

Jingji

经济新学科讲义

Xinxuekejiangyi

金融经济学

Financial Economics

蒋殿春 编著

中国统计出版社

J 830/25

经济新学科讲义

金融经济学
Financial Economics

蒋殿春 编著



首都师范大学图书馆



21671665

SBP 67/05

中国统计出版社
China Statistics Press



(京)新登字 041 号

图书在版编目(CIP)数据

金融经济学/蒋殿春编著.

- 北京:中国统计出版社,2003.7

(经济新学科讲义)

ISBN 7-5037-4432-4

I. 金…

II. 蒋…

III. 金融学

IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063765 号

金融经济学

作 者/蒋殿春

责任编辑/杨映霜

装帧设计/刘国宁

出版发行/中国统计出版社

通信地址/北京市西城区月坛南街 75 号 邮政编码/100826

办公地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号

电 话/(010)63459084、63266600-22500(发行部)

印 刷/科伦克三莱印务(北京)有限公司

经 销/新华书店

开 本/787×1092mm 1/16

字 数/310 千字

印 张/21

印 数/1-3000 册

版 别/2004 年 7 月第 1 版

版 次/2004 年 7 月第 1 次印刷

书 号/ISBN 7-5037-4432-4/F·1888

定 价/36.00 元

中国统计版图书,版权所有,侵权必究。

中国统计版图书,如有印装错误,本社发行部负责调换。

序

本书是作者多年从事经济学教学工作的经验总结，也是作者多年从事经济学研究的成果总结。

自经济学理论创立以来，它就与人们的经济生活有着密不可分的关系。正如萨缪尔森所说：“经济学本质上是一门发展的科学，它的变化反映了社会经济趋势的变化。”在历史进入21世纪的今天，随着经济生活翻天覆地的变化，经济学的发展也有了新的飞跃。如果我们仔细阅读一下经济学史，那么，我们将会看到，经过2000多年的发展，经济学已经从当时的一棵小苗长成了现在的参天大树，并且，在这棵参天大树上，它的每一枝每一叶都是那么的生机勃勃，值得我们仔细地研究和应用。

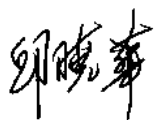
正如经济的发展导致了社会分工的细化一样，经济学也随着社会经济的发展而出现了学科的细化分科，事实上，这种细化的分科在上一世纪就开始了。我们清楚地记得，自工业革命开始，人类进入了一个崭新的时代，并且，在我们可以上天入地的同时，经济学也进入了繁荣发展的新时期。在此基础上，计算机的快速发展，全球经济一体化以及全球信息化的到来，经济学更出现了空前的发展和学科分科的进一步细化，进而使一批经济学新学科得以产生。这些经济新学科的出现，是经济发展的必然，也是经济生活的需要。

作为经济学领域里的新生事物，这些新的经济学分科有着一些共同点：首先是它们更贴近我们的社会

经济生活，因为它就是为了解决经济生活里的某一领域或者某一具体问题而产生的。其次是它们具有更强的可操作性，并可以直接应用到具体的经济问题中。第三是它们更强调量化的管理，把更多的现代应用数学知识用于其中。鉴于这样的特点，可以断定，这些新的经济学科将会给人们的社会经济生活带来更新的理念和思想，它们将在社会经济生活中起着越来越重要的作用。但是，由于它们的出现还是近期的新鲜事，所以，这些新的经济学科无论是在国外还是在国内，都还不为大众所熟悉，尤其是在国内更是这样，这些经济学的新生事物基本上还局限于学术高层里，它们大都还是博士生们的研究和讨论课题，也可以说目前它们还高高地呆在我国经济学领域的象牙塔里，还没有用一种比较低的姿态与广大的民众见面。我想，在信息流通可以用秒来计算的今天，这不能不说是一件让人感到遗憾的事。不过，这种遗憾很快将由于中国统计出版社组织编写出版的《经济新学科讲义》丛书而成为历史的片段。

