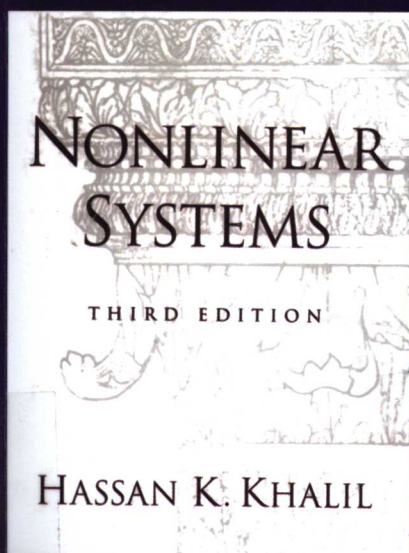


曾获IFAC控制工程教材奖

非线性系统

(第三版)

Nonlinear Systems
Third Edition



[美] Hassan K. Khalil 著

朱义胜 董辉 李作洲 等译



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry
<http://www.phei.com.cn>

国外计算机科学教材系列

非线性系统

(第三版)

Nonlinear Systems

Third Edition

[美] Hassan K. Khalil 著

朱义胜 董辉 李作洲 等译

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

非线性系统的研究近年来受到越来越广泛的关注,国外许多工科院校已将“非线性系统”作为相关专业研究生的学位课程。本书是美国密歇根州立大学电气与计算机工程专业的研究生教材,全书内容按照数学知识的由浅入深分成了四个部分。基本分析部分介绍了非线性系统的基本概念和基本分析方法;反馈系统分析部分介绍了输入-输出稳定性、无源性和反馈系统的频域分析;现代分析部分介绍了现代稳定性分析的基本概念、扰动系统的稳定性、扰动理论和平均化以及奇异扰动理论;非线性反馈控制部分介绍了反馈控制的基本概念的反馈线性化,并给出了几种非线性设计工具,如滑模控制、Lyapunov再设计、反步法、基于无源的控制和高增益观测器等。此外本书附录还汇集了一些书中用到的数学知识,包括基本数学知识的复习、压缩映射和一些较为复杂的定理证明。

本书既可以作为研究生第一学期非线性系统课程的教材,也可以作为工程技术人员、应用数学专业人员的自学教材或参考书。

Simplified Chinese edition Copyright © 2005 by PEARSON EDUCATION ASIA LIMITED and Publishing House of Electronics Industry.

Nonlinear Systems, Third Edition, ISBN: 0130673897 by Hassan K. Khalil. Copyright © 2002.

All Rights Reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall.

This edition is authorized for sale only in the People's Republic of China (excluding the Special Administrative Region of Hong Kong and Macau).

本书中文简体字翻译版由电子工业出版社和Pearson Education培生教育出版亚洲有限公司合作出版。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有Pearson Education培生教育出版集团激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字:01-2003-4492

图书在版编目(CIP)数据

非线性系统(第三版)/(美)哈里尔(Khalil, H. K.)著;朱义胜,董辉,李作洲译.

北京:电子工业出版社,2005.7

(国外计算机科学教材系列)

书名原文:Nonlinear Systems, Third Edition

ISBN 7-121-01142-5

I. 非... II. ①哈... ②朱... ③董... ④李... III. 非线性系统(自动化)-教材 IV. TP271

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第037358号

责任编辑:马 岚 特约编辑:马爱文

印 刷:北京顺义兴华印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编:100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:36 字数:921千字

印 次:2005年7月第1次印刷

定 价:69.00元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换;若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077。质量投诉请发邮件至zltts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

出版说明

21 世纪初的 5 至 10 年是我国国民经济和社会发展的关键时期,也是信息产业快速发展的关键时期。在我国加入 WTO 后的今天,培养一支适应国际化竞争的一流 IT 人才队伍是我国高等教育的重要任务之一。信息科学和技术方面人才的优劣与多寡,是我国面对国际竞争时成败的关键因素。

