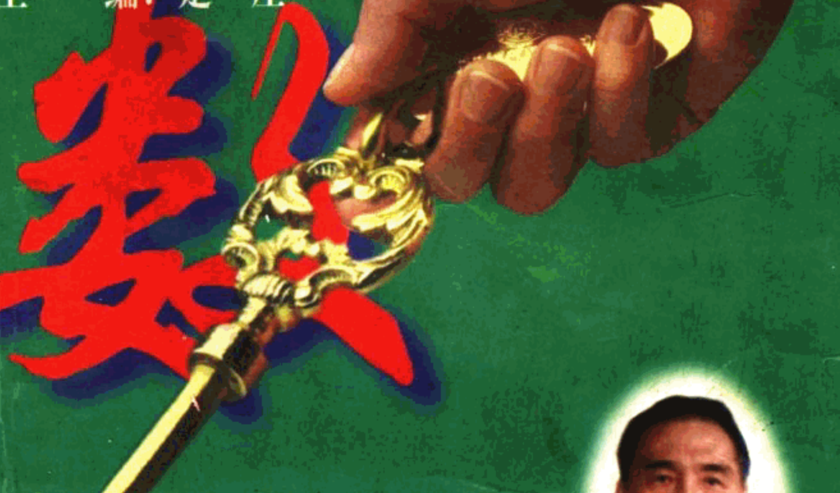
金钥匙丛书

名誉主编：卢嘉锡

主　　编：楚　庄

数



郑学遐

走向高考解题训练

高一数学

龍門書局

寄語莘莘學子：

博學之，審問之，

慎思之，明辨之，

篤行之。

書贈金鑰匙叢書

盧嘉錫

一九九五年秋月

金钥匙丛书

编　　委　　会

金钥匙丛书·序

“金钥匙”源于格林童话，是能打开宝库的贵重的钥匙。金钥匙的贵重，不在于钥匙本身的金的价值，而是在于它能开启宝库的大门，引导人们得到取之不尽的宝藏。“金钥匙”常喻指获取知识、解决问题的能力和方法，指开启心扉、开发智力的教育方法。叶圣陶在谈到教学的目标时曾说：“对于学生来说，能够得到一把开启智慧之门的钥匙，养成一些良好的学习习惯，练就几路真正有用的本领，那才是最大的实益，终身受用的好修养。”我们这一套中小学教学参考书取名为《金钥匙丛书》，其宗旨就不是为各科教学另外增补填充物和添加剂，而是企求帮助学生增强学习能力，改进学习方法，或者也用借喻的说法，是为各科教学提供催化剂和发酵剂，帮助学生更好地吸收、消化。

在中小学特别是基础教育阶段，学校教学要使学生掌握基础知识、形成基本技能，即所谓“双基”，这无疑是十分正确、十分重要的，这是学校教学的中心任务和首要任务。但我们以为，在学生掌握基础知识、形成基本能力的过程中培养学习兴趣、形成学习习惯、发展学习能力，是同样（如果不说是更为）重要的。或者说，“双基”教学不只是教给学生知识和技能，更重要的是在教学过程中培养学习的兴趣、习惯、能力。用借喻的说法，供给食物、保证营养是重要的，但旺盛的食欲、良好的饮食

习惯和健全的消化吸收功能更为重要，“那才是最大的实益，终身受用的好修养”。这是关系到教学思想乃至教育思想的大问题，值得多说几句。

关于学习兴趣　两千多年前的孔子就说过“知之者不如好之者，好之者不如乐之者”。“好”和“乐”就是愿意学、喜欢学，就是学习兴趣。对还没有明确学习目的的儿童来说，这点尤其重要，“乐”是主动性、积极性的起点。随着学习以及思想的发展，兴趣就可能上升为志趣和志向。“吾十有五而志于学”，由“乐”上升为“志”，学习就有了更高的自觉性和目的性。爱因斯坦所说的“在学校里和生活中，工作的最重要的动机是工作中的乐趣，是工作获得结果时的乐趣，以及对这种结果的社会价值的认识”，不妨理解为由自发的、感性的“乐趣”出发，上升为自觉的、理性的“认识”过程，也就是由“乐”到“志”的过程。这是我们基础教育阶段教学工作应该充分尊重并且着意引导的带规律性的教学和教育过程。