编写和出版《经济新学科讲义》，是中国统计出版社对我国经济学发展的重大贡献，也体现了他们与众不同的眼光。在我们的社会还存在有人“一切向钱看”的今天，他们这种以社会效益作为出发点的出版观念值得称赞。正因如此，这套丛书的编写也得到了我国众多的经济学专家学者的鼎力支持。在这套丛书中，我们高兴地看到，我国新老经济学专家学者因为这套丛书的出版而汇集一堂，他们为了让这些经济学的新兴学科从象牙塔里走出来以贴近普通民众和读者而辛勤写作。我相信，这些专家学者在这里所奉献的每一本图书，都凝聚着他们的智慧和汗水，是他们对这一领域多年研究的成果结晶。

我衷心地为这套丛书的出版感到高兴，并相信广大的读者也如同我一样会感到高兴。有人说，得到好书，就如同得到了良师益友，现在，这样一套让人开卷有益的图书展示在我们眼前，真的是读书人的福气。斯为序。



2002年10月于北京

目 录

第一章 不确定性和个体行为	(1)
1.1 自然状态及状态依存收益	(1)
1.2 期望效用理论	(3)
1.3 风险厌恶及其测度	(13)
1.4 LRT 类效用函数	(19)
关联文献	(21)
第二章 资产及组合投资基础	(22)
2.1 概念和记号	(22)
2.2 风险资产投资决策	(24)
2.3 风险测度和随机占优	(30)
2.4 组合投资风险分散原理	(36)
2.5 风险分摊: Arrow-Lind 定理	(39)
关联文献	(41)
第三章 套利与资产定价基本定理	(43)
3.1 基本概念	(43)
3.2 无套利条件与均衡条件	(46)
3.3 资产定价基本定理	(50)
关联文献	(57)
第四章 均值-方差分析与资本资产定价模型	(58)
4.1 组合边界	(58)
4.2 存在无风险资产时的组合边界	(67)
4.3 资本资产定价模型	(71)
4.4 不存在无风险资产情况下的 CAPM	(75)
4.5 CAPM 的其他推广	(79)
4.6 一般风险意义上的组合边界	(81)
附录 4-1: 投资学上的 CAPM	(84)

关联文献	(90)
第五章 套利定价理论	(91)
5.1 模型条件和两个特例	(91)
5.2 特质风险与渐进套利	(97)
5.3 APT 定理	(100)
5.4 APT 与 CAPM 的联系	(105)
5.5 APT 误差上界	(106)
关联文献	(109)
第六章 完备市场与经济均衡	(110)
6.1 Arrow-Debreu 证券和完备市场	(110)
6.2 完备市场中的帕累托效率	(114)
6.3 时间可加效用函数和一致的信念	(122)
6.4 普通证券定价	(128)
6.5 以期权扩展完备市场	(131)
关联文献	(133)
第七章 资本结构与 M-M 定理	(134)
7.1 Modigliani-Miller 定理	(134)
7.2 非对称税率	(139)
7.3 破产风险和破产成本的影响	(143)
关联文献	(148)
第八章 期权的基本价格关系	(149)
8.1 期权价格的合理限界	(149)
8.2 期权价格关系	(155)
8.3 期权定价:二项分布模型	(163)
关联文献	(167)
第九章 证券价格与随机过程	(168)
9.1 动态证券价格与其随机过程性质	(168)
9.2 正常事件与偶发事件	(174)
9.3 紧分布随机函数	(180)
9.4 连续时间的跨期组合选择:ICAPM	(183)
关联文献	(188)

第十章 衍生资产定价	(189)
10.1 伊藤积分和伊藤引理.....	(189)
10.2 风险对冲组合与衍生资产定价.....	(194)
10.3 Black-Scholes 期权定价公式.....	(196)
10.4 标的支付红利时的欧式期权定价.....	(201)
10.5 等价鞅测度.....	(205)
关联文献.....	(209)
第十一章 公司资本定价	(210)
11.1 公司资本价值的一般模型.....	(210)
11.2 股东权益和债务的定价.....	(212)
11.3 公司债的风险结构.....	(216)
11.4 其他公司债的定价.....	(220)
11.5 破产风险下的 M-M 定理.....	(224)
关联文献.....	(227)
第十二章 非对称信息与资本结构	(228)
12.1 代理成本.....	(228)
12.2 市场对公司价值的低估.....	(238)
12.3 作为信号的资本结构.....	(242)
关联文献.....	(245)
第十三章 债务契约和信贷配给	(246)
13.1 对称信息下的最优债务契约.....	(246)
13.2 存在审计成本时的最优契约.....	(249)
13.3 逆向选择与信贷配给均衡.....	(254)
13.4 道德危险和信贷配给.....	(259)
关联文献.....	(262)
第十四章 金融中介	(264)
14.1 流动性调节.....	(265)
14.2 示意性自投资与企业家同盟.....	(268)
14.3 监控代理.....	(275)
14.4 银行挤兑.....	(281)
关联文献.....	(286)

