的自变量，y 是 z 的自变量. 所以(1.1.2)式中的二个方程组成一个复合函数. 在(1.1.1)式中，整条曲线 $y = y(x)$ 是自变量，v 是 $y(x)$ 的函数，这是泛函.

下面举例说明泛函和泛函极值的概念.

例 1　联结两点的曲线的弧长

A,B 是平面上的两点，$y(x)$ 是通过 A,B 的曲线的方程(图 1.1.1). 曲线的元弧的长度是

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ ,$$

于是从 A 点至 B 点的曲线的长度

$$l = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\ dx = l[y(x)].$$

曲线长度 l 是曲线 $y(x)$ 的函数，称 l 为 y 的泛函，记作 $l[y(x)]$. 显然，$l[y(x)]$ 不是复合函数.

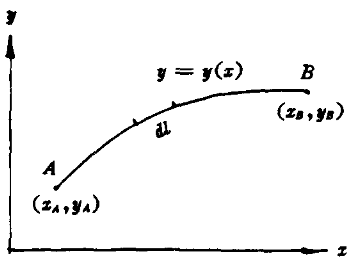


图 1.1.1

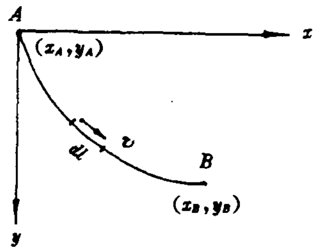


图 1.1.2

如果提出这样的问题：求联结 A,B 两点的最短线 $y = y(x)$ 的方程，也就是，求满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned} l = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\ dx \to \min, \\ y_A = y(x_A),\ y_B = y(x_B) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.3}$$

的 y，这称为泛函极值问题，或称为变分问题. 因为数学中，称函

数极值问题为微分问题，所以相应地，称泛函极值问题为变分问题.

例 2　质点沿曲线自由下滑的时间

联结不在同一垂线上的二点 A,B 的曲线 $y(x)$，使质点无摩擦地从 A 点沿 $y(x)$ 滑至 B 点(图 1.1.2)，现计算所需的时间. 沿元弧段 dl 下滑的时间为

$$t = \int dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx = t[y(x)] .$$

时间 t 是曲线 $y(x)$ 的函数，称 t 为 y 的泛函. 如果问题是，求联结 A,B 两点的最速下降线 $y(x)$ 的方程，即求满足下列条件

$$\left.\begin{aligned} & t = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \to \min , \\ & y_A = y(x_A),\ y_B = y(x_B) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.4}$$

的 y，这就是变分问题.

例 3　曲面的面积

Ω 是 xy 平面上的区域，Γ 是 Ω 的边界，$z=z(x,y)$ 是 Ω 上的曲面方程(图 1.1.3). 曲面的元面积：

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy .$$

Ω 上的曲面的面积是

$$S = \iint dS = \iint_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = S[z(x,y)] .$$

面积 S 是曲面 $z=z(x,y)$ 的函数，称 S 为 z 的泛函. 如果问题是：求固定边界 $z|_\Gamma = f(x,y)$ 的最小面积的曲面方程，即求满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned} & S = \iint_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \to \min , \\ & z|_\Gamma = f(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.5}$$

的 z，这就是变分问题.

总之，满足一定边界条件的泛函极值问题称为变分问题.

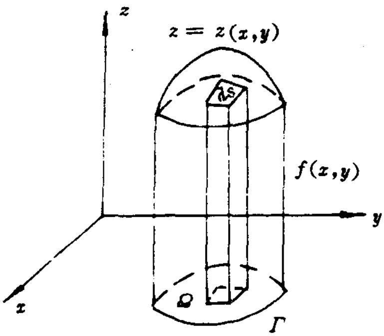


图 1.1.3

§1.2 泛函极值与变分

上节提到，变分问题就是研究泛函极值的问题. 泛函极值的计算方法非常类似于函数极值的计算方法. 为便于理解，本节将用对比的方法，从函数极值的计算推出泛函极值的计算方法(Эльсгольц,1952).

在函数 $y = y(x)$ 中，x 是自变量. 自变量 x 的增量 Δx，就是 x 的微分 dx(见图 1.2.1). 在泛函 $v = v[y(x)]$ 中，函数 $y(x)$ 是自变量. 自变量 $y(x)$ 的增量 $\delta y(x)$ 是指满足同一边界条件的两个 $y(x)$ 之差，如图 1.2.2(a) 中联结 A,B 两点的曲线 $y_1(x)$ 与 $y_0(x)$ 之差：

$$\delta y(x) = y_1(x) - y_0(x) .$$

δy 也称为自变量 y 的变分.

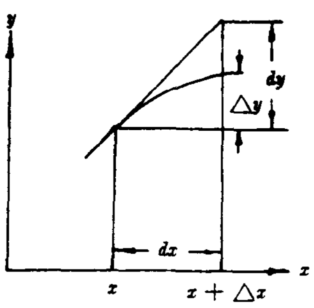


图 1.2.1

应当指出：

(1) δy 是 x 的函数，即 $\delta y(x)$；

(2)变分 δy 与微分 dy 是二个不同的概念：dy 是 x 变化引起的 y 的微分(见图 1.2.1)，而 δy 是对应于同一个 x 的二个 $y(x)$ 之差(见图 1.2.2(a))；

(3)若 $y_0(x)$ 固定，则有无限多种 $\delta y(x)$[见图 1.2.2(a) 和 (b)].

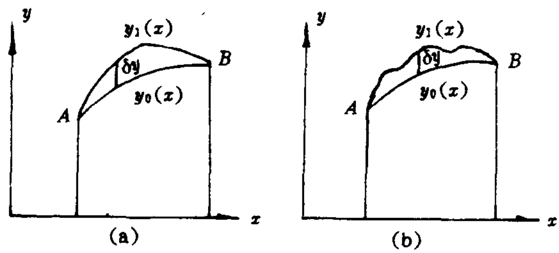


图 1.2.2

函数 $y = y(x)$ 的增量 Δy 的定义是

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) .$$

微分 dy 的定义是

$$dy = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} dx = y'(x) dx .$$

在导数

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \tag{1.2.1}$$

的计算中，将 x 固定，令 Δx 在变化.

类似地，泛函 $v = v[y(x)]$ 的增量 Δv 的定义是

$$\Delta v = v[y + \delta y] - v[y] .$$

变分 Δv 的定义是

$$\delta v = \lim_{\delta y \to 0} \Delta v = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\delta y} \delta y = \lim_{\delta y \to 0} \frac{v[y + \delta y] - v[y]}{\delta y} \delta y$$
$$= v'[y] \delta y ,$$

其中