关于学习习惯　帮助学生形成良好习惯，是学校教育的重要任务。叶圣陶认为：“从小学老师到大学教授，他们的任务就是帮助学生养成良好习惯，帮助学生养成政治方面文化科学方面的良好习惯。”习惯，就是把认识和知识落实转化为实践，更从实践中巩固和加深认识和知识，再转为更高的实践。知识和习惯的关系，也就是知与行的关系。我国古代《礼记》中所说的“博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃行之”，把学问思辨归结到“行”上，现代教育家陶知行改名为陶行知，也都说明“行”对于“知”的重要。习惯，是经过重复、练习而巩固下来的稳定持久的条件反射和自然需要。培养良好正

确的学习习惯，也是各科教学的重要任务。以语言和写作教学为例，读懂读通若干篇范文以及必要的字词语法、修辞知识固然重要，但同等重要的是培养勤读勤查、使用工具书的习惯，写读书笔记的习惯，作文要“修辞立诚”、写自己真实思想感受的习惯，作文要“上口入耳”、写好自己念、自己修改的习惯，以及不仅在课堂上而且在生活中正确使用语言文字的习惯等等。语文教学如果只是要求背熟多少范文和语法规则而忽略了良好正确的学习习惯的形成，那无论从教还是学两方面说都是不完全、不巩固、不成功的。

关于学习能力　　学习能力，简单说就是举一反三的能力，触类旁通的能力，由已知推未知的能力。课堂教学，甚至整个学校阶段的教学，涉及的只不过是人类已有知识的一小部分。学校教学传授基础知识和基本技能，是所谓打基础阶段。基础固然要坚实，但基础只不过是准备，为学生在课堂之外和出校门后的继续构筑作准备。以数学学科为例，要求学生掌握数的基本概念、基本定律、基本运算，为此要演算一定数量的例题。掌握课本中列出的概念、定律、运算固然重要，但更重要的是通过这些教学活动培养学生抽象演绎的能力，为掌握课本以外的更多更高更深的概念、定律和计算作准备。如果仅仅死记硬背多少概念、定律和计算题而不是以此为手段发展思维能力，那从教和学两方面说也都是不完全、不成功的。

上述学习兴趣、习惯和能力三个方面是互促互补、互为因果的。成功的教学，不在于教师的授予和学生的接受，而在于教师发挥主导作用，调动学生学习的主动性和积极性。教学的最高境界，是教其自学，培养学生自学的

兴趣、自学的习惯、自学的能力；正如叶圣陶所说的“教育的最终目的在学生能自学自励，出了学校，担任了工作，一直能自学自励，一辈子做主动有为的人。”

《金钥匙丛书》由教学经验丰富的特级教师执笔，以现行的最新教学大纲和教材为基础，注重思路开拓，注重能力培养。对课文知识归纳总结，融会贯通，解析重点、难点。对学生，是学法指导；对教师，是教法参考。

《金钥匙丛书》是提倡素质教育的教学参考书。

楚庄

1995 年 8 月

作 者 简 介

郑学遐 1962年毕业于首都师范大学数学系，北京119中高级教师。

曾在全国多家数学期刊杂志上发表有关数学教学的学术文章。先后组织编写出版了《一课一练》、《应知应会学习手册》、《中学各科达标丛书》、《名师导学丛书》等数十部中学课外辅导丛书，并应邀参加人民教育出版社出版的《全国重点中学高中数学试验课本》、国家教委考试中心审定的《高考能力要求与试题分析》两书的编写工作。

参与《金钥匙丛书·走向高考解题训练》的策划组织工作，任丛书的执行编委。

前　　言

本书是为普通中学高中一年级学生升入高等学校作准备的课外辅导参考书。全书按照通用新教材知识章节的先后顺序编写，第一篇是代数，第二篇是立体几何。每个知识单元都设有“知识要点与高考要求”、“范例选粹”、“进阶习题”及“习题简解与答案”四部分。

为了满足广大高中学生走向高考的需求，我们对教材的知识进行了必要的补充与扩展。同时在知识的讲解、例题的选择、解法分析上都尽量做到面向高考，靠近高考，使高中学生尽早适应高考的要求。