附录 相关数学知识及记号.....	(288)
A 线性代数	(288)
B 微积分	(292)
C 最值问题	(296)
D 概率和随机变量	(303)
E 随机过程	(312)
参考文献.....	(315)

第一章

不确定性和个体行为

金融经济学的分析对象,是经济个体在不确定环境中的行为,以及这些行为对金融资产价值的决定作用。不确定性意味着风险,所以风险决策过程就是个体在不确定世界中的选择过程。作为全书的基础,本章首先对不确定性进行适当的刻画,然后建立经济个体在不确定环境中的偏好及其期望效用函数,最后讨论偏好与风险态度的关系。

1.1 自然状态及状态依存收益

理论上存在几种等价的不确定性描述方法,这些方法我们都会在适当的时候使用。

一种最基本的方法是引入自然状态。想象你现在持有一种公司股票,目前当然谁也不知道在未来某一特定时刻这种股票的市场价格将是多少。为了简洁,不妨将现在的时刻称为“期初”,你感兴趣的这个未来时刻称为“期末”。假设该股票在期末的价格可能是 $p_1, \dots, p_S$ 中某一个 $p_s (1 \leq s \leq S)$, 那么在只考虑这种股票价格的情况下,我们可以说在期末“自然”将会出现 S 种可能状态,而你手上的股票价格将取决于自然最终实现哪一种状态。一种“自然状态” s 定义为特定的会影响金融资产收益的所有外部环境因素。在不同的应用场合,它们可能是下期宏观经济景气状况、某特定公司或行业的经营绩效等,甚至也可以是明天的天气情况。

以自然数 $1, \dots, S$ 来表示自然可能出现的状态,则前面例子中自然状态为 s 时股票的价格将为 p_s 。为了简便,以后我们在不引起混淆的情况下也用 S 来表示自然状态集合: $S = \{1, \dots, S\}$ 。由于股票等金融资产的未來价格依赖于未来实际发生的自然状态,我们称这些资产的投资收益是状态依存的 (state contingent)。作为一个直观的例子,图 1.1 显示了自然在未来可能出现的状态以及各种状态

下对应的股票价格。

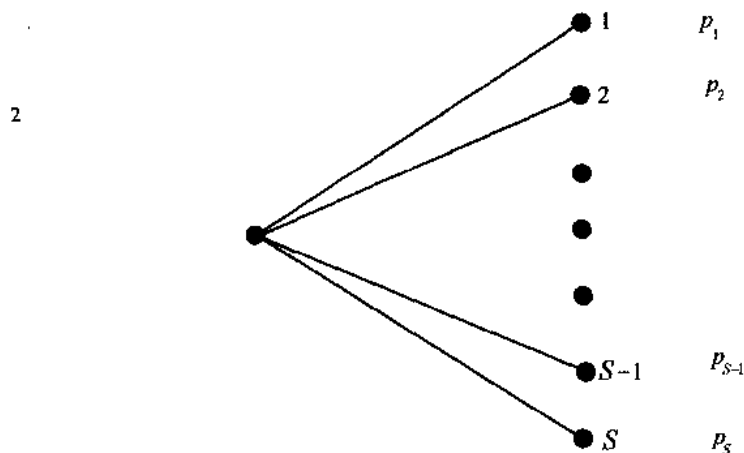


图 1.1 自然的可能状态及状态依存价格

当然,要分析经济中众多的个体以及他们所关心的所有不确定性,我们不能只就某一个人或某一种风险资产来定义自然状态。即是说,自然状态集合 S 应当是完全的,它包含了所有经济个体所关心的全部可能性。在一个完全的自然状态集中,对上述那只股票来说,它可能会在好几种不同的状态下有同一个价格。譬如说,可能在状态 s 和 s' ($s \neq s'$) 下都有 $p_s = p_{s'}$,这时你可能不会关心状态 s 和 s' 的区别,但别的个体在这两个状态下的收益可能是不同的。在许多场合,自然可能出现的状态有无穷多种,这并不妨碍我们定义一个含有无穷多个元素的状态集 S 。不过,在 S 为无穷集场合,使用稍后介绍的连续随机变量来刻画不确定性将更为方便。

