最新版21世纪高等学校导学导考教材

线性代数

学习导引

葛照强 刘 锋 编

- 各章内容要点
- 基本解题方法
- 考研题例分析
- 精选习题与答案

陕西科学技术出版社

最新版21世纪高等学校导学与导考教材

线性代数学习导引

葛照强　刘　锋　编

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习导引/葛照强,刘　锋　编. - 西安:陕西科学技术出版社 2005.6
ISBN 7 - 5369 - 3936 - 1

I.线… Ⅱ.①葛… ②刘…　Ⅲ.线性代数 - 自学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 052269 号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号　邮编 710003 电话（029）87211894　传真（029）87218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话（029）87212206　87260001
印　　刷	西安永琛快速印务有限责任公司
规　　格	880mm × 1230mm　　1/32 开本
字　　数	365　千字
印　　张	11
印　　数	1 ~ 4000 册
版　　次	2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷
定　　价	18.00　元

前　　言

线性代数是理工科院校一门重要的基础课，它不仅是其他数学课的基础，而且是物理、力学、电学等的基础。它的理论和方法已成为当今科学研究和处理工程技术领域问题的有力工具。

线性代数课程学时少、内容多、比较抽象，且有一套自身特有的理论体系、思维方法和解题技巧，但只要灵活掌握该门课程的规律，学习起来就得心应手。要想尽快的掌握这些规律，借助于一本合适的学习指导书对于初学者来说是十分必要的。作者根据多年的教学经验，对本门课程的内容分门别类，提纲挈领，编写了这本线性代数学习导引。

全书共分 6 章，每章按内容要点、解题方法、考研题例分析、习题与参考答案四部分编写。通过对大量有代表性例题的分析和求解，引导学生掌握线性代数的理论规律、思维方法和解题技巧，使学生可以达到“事半功倍”、“举一反三”的效果；提高基本运算、逻辑推理及创新能力；加强数学素养。

参加编写工作的有葛照强（完成第 1、2、3 章），刘锋（完成第 4、5、6 章）。由葛照强完成全书的统稿工作。

本书可作为高等学校理工科类本科生线性代数课程学习参考书，也可作为相应专业的读者考研复习和强化训练之用。限于作者水平，书中可能会有不妥之处，敬请读者批评指正。

葛照强

2005 年 5 月于西安交通大学

目 录

第 1 章　n 阶行列式

1.1　内容要点

1. 排列与逆序

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组,称为一个 n 级排列.

定义 2　在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若有较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 前面,则称 p_i 与 p_j 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记作 $N(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

在一个排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这种作出新排列的过程叫对换.

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

定理 2　n 级排列共有 $n!$ 个($n>1$),其中奇偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

定义 3　设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表,则记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其中横排称为行,纵排称为列. 它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个数乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 即 n 阶行列式(简记为 D 或 $\Delta(a_{ij})$)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $t=N(p_1p_2\cdots p_n)$,数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

3. 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等（行列式 D 的转置行列式记作 D'）.

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式变号 .

推论 若行列式中有两行（列）相同，则此行列式为零 .

性质 3 用数 k 乘行列式的一行（列），等于用数 k 乘此行列式 .

推论 1 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面 .

推论 2 若行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式为零 .

性质 4 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两个数之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + b'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + b'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + b'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下面两个行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数后加到另一行（列）的对应元素上去，行列式不变 .

4. 行列式按行（列）展开定理

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，$A_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式 .

定理 3 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子

式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j).$$

5. 拉普拉斯展开定理

在 n 阶行列式 D 中，选定 k 行 k 列($k<n$)，位于这些行和列交点上的 k^2 个元素不改变原来位置组成的 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式；在 D 中划去这 k 行 k 列又得到一个 $n-k$ 阶子式 N，称为 M 的余子式. 而 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}N$ 称为 M 的代数余子式(其中 $i_1,\cdots,i_k;j_1,\cdots,j_k$ 分别是 M 的行、列在 D 中的行、列指标).