在例题、习题的选择与配备上我们一方面注意了阶梯式的安排，另一方面也注意了尽量从多方位、多角度向读者提供广泛充实的高考信息，让读者能接受充分的训练。所有例题和习题的解法我们尽量做到适合读者自我阅读和自我演练，有利于提高学生的自学能力。

应试能力的强弱是文化素质、知识修养高低的重要表现，愿本书能对广大读者作出菲薄的贡献。

仓促成书遗误难免，恳请广大读者给本书提出宝贵的意见和建议。本书在编写过程中得到了李冰老师、黄鹄同学的大力支持，谨致谢意。

郑学遐

1997 年 4 月

目　　录

第一篇　代数

第二篇　立体几何

第一篇　代　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

(一)对数的意义及性质

＊知识要点与高考要求

1. 理解对数的意义，懂得指数与对数之间相互转化的关系.
2. 明白对数的基本性质，会应用对数的基本性质进行对数式的变形及运算.
3. 理解对数换底公式的意义，能熟练地应用对数换底公式进行有关运算.
4. 知道常用对数的意义，明白常用对数的首数和尾数的意义.
5. 会用对数知识进行简单运算.

＊＊范例选释

【例题 1】 求下列各式的值：

(1) $(0.001)^{-\frac{1}{3}}$；　　(2) $(-2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}}$；

(3) 求 $\sqrt{(-4)^2}$ 的算术平方根；　　(4) $(\mathrm{tg}60°)^{-\sin 30°}$.

◆分析◆ 这几个题实际上是对指数概念及运算法则的复习，解题时要熟悉指数概念，熟练运用指数运算法则，尽量避免大乘大除的繁琐计算，从而减少错误.

◆解法◆ (1) $(0.001)^{-\frac{1}{3}}=(10^{-3})^{-\frac{1}{3}}=10$.

(2) $(-2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}}=(-\frac{64}{27})^{-\frac{2}{3}}=[(-\frac{4}{3})^3]^{-\frac{2}{3}}$

$=[(-\frac{3}{4})^{-3}]^{-\frac{2}{3}}=(-\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$.

(3) $\because$ $\sqrt{(-4)^2}=4$，$\therefore$ 求 $\sqrt{(-4)^2}$ 的算术平方根就是求 4 的

算术平方根$\sqrt{4}$.

$\because \sqrt{4}=2$,故$\sqrt{(-4)^2}$的算术平方根是2.

(4) $(\operatorname{tg}60^\circ)^{-\sin 30^\circ}=(\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}=[(3)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}}$

$=3^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}$.

注意:在运算过程中最后结果是分指数形式,可以不化成根式,如$3^{-\frac{1}{4}}$就是最后结果,不化成$\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}$也可以.

【例题2】求下列各式中x的值:

(1)$\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{25}=x$;　　(2)$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}=x$;

(3)$\log_{27}x=-\frac{2}{3}$;　　(4)$\log_x\sqrt{64}=-\frac{3}{2}$.

◆分析◆ 遇到对数式的计算题一定要联系指数式来思考.如果可行,就先把对数式还原成指数式,这样解起来省力便捷.

◆解法◆ (1)$\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{25}=x$　$(\sqrt{5})^x=\frac{1}{25}$　$[(5)^{\frac{1}{2}}]^x=5^{-2}$

$5^{\frac{x}{2}}=5^{-2}$　$\frac{x}{2}=-2$　$x=-4$.

(2)$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}=x$　$(\frac{1}{3})^x=\sqrt{27}$

$3^{-x}=3^{\frac{3}{2}}$　$-x=\frac{3}{2}$　$x=-\frac{3}{2}$.

(3)$\log_{27}x=-\frac{2}{3}$

$x=(27)^{-\frac{2}{3}}$　$x=3^{-2}$　$x=\frac{1}{9}$.

(4)$\log_x\sqrt{64}=-\frac{3}{2}$　$x^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{64}$

$x^{-\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}$　$x^{-\frac{3}{2}}=(\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}$　$x=\frac{1}{4}$.

◆点评◆ 从以上几个题中可以看出把对数式还原成指数式时,化成同底数幂是关键的一步.只有底数相等,指数也相等时两个幂的值才相等,这一点在解这类题时要予以足够的重视.