状态集合 S 的另一个性质是其中状态的相互排斥性:如果出现一种状态,就不可能有另一种状态发生。或者简单地说,在未来有且只有一种状态 s 出现。

个体既然关心未来会出现哪种状态,他会每一种状态出现的可能性做出一个主观的判断。具体地,他可能觉得状态 s 出现的概率是 $\pi(s)$,满足

$$0 \leq \pi(s) \leq 1, \sum_{s \in S} \pi(s) = 1$$

我们将这个概率解释为个体的主观概率,也称为是个体对自然

状态的信念(belief)。不同的个体可能会对自然状态持有不同的信念,但不少时候我们将简单地假设所有个体的信念相同,这样一来特定状态出现的概率就是唯一的。

一种刻画不确定性的普遍方法是直接将所关心的风险资产收益、价格等表示为不确定的随机变量。为了与确定的变量区别,随机变量通常在字母头上加上记号“ $\sim$ ”,比方在前面所举的例子中,我们可以将股票的期末价格记为 $\tilde{p}$,这同样表示股票的未来价格可能为 $p_1, \dots, p_s$ 。如果最终出现的自然状态是 s ,相应地该股票的价格为 p_s ,称 p_s 为 $\tilde{p}$ 的一个实现值或者样本。

正如前面所述,这种方法用于刻画连续变化的自然状态时尤其方便。当自然可能出现的状态有无穷多种时,任何一种特定状态出现的概率都是零。此时,我们需要以概率分布函数或者分布密度函数来刻画个体对自然状态的信念。本书的数学基础附录有概率论的简单介绍。

1.2 期望效用理论

1.2.1 彩票空间

这一节将基于彩票空间对个体在不确定性世界中的偏好进行描述并定义效用函数,因为这使得行文更为方便。

当个体面对不确定性时,我们也可以想象他持有一张特定的彩票(lottery)。如果一种股票的期末收益可能为 $x_1, \dots, x_s$,可以将一股这样的股票设想为一张彩票,当状态 s 出现时投资者“中彩” x_s 元。另一个例子是某人价值 30 万元的住宅可能遭到火灾,假设发生火灾后这栋住宅只值 5 万元,那么可以假设这个人持有一张可能“中彩”0 元或者 -25 万元的彩票,中彩概率分别是不发生火灾和发生火灾的概率。

这种虚构的彩票描述方法将经济个体所处的不确定性环境想象为一种彩票,其优点是我们可以自然地仿照消费者对普通消费品的偏好来刻画个体对不确定性的态度。因为我们总可以将任何一种不确定性结果对应于一张特定的彩票,消费者喜欢彩票 A 而不喜欢彩票 B 就意味着他宁可要前者对应的不确定性结果而不要后者对应的不确定性结果。

先从只有两种可能状态的简单彩票开始分析,随后我们将看到更复杂的彩票可以通过这种简单彩票复制出来。

假设某人面对某一不确定事件 A , 事件 A 发生时他可得到 x , 事件 A 不发生得到 y 。这里 x 和 y 可以是货币数量, 也可以代表特定的商品(或商品组合), 甚至可以是不确定的财富。假设事件 A 发生的概率为 π , $0 \leq \pi \leq 1$, A 不发生的概率为 $1 - \pi$ 。由前面的说明, 该个体相当于拥有一张中彩率为 π 的彩票, 中彩的“奖励”是获得 x , 而不能中彩时获得 y ——当然, 这种说法只是一种比喻, 并不意味着个体一定认为 x 优于 y 。