定理4　设在 n 阶行列式 D 中，取定某 k 行(列)($1\leqslant k\leqslant n-1$)，则在这 k 行(列)中所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

6. 范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

7. 克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1}$$

定理5　(克莱姆法则) 如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么，方程组(1)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{2}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组(1) 右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个方程的齐次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{3}$$

定理6 若齐次线性方程组(3) 的系数行列式 $D\neq 0$,则齐次线性方程组(3) 只有零解.

定理7 若齐次线性方程组(3) 有非零解,则它的系数行列式 $D=0$.

[附] **行列式乘法规则:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 c_{ij} 是 $\Delta(a_{ij})$ 的第 i 行与 $\Delta(b_{ij})$ 的第 j 列对应元素乘积之和,即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+b_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

由于行列式是个数,也可分别算出行列式 $\Delta(a_{ij})$、$\Delta(b_{ij})$ 的值,然后再相乘.

1.2 解题方法

1. 基本概念

1.1 设 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 I,问排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数为多少?

解 对任意二不同数字 $i,j(\leqslant n)$,由于它们要么构成 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个逆序,要么构成 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的一个逆序,且不同时构成这两个排列的逆序,故

$N(i_n i_{n-1}\cdots i_1) = C_n^2 - I.$

1.2　选取 i 和 k 的值，使得乘积 $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ 含于某6阶行列式且带有负号.

解　由题设知 $i,k = 1$ 或5，且 $i \neq k$. 当 $i = 1, k = 5$ 时，重排乘积，使各因子的行标成自然顺序：

$$a_{15}a_{21}a_{33}a_{46}a_{54}a_{62},$$

由 $N(513642) = 1+4+1+2 = 8$ 知，原乘积在6阶行列式中带正号，不合题意，应舍去，故 $i = 5, k = 1$ 即为所求.

1.3　写出5阶行列式 $D_5 = \Delta(a_{ij})$ 中包含 a_{13}, a_{25} 的所有带正号的项.

解　D_5 中包含元素 a_{13}, a_{25} 的一般项为 $(-1)^{N(35klm)}a_{13}a_{25}a_{3k}a_{4l}a_{5m}$. 就 k,l,m 的所有可能取值，列表讨论如下：

(k,l,m)	$(1,2,4)$	$(1,4,2)$	$(2,1,4)$	$(2,4,1)$	$(4,1,2)$	$(4,2,1)$
$N(35klm)$	5	6	6	7	7	8

由上表可知，D_5 中包含元素 a_{13}, a_{25} 的所有带正号的项为：

$$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},\quad a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},\quad a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

1.4　利用行列式定义计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

其中第2,3行及第2,3列上的元素都不等于零.

解　D_5 的一般项为

$$(-1)^{N(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}.$$

由于 p_1, p_4, p_5 只能在1,2,3,4,5中取不同的值，故 p_1, p_4, p_5 中至少有一个要取1,4,5中之一数，相应地 $a_{ip_i} = 0$，从而 $(-1)^{N(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5} = 0$，于是 $D_5 = 0$.

1.5　若一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数多于 $n^2 - n$，问此行列式的值等于多少？为什么？

解　此行列式的值等于零. 事实上，设此行列式为 $\Delta(a_{ij})$，则其一般项为

$$(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

由于$\Delta(a_{ij})$中零元素个数多于n^2-n个,所以其中非零元素个数少于$n^2-(n^2-n)=n$个, 从而a_{1p_1}, a_{2p_2}, $\cdots$, a_{np_n}中至少有一个为零, 于是$(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$,故$\Delta(a_{ij})=0$.

1.6 试证:如果在n阶行列式D中,处于某k行和某l列交叉处的各元素均等于零,且$k+l>n$,则$D=0$.

证 设$D=\Delta(a_{ij})$,则D的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

因$a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$中位于题设$k$行的元素有$k$个,而这$k$个元素中不在题设$l$列的元素至多有$(n-l)$个,因此,其中至少有$k-(n-l)=k+l-n\geqslant 1$个元素在题设$l$列之一列,即$a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$中至少有一个元素位于题设$k$行及$l$列的某交叉处,于是$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=0$,故$D=0$.