【例题3】求下列各式中x的取值范围:

(1)$\log_{(x-2)}2x$；　　(2)$\log_{(1-2x)}(3x+2)$；

(3)$\dfrac{\sqrt{3-x}}{\log_{(x-2)}2}$；　　(4)$\dfrac{\sqrt{1-2x}}{\log_{\sqrt{x}}(2x+1)}$.

◆分析◆ 这几个题主要是考查对数的概念，对于 $\log_a N=b$，必须满足 $a>0$ 且 $a\neq 1$，还要满足 $N>0$，根据这些要求在具体的问题中解不等式，或解不等式组，从而求出 x 的取值范围.

◆解法◆(1)$\log_{(x-2)}2x$　　根据题意，得不等式组：

$$\begin{cases}2x>0\\x-2>0\\x-2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x>2\\x-2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\x\neq 3\end{cases}$$

∴ x 的取值范围是 $x>2$ 且 $x\neq 3$ 的一切实数.

(2) $\log_{1-2x}(3x+2)$　　根据题意，得不等式组：

$$\begin{cases}3x+2>0\\1-2x>0\\1-2x\neq 1\end{cases}\Rightarrow -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{2}\text{且 } x\neq 0$$

∴ x 的取值范围是$-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{2}$且 $x\neq 0$ 的一切实数.

(3)$\dfrac{\sqrt{3-x}}{\log_{(x-2)}2}$　　根据题意，得不等式组：

$$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\x-2>0\\x-2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 3\\x>2\\x\neq 3\end{cases}\Rightarrow 2<x<3$$

∴ x 的取值范围是 $2<x<3$ 的一切实数.

(4)$\dfrac{\sqrt{1-2x}}{\log_{\sqrt{x}}(2x+1)}$　　根据题意，得不等式组：

$$\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\2x+1>0\\2x+1\neq 1\\1-2x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow 0<x\leqslant\frac{1}{2}$$

∴ x 的取值范围是 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$的一切实数.

◆点评◆以上几个题的解题过程中，除了要准确熟练地应用对数概念外，还要能正确地解不等式组，求出它的解集，而做到这一点的关键，是会用数轴表示每一个不等式的解集，然后找出这些解集的公共部分.

【例题 4】求下列各式的值：

(1)$\log_{(\sqrt{2}-1)}(3+2\sqrt{2})$；　　(2)$3^{\log_{27}5}$；

(3)$16^{\log_2 17}$；　　(4)$\log_{\text{tg}60^\circ}(\text{ctg}30^\circ)$.

◆分析◆ 对数式 $\log_a N=b(a>0$ 且 $a\neq1,N>0)$有三个基本恒等式：①$\log_a a=1$；②$\log_a 1=0$；③$a^{\log_a N}=N$. 在计算或化简对数式时常常用到这三个恒等式. 在应用①、②两个式子时要注意 $a>0$ 且 $a\neq1$ 的条件，在用③时一定要注意两个“a”(底数)必须相同.

◆解法◆(1)$\log_{(\sqrt{2}-1)}(3+2\sqrt{2})$

注意到　$(\sqrt{2}-1)^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)$

而　$(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$

即　$(3+2\sqrt{2})=[(\sqrt{2}-1)^{-1}]^2=(\sqrt{2}-1)^{-2}$

∴　$\log_{(\sqrt{2}-1)}(3+2\sqrt{2})=-2.$

(2)∵ $3=27^{\frac{1}{3}}$

∴　$3^{\log_{27}5}=(27^{\frac{1}{3}})^{\log_{27}5}=(27^{\log_{27}5})^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$.

(3)$16^{\log_2 17}=(2^4)^{\log_2 17}=(2^{\log_2 17})^4$

$=17^4$.　　(此题不必算出 $17^4=83521$)

(4)$\log_{\text{tg}60^\circ}(\text{ctg}30^\circ)=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$.

【例题 5】计算下列各题：

(1)$\log_3(9^5\cdot3^{-3}\cdot27^4)$；

(2)已知 $\log_9 6=a,\log_9 12=b$，用 a、b 的代数式表示 $\log_9 2,\log_9 3$；

(3)不查表求

$$\frac{\log_5 3+\log_5 9-\log_5\sqrt{3}+\frac{2}{5}\log_5\sqrt[4]{27^3}}{4\log_5 3-3\log_5 3+\log_5\sqrt[5]{3}}.$$