将个体面对的每一种不确定性都构造一张对应的彩票, 这样, 个体在不确定性环境中的选择就归结于在其彩票空间内的选择。将这个包含了个体所有可选彩票的彩票空间记为 $\mathcal{L}$; 一张中彩率为 π 、中彩时获 x 、不中彩时获 y 的彩票记为 $L = [\pi; x, y]$ 。假设个体在彩票空间上存在一个偏好关系, 就是说他能根据自己的标准为所有彩票排出一个优劣顺序。我们以记号“ $L_1 \geq L_2$ ”表示他认为彩票 L_1 不次于彩票 L_2 , 同时以“ $L_1 \sim L_2$ ”表示他认为这两种彩票无差异。注意关系“ $\sim$ ”可正式定义为“ $L_1 \geq L_2$ 同时 $L_2 \geq L_1$ ”。按照彩票的定义, 首先假设个体的偏好满足下面的性质:

性质 1: $[1; x, y] \sim x$

性质 2: $[\pi; x, y] \sim [1 - \pi; y, x]$

性质 1 是说, 彩票的概念同样适合确定的财富: 某人确定地拥有 x , 相当于他拥有一张中彩率为 100% 的彩票, 而中彩价值是 x 。性质 2 则表明同一张彩票有两种等价的表示形式。

1.2.2 偏好公理与效用函数的存在性

与标准的消费者理论一样, 我们不希望直接在个体的偏好上进行分析, 而是力图建立一个反映该偏好的效用函数。为此, 进一步假设个体的偏好满足以下公理:

公理 1.1(完全性): $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, 必然有 $L_1 \geq L_2$ 或 $L_2 \geq L_1$ 或者二者同时成立;

公理 1.2(自反性): $\forall L \in \mathcal{L}, L \geq L$;

公理 1.3(传递性): $\forall L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}, L_1 \geq L_2, L_2 \geq L_3 \Rightarrow L_1 \geq L_3$;

公理 1.4(连续性): $\forall L' \in \mathcal{L}, \{L | L \geq L'\}$ 及 $\{L | L' \geq L\}$ 都是

闭集。

由微观经济学中效用函数存在性定理,当以上公理满足时,存在连续、单调的(序数)效用函数 $U(\cdot)$,使得

$$L_1 \geq L_2 \Leftrightarrow U(L_1) \geq U(L_2) \quad (1.1)$$

自然,这个效用函数不是唯一的,任何 $U(\cdot)$ 的正单调变换得到的函数也是同一偏好的效用函数,因为序数效用函数本身没有任何功利意义,它唯一的功能是较方便地表现个体在彩票空间中的排序。

1.2.3 Von. Neumann-Morgenstern 效用函数

只要上述公理 1.1~1.4 满足,我们即可以使用符合规则(1.1)的序数效用函数展开进一步研究。不过,使用一般的序数效用函数对个体在不确定世界中的行为进行分析并不十分方便。金融经济学上通常使用的,是一种特殊的效用函数——von. Neumann-Morgenstern 效用函数(v. N-M 效用函数),或者称为期望效用函数,以后本书将同时使用这两个名称。如果个体的 v. N-M 效用函数存在,那么他在一张彩票上的效用等于他在该彩票的各种确定结果上的效用的数学期望:

$$U([\pi; x, y]) = Eu([\pi; x, y]) = \pi u(x) + (1 - \pi)u(y) \quad (1.2)$$

这里 $E[\cdot]$ 是数学期望算子,而 $u(\cdot)$ 是定义在确定财富上的(效用)函数。由于等式(1.2)并不是在任何正单调变化下都能维持的,可见期望效用函数仅满足一般的效用函数的基本规范(1.1),但它本身并不是一种序数效用概念,而是带有基数效用特征。(1.2)是一个非常有用的性质,但什么情况下会存在满足(1.2)式的效用函数呢?除了以上一般的效用函数存在的条件,我们还需要一个关键假设:

公理 1.5 (独立性): $[\pi_1; [\pi_2; x, y], y] \sim [\pi_1 \pi_2; x, y]$

这个公理又称为替代性公理,其左端是一张复合彩票:以概率 π_1 获得一张彩票 $[\pi_2; x, y]$, 概率 $1 - \pi_1$ 获得定值 y ; 在前一种情况下,他又有概率 π_2 的机会获得 x , 概率 $1 - \pi_2$ 获得 y 。独立性公理说明,个体只关心彩票的最终结果,不在乎彩票的构成形式。