当前,正值我国高等教育特别是信息科学领域的教育调整、变革的重大时期,为使我国教育体制与国际化接轨,有条件的高等院校正在为某些信息学科和技术课程使用国外优秀教材和优秀原版教材,以使我国在计算机教学上尽快赶上国际先进水平。

电子工业出版社秉承多年来引进国外优秀图书的经验,翻译出版了“国外计算机科学教材系列”丛书,这套教材覆盖学科范围广、领域宽、层次多,既有本科专业课程教材,也有研究生课程教材,以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求,广大师生可自由选择和自由组合使用。这些教材涉及的学科方向包括网络与通信、操作系统、计算机组织与结构、算法与数据结构、数据库与信息处理、编程语言、图形图像与多媒体、软件工程等。同时,我们也适当引进了一些优秀英文原版教材,本着翻译版本和英文原版并重的原则,对重点图书既提供英文原版又提供相应的翻译版本。

在图书选题上,我们大都选择国外著名出版公司出版的高校教材,如 Pearson Education 培生教育出版集团、麦格劳-希尔教育出版集团、麻省理工学院出版社、剑桥大学出版社等。撰写教材的许多作者都是蜚声世界的教授、学者,如道格拉斯·科默(Douglas E. Comer)、威廉·斯托林斯(William Stallings)、哈维·戴特尔(Harvey M. Deitel)、尤利斯·布莱克(Uyless Black)等。

为确保教材的选题质量和翻译质量,我们约请了清华大学、北京大学、北京航空航天大学、复旦大学、上海交通大学、南京大学、浙江大学、哈尔滨工业大学、华中科技大学、西安交通大学、国防科学技术大学、解放军理工大学等著名高校的教授和骨干教师参与了本系列教材的选题、翻译和审校工作。他们中既有讲授同类教材的骨干教师、博士,也有积累了几十年教学经验的老教授和博士生导师。

在该系列教材的选题、翻译和编辑加工过程中,为提高教材质量,我们做了大量细致的工作,包括对所选教材进行全面论证;选择编辑时力求达到专业对口;对排版、印制质量进行严格把关。对于英文教材中出现的错误,我们通过与作者联络和网上下载勘误表等方式,逐一进行了修订。

此外,我们还将与国外著名出版公司合作,提供一些教材的教学支持资料,希望能为授课老师提供帮助。今后,我们将继续加强与各高校教师的密切联系,为广大师生引进更多的国外优秀教材和参考书,为我国计算机科学教学体系与国际教学体系的接轨做出努力。

电子工业出版社

教材出版委员会

- | | | |
|-----|-----|---|
| 主 任 | 杨芙清 | 北京大学教授
中国科学院院士
北京大学信息与工程学部主任
北京大学软件工程研究所所长 |
| 委 员 | 王 珊 | 中国人民大学信息学院院长、教授 |
| | 胡道元 | 清华大学计算机科学与技术系教授
国际信息处理联合会通信系统中国代表 |
| | 钟玉琢 | 清华大学计算机科学与技术系教授
中国计算机学会多媒体专业委员会主任 |
| | 谢希仁 | 中国人民解放军理工大学教授
全军网络技术研究中心主任、博士生导师 |
| | 尤晋元 | 上海交通大学计算机科学与工程系教授
上海分布计算技术中心主任 |
| | 施伯乐 | 上海国际数据库研究中心主任、复旦大学教授
中国计算机学会常务理事、上海市计算机学会理事长 |
| | 邹 鹏 | 国防科学技术大学计算机学院教授、博士生导师
教育部计算机基础课程教学指导委员会副主任委员 |
| | 张昆藏 | 青岛大学信息工程学院教授 |

中文版序言

It is my pleasure and honor to write a preface to the Chinese translation of my book *Nonlinear Systems*. I am grateful to the Chinese scientists who took on such tremendous task. For me, as the author, the most gratifying return of writing this book is to know that many colleagues and students have used it and found it to be useful. This feeling can only increase knowing that the book will now be available to the largest scientific community in the world in its native language.