1.7 利用行列式定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&a&0\\2&0&0&-1\\a&1&0&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}.$$

解 $D=(-1)^{N(1423)}1\times(-1)\times1\times1+(-1)^{N(3124)}a\times2\times1\times2$

$=(-1)^2(-1)+(-1)^2 4a=4a-1.$

1.8 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix}-x&3&1&3&0\\x&3&2x&11&4\\-1&x&0&4&3x\\2&21&4&x&5\\1&-7x&3&-1&2\end{vmatrix},$$

求$f(x)$中x^4的系数.

解法1 $f(x)$中因子含x的元素有$a_{11},a_{21},a_{23},a_{32},a_{35},a_{44},a_{52}$,因此,含有因子$x$的元素$a_{ip_i}$的列标只能取$p_1=1;p_2=1,3;p_3=2,5;p_4=4;p_5=2$,于是,含$x^4$的项中元素$a_{ip_i}$的列标只能取

$p_1=1,p_2=3,p_3=2,p_4=4$与$p_2=1,p_3=5,p_4=4,p_5=2$,

相应的5级排列只有1 3 2 4 5, 3 1 5 4 2,故含x^4的项为

$$(-1)^{N(1\,3\,2\,4\,5)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$

$$(-1)^{N(3\,1\,5\,4\,2)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为25.

解法2　将 $f(x)$ 化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式，为此将 $a_{21}=x$ 及 $a_{32}=x$ 变成零元素，得到

$$f(x)=\begin{vmatrix}-x & 3 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4\\ -\frac{6}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{27}{7} & 3x+\frac{2}{7}\\ 2 & 21 & 4 & x & 5\\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2\end{vmatrix},$$

x^4 的系数是下列两项系数的和：

$$(-1)^{N(1\,3\,5\,4\,2)}(-x)(1)(3x)(x)(-7x)=21x^4,$$

$$(-1)^{N(1\,3\,5\,4\,2)}(-x)(2x)(\frac{2}{7})(x)(-7x)=4x^4,$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为25.

解法3　将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式．为此将 $f(x)$ 的第1行加到第2行，第3行的7倍加到第5行，再将所得行列式的第5列减去第2列的3倍，最后将新行列式的第2,3行对调，得

$$f(x)=-\begin{vmatrix}-x & 3 & 1 & 3 & -9\\ -1 & x & 0 & 4 & 0\\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14\\ 2 & 21 & 4 & x & -58\\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2\end{vmatrix},$$

含 x^4 的项为 $(-1)(-x)\cdot x\cdot 2x\cdot x\cdot 2=4x^4$，$(-1)(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot 21x=21x^4$，所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为25.

2. 基本性质

1.9　试证：如果行列式 D 关于主对角线对称的元素是共轭复数（实数是它的特殊情形），亦即对任何下标 $i,j,\bar{a}_{ij}=a_{ji}$，则该行列式是实数．

证 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则由行列式的定义及共轭运算律,有

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a}_{n1} & \overline{a}_{n2} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

但 $\overline{a}_{ij}=a_{ji}$,所以 $\overline{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D'=D$,即 $\overline{D}=D$,故 D 为实数.

1.10 若行列式 $D_n=\Delta(a_{ij})$ 的元素 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 D_n 是反对称行列式(其中由 $a_{ii}=-a_{ii}$ 可推出 $a_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n$). 证明:奇数阶反对称行列式的值为零.

证 设 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$,根据行列式的性质 3 的推论和性质 1,得

$$D_n=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^nD_n'=(-1)^nD_n,$$

故 n 为奇数时,$D_n=-D_n$,由此得 $D_n=0$.

1.11 n 阶行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 中的每个数 a_{ij} 分别乘以 $b^{i-j}(b\neq 0)$,问得到的行列式是否与原行列式 D 相等?

解 行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 中的每个数 a_{ij} 分别乘以 b^{i-j},得

$$\begin{vmatrix} b^{1-1}a_{11} & b^{1-2}a_{12} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ b^{2-1}a_{21} & b^{2-2}a_{22} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & \cdots & b^{n-n}a_{nn} \end{vmatrix} = b^{1+2+\cdots+n}\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-2}a_{12} & \cdots & b^{-n}a_{1n} \\ b^{-1}a_{21} & b^{-2}a_{22} & \cdots & b^{-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{-1}a_{n1} & b^{-2}a_{n2} & \cdots & b^{-n}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b^{1+2+\cdots+n}b^{-1-2-\cdots-n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

所以得到的行列式与原行列式 D 相等.