为了证明期望效用函数存在性定理,我们再对个体的偏好作下面的技术性假设:

公理 1.6: 存在一个“最好”的彩票 L_b 和一个“最差”的彩票 L_w ,

使得彩票空间 $\mathcal{L}$ 中任何一只彩票 L 均满足: $L_b \geq L \geq L_w$ 。

公理 1.7: $[\pi_1; L_b, L_w] \succ [\pi_2; L_b, L_w]$ 的充分必要条件是 $\pi_1 > \pi_2$ 。

定理 1.1(v.N-M 效用函数存在性定理) 如果定义在彩票空间 $\mathcal{L}$ 上的个体偏好满足公理 1.1—1.7, 则存在 v.N-M 效用函数 $u(\cdot)$, 满足(1.2)式。并且, 除了 $u(\cdot)$ 的仿射变换

$$v(\cdot) = Au(\cdot) + B, (A > 0),$$

$u(\cdot)$ 是唯一的。

【证明】先证明 v.N-M 效用函数 $u(\cdot)$ 的存在性。首先, 定义 $u(L_b) = 1, u(L_w) = 0$ 。下面考虑对任何一只彩票空间中的彩票 L^* 的效用赋值。由连续性公理, 集合

$$\overline{\Pi} \equiv \{\pi \in [0, 1] \mid [\pi; L_b, L_w] \geq L^*\}$$

和

$$\underline{\Pi} \equiv \{\pi \in [0, 1] \mid L^* \geq [\pi; L_b, L_w]\}$$

均为闭集。注意到 $\overline{\Pi} \cup \underline{\Pi} = [0, 1]$, $[0, 1]$ 中任何一点必然处于 $\overline{\Pi}$ 或 $\underline{\Pi}$ 中, 但因这两个集合是相连的, 必然存在 $[0, 1]$ 中某一 π^* 同时属于 $\overline{\Pi}$ 和 $\underline{\Pi}$ 。即是说, 存在 $\pi^* \in [0, 1]$, 使得

$$[\pi^*; L_b, L_w] \sim L^* \quad (1.3)$$

而且, 由公理 1.7, 满足(1.3)的 π^* 还是唯一的。定义

$$u(L^*) = \pi^* \quad (1.4)$$

这样定义的函数显然是一个效用函数(同样是因为公理 1.7)。下面验证它同时还满足(1.2)。

任取 x, y (x 和 y 可以是确定财富或彩票), 存在 π_x, π_y , 使得

$$[\pi_x; L_b, L_w] \sim x, [\pi_y; L_b, L_w] \sim y \quad (1.5)$$

根据定义(1.4),

$$u(x) = \pi_x, u(y) = \pi_y \quad (1.6)$$

现在考虑彩票 $[\pi; x, y]$, 由于存在(1.5)和(1.6), 利用独立性公理,

$$\begin{aligned} [\pi; x, y] &\sim [\pi; [\pi_x; L_b, L_w], [\pi_y; L_b, L_w]] \\ &\sim [\pi\pi_x + (1-\pi)\pi_y; L_b, L_w] \\ &\sim [\pi u(x) + (1-\pi)u(y); L_b, L_w] \end{aligned} \quad (1.7)$$

再根据定义式(1.4), 这意味着

$$u([\pi; x, y]) = \pi u(x) + (1-\pi)u(y)$$

此即为(1.2)。

接下来证明,如果 $u(\cdot)$ 是一个 v.N-M 效用函数(从而它满足(1.2)),那么仿射变换 $v(\cdot) = Au(\cdot) + B$ 同样也是;并且,除了这样的仿射变换,不存在其他形式的效用函数满足(1.2)。