Hassan Khalil

East Lansing, Michigan, USA

——译文——

很荣幸能为我的著作的中译本写此序言，也非常感激为翻译此书付出极大心血的中国学者。作为本书原作者，我写这本书的最大回报莫过于得知众多同行及学生在使用本书，而且从中受益匪浅。中译本的出版让我更加感到欣慰，因为占世界科学界人数最多的中国读者，今后可以直接用自己的母语学习本书了。

译者序

非线性是自然界和工程技术领域里最普遍的现象。非线性系统的研究在近年来取得了可喜的进展,特别是以微分几何为工具发展起来的精确线性化方法,受到了普遍的重视。通过利用 Lie 括号以及微分同胚等基本工具研究非线性系统的状态、输入及输出变量之间的依赖关系,系统地建立了非线性控制系统可控制、可观测及可检测的充分或必要条件,特别是全局状态精确线性化和输入-输出精确线性化方法的发展,使复杂的非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题来处理。加上计算机的普及和现代计算技术的发展,人们逐步对非线性系统有了进一步的了解。诸如非线性系统中的分岔、混沌、分形和奇怪吸引子等现象越来越引起学者们的兴趣,使其在生物学、化学、气象学、经济学、物理学和工程技术领域的应用也更加广泛。

目前,“非线性系统”在国外已经被许多工科院校列入相关专业研究生的学位课程或必修课,本书就是美国密歇根州立大学电气与计算机工程专业的研究生教材,深受读者欢迎。目前国内也出版了数十种关于非线性系统理论与应用方面的优秀教材和专著,但国外一些代表性著作在国内尚未普及,因此把国外优秀教材介绍给我国工程专业技术人员和学生是十分必要的。

本书作者 Hassan K. Khalil 博士是美国密歇根州立大学电气与计算机工程系的杰出教授,1989 年由于其在“奇异扰动理论及其在控制中的应用”所取得的成就被选为 IEEE Fellow。多年来他一直从事非线性系统的教学和研究工作。

本书内容翔实,论证严谨,具有很强的系统性。全书按照数学知识,由浅入深编写而成。内容大体分成四部分:初级分析、反馈系统分析、高级分析和非线性反馈控制。从第 5 章开始,每个章节都相对独立,或者仅需要用到前面章节中的少量知识,使读者具有较大的灵活性。为了避免学生过早地接触压缩映射原理,将结构存在性和惟一性定理的证明移至附录中。

本书在前面两个版本的基础上,增加了近年来非线性控制中比较成功的一些内容,例如无源性和基于无源控制的扩展处理方法、高增益反馈、递归法、迭代方法、最优稳定控制和观测器,另外在二阶系统分析中还引入了分岔的概念。通过网址 www.prenhall.com/khalil 可查阅有关本书的各种资料。

参加全书翻译的有:董辉(序、前言和第 1 章至第 3 章)、李作洲(第 12 章和第 14 章以及全部附录)、李汝来(第 9 章至第 11 章)、沈红林(第 4 章)、周晓龙(第 5 章)、李斌斌(第 6 章)、赵柏山(第 7 章)、周芸(第 8 章)和桑士伟(第 13 章)。全书译文经朱义胜教授和董辉副教授统一整理,并对全部译稿进行了详细的审校。

在翻译过程中,我们还按照网站上给出的原书第三版的勘误表对照原书内容对译文一一进行了修改。虽然我们已尽了最大努力,但由于涉足非线性系统领域比较晚,专业知识和英语水平有限,译文中一定有不妥和疏漏之处,敬请读者提出宝贵意见,联系邮箱为 yszhu@dlmu.edu.cn。