1.12　设 M_{ij},A_{ij} 分别是 n 阶行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中元素 a_{ij} 的余子式及代数余子式,$i,j=1,2,\cdots,n$. 试证:$\Delta(M_{ij})=\Delta(A_{ij})$.

证　由代数余子式与余子式的关系 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 知

$$A_{ij}=(-1)^{i-j}M_{ij}=b^{i-j}M_{ij},\ b=-1\neq 0,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

于是由 1.11 题的结论可知 $\Delta(M_{ij})=\Delta(A_{ij})$.

1.13　不计算行列式,确定下面两个循环行列式间的关系:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

它们是由同一些数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 应用循环排列而得到的, 但两者循环的方向相反.

解　将这两个行列式依次记为 D_1,D_2,并将 D_2 的第 1 至 n 行依次记为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,则 D_1 的第 1 至 n 行依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_2$.

对换排列 $1\ n(n-1)\cdots 2$ 中的元素,使其变为自然排列 $12\cdots n$,与此同时,交换 D_1 中相应的行,则 D_1 变为 D_2. 显然,在这个过程中,D_1 中行交换的次数,即排列 $1\ n(n-1)\cdots 2$ 变为排列 $1\ 2\cdots n$ 时所用对换的次数,与排列 $1\ n(n-1)\cdots 2$ 的逆序数 $N[1\ n\ (n-1)\cdots 2]=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 同奇同偶. 于是由行列式的性质得

$$D_2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} D_1.$$

这就是所求的两个行列式间的关系.

1.14 如果行列式从第2列开始的每一列加上它前面的一列,同时给第1列加上最后一列,问行列式如何变化?

解 设$D = \Delta(a_{ij})$,则从D的第2列开始的每一列加上它的前一列,同时给第1列加上最后一列,所得行列式为

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{1n} & a_{12} + a_{11} & \cdots & a_{1n} + a_{1,n-1} \\ a_{21} + a_{2n} & a_{22} + a_{21} & \cdots & a_{2n} + a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + a_{nn} & a_{n2} + a_{n1} & \cdots & a_{nn} + a_{n,n-1} \end{vmatrix} = M_1 + M_2.$$

其中,
$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{11} & \cdots & a_{1n} + a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} + a_{21} & \cdots & a_{2n} + a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} + a_{n1} & \cdots & a_{nn} + a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} + a_{11} & \cdots & a_{1n} + a_{1,n-1} \\ a_{2n} & a_{22} + a_{21} & \cdots & a_{2n} + a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & a_{n2} + a_{n1} & \cdots & a_{nn} + a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

从M_1的第2列起,依次从后一列减去前一列,得$M_1 = D$;依次交换M_2的1,2列、2,3列、…、$n-1$,n列,然后从$(n-1)$列开始,依次从前一列减去后一列,得

$$M_2 = (-1)^{n-1} D.$$

综上所述,$M = ((-1)^{n-1} + 1)D = \begin{cases} 2D, & n\text{ 为奇数}, \\ 0, & n\text{ 为偶数}. \end{cases}$

1.15 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}.$$

解 将第1行乘以(-1)加到其余各行上去,得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ a_3-a_1 & a_3-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_3-a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} a_1-b_1, & \text{当 } n=1 \text{ 时}, \\ (a_1-a_2)(b_1-b_2), & \text{当 } n=2 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } n \geqslant 3 \text{ 时}. \end{cases}$$

1.16　不计算行列式的值，证明行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 能被 18 整除.

证法 1　将行列式 D_4 的第 3 行提取公因数 9,第 4 行提取公因数 2,得

$$D_4 = 18\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

所以行列式 D_4 能被 18 整除.

证法 2　将行列式 D_4 的第 1,2,3 行分别乘以 $10^3,10^2,10$,且都加到第 4 行,得

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 1998 & 2196 & 2394 & 1800 \end{vmatrix},$$

因上面行列式第 4 行能被 18 整除,所以行列式 D_4 能被 18 整除.

1.17　行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$