显然,如果 $u(\cdot)$ 是与偏好“ $\geq$ ”对应的一个 v.N-M 效用函数, $\forall A > 0, B, v(\cdot) = Au(\cdot) + B$ 显然是刻画同一偏好的效用函数,因为效用函数的任一正单调变换还是同一偏好的效用函数。现在我们验证 $v(\cdot)$ 满足(1.2):

$$\begin{aligned} v([\pi; x, y]) &= Au([\pi; x, y]) + B \\ &= A[\pi u(x) + (1 - \pi)u(y)] + B \\ &= \pi[Au(x) + B] + (1 - \pi)[Au(y) + B] \\ &= \pi v(x) + (1 - \pi)v(y) \end{aligned}$$

另一方面,假设 $f(\cdot)$ 是任一正单调变换, $f(u(\cdot))$ 满足(1.2):

$$f(u([\pi; x, y])) = \pi f(u(x)) + (1 - \pi)f(u(y)) \quad (1.8)$$

由于 $u(\cdot)$ 满足(1.2),上式又可写为:

$$f(\pi u(x) + (1 - \pi)u(y)) = \pi f(u(x)) + (1 - \pi)f(u(y)) \quad (1.9)$$

等式两端对 π 微分:

$$f'(\pi u(x) + (1 - \pi)u(y))[u(x) - u(y)] = f(u(x)) - f(u(y)) \quad (1.10)$$

再对 π 微分一次:

$$f''(\pi u(x) + (1 - \pi)u(y)) = 0 \quad (1.11)$$

此式对任何 $\pi \in [0, 1]$ 都成立,特别地,取 $\pi = 1$,得到

$$f''(u(x)) = 0 \quad (1.12)$$

这意味着存在 $A > 0, B$,使得

$$f(u) = Au + B \quad (1.13)$$

1.2.4 多种可能环境的推广

上面我们考虑的是仅包含两种可能结果的不确定性。不过,在个体面对的不确定性包含两个以上的可能结果时,彩票概念及 v.N-M 效用函数很容易推广。

根据独立性公理,我们可以用只有两种结果的彩票构造含多种结果的彩票。譬如, $[p, q, r; x, y, z]$ 代表以概率 p, q 和 r 分别获

得 x, y 和 z 的一张彩票, $p + q + r = 1$ 。我们这样来重新构造这张彩票:

$$\text{令 } [Q; [P; x, y], z] \sim [p, q, r; x, y, z]$$

这只要

$$PQ = p, (1 - P)Q = q, (1 - Q) = r$$

即可。解前两个方程可得

$$P = p/(p + q), Q = p + q$$

注意它们同时还满足第三个方程(因为 $p + q + r = 1$)。

v.N-M 效用函数的推广也十分自然。如果自然有 S 种可能的状态, 状态 s 出现的概率为 π_s , 此时个体获得的收益是 x_s , 则他的 v.N-M 效用函数可以写为

$$Eu = \sum_{s=1}^S p_s u(x_s) \quad (1.14)$$

更一般地, 在考虑金融市场时, 个体的不确定收益可能取一个连续区间内的某一值。对于一个随机变量 $\tilde{X}$, $a \leq \tilde{X} \leq b$, 如果 $\tilde{X}$ 的分布密度函数为 $p(x)$, 则个体的 v.N-M 效用函数就是

$$E[u(\tilde{X})] = \int_a^b u(x) p(x) dx \quad (1.15)$$

或者, 如果 $\tilde{X}$ 的分布函数是 $F(x)$, $F'(x) = p(x)$, 则

$$E[u(\tilde{X})] = \int_a^b u(x) dF(x) \quad (1.16)$$

1.2.5 挑战期望效用理论: Allais 悖论及行为金融

期望效用理论是分析不确定性的最基本的工具。但是, 关于这个理论长期以来一直存在一些争议。在建立个体期望效用函数过程中, 我们假设了若干公理。尽管这些公理看起来都符合人类的行为规范, 但还是有一些经济学家对某些公理假设提出批评, 并认为期望效用函数理论是错误的, 需要创建新的理论来分析不确定世界中的个体行为。在前面的若干公理中, 最容易受到经验性研究质疑的也许是独立性公理, 而众多质疑中最著名的是 Allais 悖论。考虑以下两组赌局(同时参见下页图 1.2)。

● 赌局 A: 参与者有 100% 的概率获得 1 万元。

● 赌局 B: 参与者有 10% 的概率获得 5 万元, 89% 的概率获得 1 万元, 1% 的概率获得 0。