前 言

本书是为研究生一年级的非线性系统或控制课程编写的^①,也可以作为工程技术人员或应用数学研究人员的参考书。它是作者在密歇根州立大学多年执教非线性系统课程的结晶。学习这门课程的学生应具备电子工程、机械工程或应用数学的基础知识,这门课的先修课程是以与 Antsaklis and Michel[9],Chen[35],Kailath[94]或 Rugh[158]同等水平的教材讲授的线性系统研究生层次课程。如果学生具备了线性系统的知识,就不必为引入“状态”一词而担心学生难于理解,也就可以自由引用“传递函数”、“状态转移矩阵”和其他一些线性系统的概念。此外,学生还应具备任何工程或数学专业的研究生应有的一般数学基础,如微积分、微分方程和矩阵理论等。附录中汇集了一些书中用到的数学知识。

本书在写作中按章循序渐进地插入了数学内容,因此第2章是基础知识。实际上这一章可以在本科高年级学习,即使在低年级学习也没有困难,这也是把 Lyapunov 稳定性分为两部分讨论的原因。在4.1节到4.3节,引入了自治系统 Lyapunov 稳定性的实质,在这里不必担心一致性和 K 类函数等术语的学术性。在4.4节到4.6节以更适用于非自治系统的一般方式提出了 Lyapunov 稳定性问题,并允许进一步研究现代稳定性理论。第4章末引入的数学内容是为了让学生能顺利地学习其余内容。

附录中给出了一些较高水平的数学公式的证明,这些证明不必在课堂上讲授。把这些内容加进来一方面是因为课程内容本身的需要,另一方面是考虑到一些学生需要或希望学习这部分内容,例如要继续研究非线性系统或控制理论的博士生等,这些学生可以以自学的方式继续学习附录中的内容。

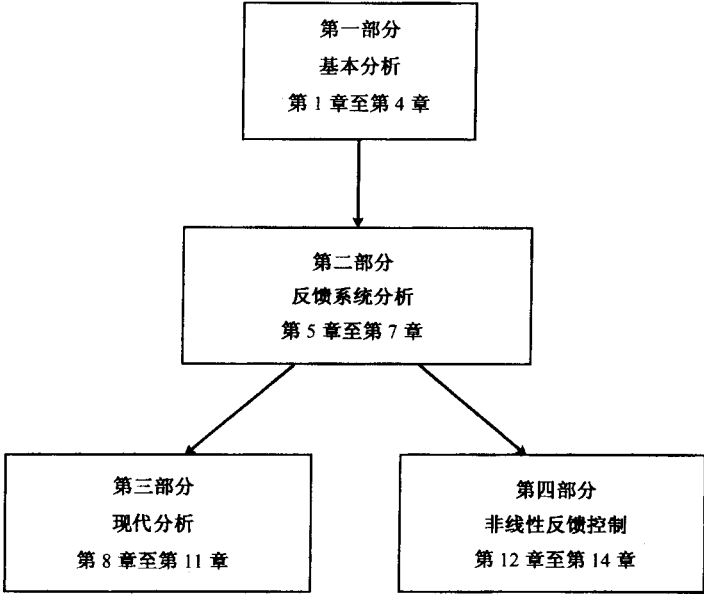
本书出版第三版的主要目的在于:

1. 使本书(特别是前面的章节)更适合一年级的研究生使用。以第3章所做的改动为例,将所有有关数学背景的内容、收缩映射定理、存在性及惟一性定理的证明都归入附录,而其他内容与第二版相比可读性更强。
2. 重新组织内容结构,使构造非线性系统或其控制过程更容易。从结构上看,本书可以分为四部分,如图所示。第一部分、第二部分和第三部分主要是非线性系统的分析过程,而第一部分、第二部分和第四部分的内容主要是非线性控制过程。
3. 更新第二版的内容,包括了一些近年来在非线性控制中证明是有用的观点或成果。第三版的新意在于:扩充了无源和基于无源的控制、滑模控制和高增益观测器的内容,此外还在二阶系统中引入了分岔。在学术方面,读者会看到在第10章和第11章中 Kurzweil 的逆 Lyapunov 定理,以及有关积分控制和增益定序法的新成果。
4. 更新了习题。这个版本新增了170多道习题。

在本书的写作过程中,我得到了许多同事、学生和读者的支持。他们通过讨论、建议、更正

^① 授课教师可获得本书配套教辅光盘,详见书末的“教学支持说明”。——编者注

以及一些建设性的意见和对前两版的反馈为我提供了极大的帮助。要感谢的人实在太多,想把他们的名字一一列出,又恐挂一漏万,谨在此向曾帮助过我的每一个人表示深深的谢意。



我还要特别感谢为我提供写作环境的密歇根州立大学,以及支持我研究非线性反馈控制的美国国家科学基金。

书中的所有计算,包括微分方程的数值解,都是用 MATLAB 和 Simulink 完成的,插图用 MATLAB 或 LATEX 绘图工具生成。

我很希望本书尽善尽美,但错误之处在所难免,如发现错误请发邮件给 khalil@msu.edu,本人将不胜感激。

最新的勘误表^①列于:

www.egr.msu.edu/~khalil/NonlinearSystems/

主页上还列出对第二版的改动之处、补充的习题以及其他一些相关内容。

Hassan K. Khalil

^① 已根据下载的勘误表将译文做了相应修改。——译者注

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 非线性模型和非线性现象	1
1.2 示例	3
1.2.1 单摆方程	3
1.2.2 隧道二极管电路	4
1.2.3 质量 - 弹簧系统	6
1.2.4 负阻振荡器	8
1.2.5 人工神经网络	10
1.2.6 自适应控制	11
1.2.7 一般非线性问题	13
1.3 习题	16
第 2 章 二阶系统	25
2.1 线性系统的特性	26
2.2 多重平衡点	32
2.3 平衡点附近的特性	35
2.4 极限环	38
2.5 相图的数值构造	41
2.6 周期轨道的存在	42
2.7 分岔	48
2.8 习题	53
第 3 章 基本性质	60
3.1 存在性和惟一性	60
3.2 连续性与初始条件和参数的关系	66
3.3 解的可微性和灵敏度方程	68
3.4 比较原理	71
3.5 习题	73
第 4 章 Lyapunov 稳定性	78
4.1 自治系统	78
4.2 不变原理	89
4.3 线性系统和线性化	94
4.4 比较函数	102
4.5 非自治系统	104
4.6 线性时变系统和线性化	111

4.7	逆定理	116
4.8	有界性和毕竟有界性	120
4.9	输入 - 状态稳定性	125
4.10	习题	130
第 5 章	输入 - 输出稳定性	141
5.1	$\mathcal{L}$ 稳定性	141
5.2	状态模型的 $\mathcal{L}$ 稳定性	146
5.3	$\mathcal{L}_2$ 增益	152
5.4	反馈系统: 小增益定理	158
5.5	习题	162
第 6 章	无源性	166
6.1	无记忆函数	166
6.2	状态模型	170
6.3	正实传递函数	173
6.4	$\mathcal{L}_2$ 稳定性和 Lyapunov 稳定性	176
6.5	反馈系统: 无源性定理	179
6.6	习题	189
第 7 章	反馈系统的频域分析	193
7.1	绝对稳定性	193
7.1.1	圆判据	194
7.1.2	Popov 判据	202
7.2	描述函数法	205
7.3	习题	217
第 8 章	现代稳定性分析	221
8.1	中心流形定理	221
8.2	吸引区	228
8.3	类不变定理	235
8.4	周期解的稳定性	240
8.5	习题	243
第 9 章	扰动系统的稳定性	248
9.1	零扰动	248
9.2	非零扰动	253
9.3	比较法	256
9.4	无限区间上解的连续性	260
9.5	互联系统	262
9.6	慢变系统	268
9.7	习题	274

第 10 章 扰动理论和平均化	280
10.1 扰动法	280
10.2 无限区间上的扰动	289
10.3 自治系统的周期扰动	292
10.4 平均化法	295
10.5 弱非线性二阶振荡器	303
10.6 一般平均化法	305
10.7 习题	309
第 11 章 奇异扰动	312
11.1 标准奇异扰动模型	312
11.2 标准模型的时间尺度特性	317
11.3 无限区间上的奇异扰动	324
11.4 慢流形和快流形	327
11.5 稳定性分析	331
11.6 习题	339
第 12 章 反馈控制	346
12.1 控制概述	346
12.2 通过线性化实现稳定	350
12.3 积分控制	352
12.4 线性化积分控制	354
12.5 增益分配	357
12.6 习题	369
第 13 章 反馈线性化	373
13.1 引言	373
13.2 输入 – 输出线性化	376
13.3 全状态线性化	385
13.4 状态反馈控制	393
13.4.1 稳定性	393
13.4.2 跟踪	401
13.5 习题	403
第 14 章 非线性设计工具	409
14.1 滑模控制	409
14.1.1 引例	409
14.1.2 稳定性	417
14.1.3 跟踪	423
14.1.4 积分控制调节	426
14.2 Lyapunov 再设计	430
14.2.1 稳定性	430

14.2.2 非线性阻尼 436

14.3 反步设计法 437

14.4 基于无源的控制 449

14.5 高增益观测器 454

14.5.1 启发性例子 455

14.5.2 稳定性 461

14.5.3 通过积分控制的调节 465

14.6 习题 466

附录 A 数学复习 482

附录 B 压缩映射 487

附录 C 证明 490

参考文献说明 539

参考文献 543

符号表 556

术语表 557

第1章 绪 论

工程技术人员在分析和设计电路、机械系统、控制系统和其他工程学科中的非线性动力学系统时,需要吸收和消化大量的非线性分析工具。本书引入了一些这样的工具,特别是强调了用 Lyapunov 方法进行非线性系统稳定性分析,并从输入-输出和无源透视方面对反馈系统的稳定性给予特别关注。我们还提出了用于检测和分析“自由”振荡的工具,包括描述函数法。此外还引入了扰动理论的渐近工具,包括一般扰动和奇异扰动。最后,我们介绍了一些非线性反馈控制工具,包括线性化、增益定序法、积分控制、反馈线性化、滑模控制、Lyapunov 再设计、反步法(backstepping)、基于无源性的控制和高增益观测器。

1.1 非线性模型和非线性现象

我们将处理由有限个耦合一阶常微分方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}$$

建模的动力学系统,其中, $\dot{x}_i$ 表示 x_i 对时间变量 t 的导数, $u_1, u_2, \dots, u_p$ 指输入变量。 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 称为状态变量,表示动力学系统对其过去状态的记忆。通常用向量符号以紧凑的形式写出这组方程。定义

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

把 n 个一阶微分方程重写为一个 n 维一阶向量微分方程:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (1.1)$$

式(1.1)称为状态方程, x 称为状态, u 称为输入。有时,把另一个方程

$$y = h(t, x, u) \quad (1.2)$$

与式(1.1)联立,定义一个 q 维输出向量 y ,该向量包含了与动力学系统分析有关的变量,如一些物理上可测量的变量或一些需要以特殊方式表现的变量。我们把式(1.2)称为输出方程,把

方程(1.1)和方程(1.2)统称为状态空间模型,或简称为状态模型。有限维物理系统的数学模型并不总是以状态模型的形式出现,但我们总可以通过仔细选择状态变量,以这种方式建立物理系统的模型。本章后面给出的例题和习题将说明状态模型的多种功能。

本书大部分分析是处理状态方程,无需输入 u 的显式表示,即所谓的无激励状态方程:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.3)$$

无激励状态方程并不一定意味着系统的输入为零。可以把输入指定为一个给定时间的函数 $u = \gamma(t)$, 一个给定状态的反馈函数 $u = \gamma(x)$, 或同时是时间和状态的函数 $u = \gamma(t, x)$ 。把 $u = \gamma$ 代入方程(1.1)中消去 u 就会产生无激励状态方程。

当函数 f 与 t 没有明显关系时,会出现一个特例,即

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

这种情况下的系统称为自治系统或时不变系统。自治系统的特点是不随时间原点的移动而改变,因为时间变量从 t 变化到 $\tau = t - a$ 时不会改变状态方程的右边。如果系统不是自治的,就称为非自治系统或时变系统。

处理状态方程的一个重要概念是平衡点的概念。对于状态空间中的点 $x = x^*$, 只要系统状态从 x^* 点开始,在将来任何时刻都将保持在 x^* 点不变,那么这一点就称为方程(1.3)的平衡点。对于方程(1.4)的自治系统,平衡点是方程

$$f(x) = 0$$

的实根。平衡点可以是孤立的,也就是说在其邻域内不会有另一个平衡点,或者说可能有一个平衡点的连续统(a continuum of equilibrium points)。

对于线性系统,状态模型(1.1)~(1.2)具有如下特殊形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

我们假设读者熟悉线性系统中基于叠加原理的分析方法。由于我们是从线性系统进入到非线性系统,因此将面对更难的情形。叠加原理不再成立,分析方法将包含更高深的数学理论。因为我们已知线性系统的有力分析方法,所以分析非线性系统的第一步通常是将其在某些特定点上线性化,并分析得到的线性模型。这是工程惯例,也是常用的方法。毫无疑问,只要允许,就应该尽可能通过线性化来分析非线性系统的特性。然而,仅仅线性化是不够的,我们还必须开发用于分析非线性系统的方法。线性化有两个基本限制。第一,由于线性化是在工作点附近的近似,因此仅能预测出这一点邻域内非线性系统的“局部”特性,而不能预测出远离工作点的“非局部”特性,当然也就不能预测整个状态空间的“全局”特性。第二,非线性系统动力学远比线性系统学丰富,有一些“本质上的非线性”只有在非线性条件下才能发生,因此不能由线性模型描述或预测。下面是几个本质上是非线性现象的例子:

- **有限逃逸时间** 非稳定线性系统的状态只有当时间趋于无穷时才会达到无穷,而非线性系统的状态可以在有限时间内达到无穷。
- **多孤立平衡点** 线性系统只有一个孤立平衡点,这样它就只有一个吸引系统状态的稳态工作点,而与初始状态无关。非线性系统可以有多个孤立平衡点,其状态可能收敛于几个稳态工作点之一,收敛于哪个工作点取决于系统的初始状态。

- **极限环** 对于振荡的线性时不变系统,必须在虚轴上有一对特征值,这是在有扰动的条件下几乎不可能保持的非鲁棒条件。即使我们能做到,振荡幅度也将取决于初始状态。在现实生活中,只有非线性系统才能产生稳定振荡,有些非线性系统可以产生频率和幅度都固定的振荡,而与初始状态无关。这类振荡就是一个极限环。
- **分频振荡、倍频振荡或殆周期振荡** 稳定线性系统的输出信号频率与输入信号频率相同。而非线性系统在周期信号激励下,可以产生具有输入信号频率的分频或倍频振荡,甚至可以产生殆周期振荡,其中一个例子就是周期振荡频率之和,而不是每个振荡频率的倍频。
- **混沌** 非线性系统的稳态特性可能更为复杂,它既不是平衡点,也不是周期振荡或殆周期振荡,这种特性通常称为混沌。有些混沌运动显示出随机性,尽管系统是确定的。
- **特性的多模式** 同一非线性系统显示出两种或多种模式是很正常的。无激励系统可能有不止一个极限环。具有周期激励的系统可能会显示倍频、分频或更复杂的稳态特性,这取决于输入信号的幅度和频率。甚至可能当激励幅度和频率平滑变化时,也会显示出不连续的跳跃性能模式。

本书仅讨论前三种现象^①,多平衡点和极限环将在下一章讲到二阶自治系统时介绍,有限逃逸时间现象将在第3章中介绍。

1.2 示例

1.2.1 单摆方程

考虑图1.1所示的单摆, l 表示摆杆的长度, m 表示摆锤的质量,假设杆是硬质的且质量为零。用 θ 表示杆与通过中心点的竖直轴间的夹角。单摆在竖直平面内自由摆动,摆锤以半径为 l 的圆运动。为了写出单摆的运动方程,先来确定作用在摆锤上的力。有一个向下的重力 mg , g 为重力加速度。还有一个阻碍运动的摩擦力,假设与摆锤的速度成正比,摩擦系数为 k 。运用牛顿第二运动定律,可写出沿切线方向的运动方程:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

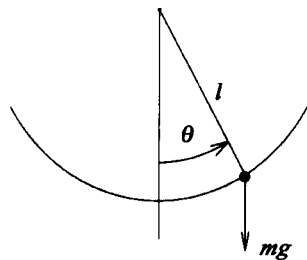


图 1.1 单摆

写沿切线方向的运动方程的好处是方程中不出现杆的张力,因为它在法线方向上。写中心点的运动方程也可得到与上式相同的方程。为得到单摆的状态模型,我们取状态变量 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$,状态方程为:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.5)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \quad (1.6)$$

为求平衡点,设 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 并解方程求 x_1 和 x_2 :

^① 要阅读有关激励振荡、混沌、分岔及其他重要内容,请参阅文献[70],文献[74],文献[187]和文献[207]。

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned}$$

平衡点位于 $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。从单摆的物理描述看,很显然单摆仅有两个平衡点,对应于 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$,其他平衡点与这两个平衡点重合,平衡点数对应于单摆停在两个平衡点之一前所进行的全摆动的次数。例如,如果单摆在停于垂直向下的位置之前进行了 m 次完全 360° 循环,那么从数学意义上讲,可以说单摆的平衡点为 $(2m\pi, 0)$ 。我们在研究单摆时,将只关心两个“非平凡的”平衡点 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$,在物理上可看出这两个平衡位置彼此差异很大。单摆确实可以停留在平衡点 $(0, 0)$ 上,但在平衡点 $(\pi, 0)$ 上几乎不可能保持静止,因为来自平衡点的一个无穷小的干扰就会使单摆偏离该平衡点。这两个平衡点的区别在于其稳定性质,这一点我们将进行深入研究。

有时忽略摩擦阻力有助于研究单摆方程,即设 $k = 0$,得到的系统

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.7)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \quad (1.8)$$

在某种意义上说是保守系统,即如果给单摆一个初始推力,它就会永远保持无衰减振荡,能量在动能和势能之间相互转换而无耗散。当然这是不现实的,但给出了单摆特性,也有助于求出当摩擦系数 k 很小时单摆方程的近似解。如果能运用单摆的力矩 T ,就可以得到另一种形式的单摆方程,力矩可看成是方程

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.9)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T \quad (1.10)$$

的控制输入。

有趣的是,用与单摆方程相似的方程可对几个毫无关系的物理系统建模。这样的例子有与无限长总线连接的同步发电机的模型(见习题 1.8), Josephson 结电路模型(见习题 1.9)和锁相环模型(见习题 1.11),因而单摆方程非常重要。

1.2.2 隧道二极管电路

考虑图 1.2^① 所示的隧道二极管电路,隧道二极管的特性为 $i_R = h(v_R)$,电路中的储能元件是电容 C 和电感 L ,假设它们是线性时不变的,可由方程

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad \text{和} \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

对其建模,其中 i 是通过元件的电流, v 是其两端的电压,下标表示特指的元件。为写出系统的状态模型,取 $x_1 = v_C$, $x_2 = i_L$ 作为状态变量, $u = E$ 为常数输入。为写出 x_1 的状态方程,需要把 i_C 表示为状态变量 x_1 , x_2 和输入 u 的函数,运用克希霍夫电流定律,流过结点©的电流的代数和为零,可写出方程:

① 本图以及图 1.3 和图 1.7 都取自文献[39]。