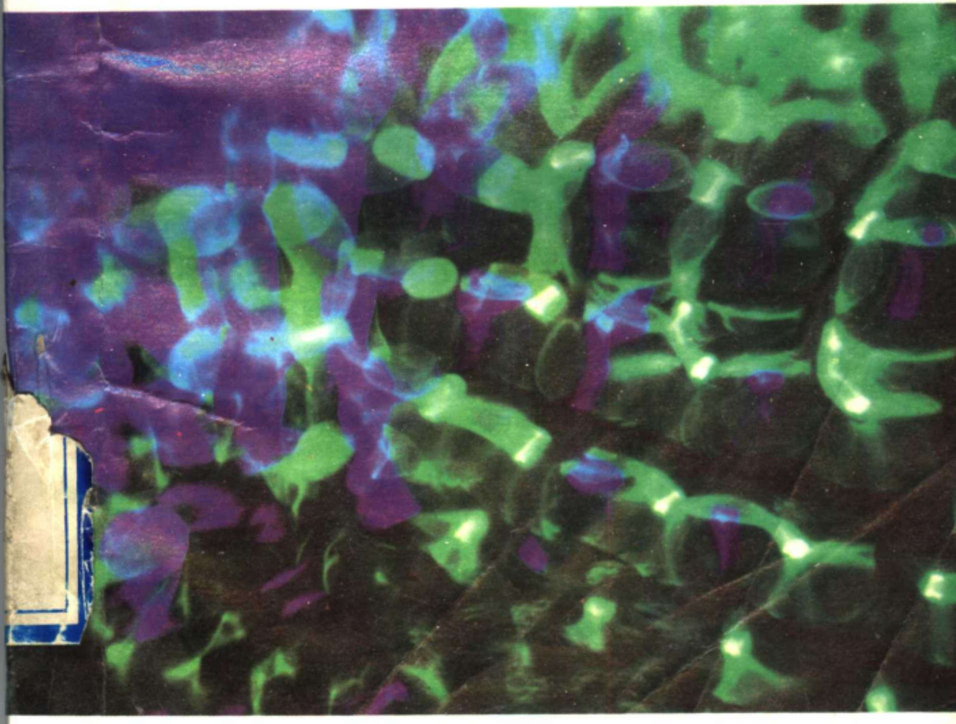
GAOZHONGSHUXUEJINGBIAN

高中数学精编

高一用

立体几何

浙江教育出版社



ISBN 7-5338-2539-X
9 787533 825393 >
ISBN7 - 5338 - 2539 - X/G · 2531
定价:6.00 元

高中数学精编

立 体 几 何

钱孝华 谢玉兰 许纪传
丁宗武 江焕棣 陶敏之

浙江教育出版社

高中数学精编

立体几何

钱孝华　谢玉兰　许纪传
丁宗武　江焕棣　陶敏之

浙江教育出版社出版　辽宁人民出版社重印
辽宁省新华书店发行　赤峰印刷集团公司印刷
开本 787×1092　1/32　印张 7　字数 140000
1997 年 5 月第 2 版　1997 年 6 月沈阳第 6 次印刷
ISBN7-5338-2539-X/G·2531

定价:6.00 元

说　明

《高中数学精编》自1981年出版以来，已经成为广大学生十分喜爱的学习辅导用书，同时也是众多教师卷不离手的教学参考资料.

《高中数学精编》之所以倍受读者青睐，一方面因为"典型题型与解题指导"栏目系统地归纳了解题的方法和技巧，为读者指点迷津；另一方面因为收编的题目新颖、灵活、典型，知识和技能的覆盖面广，对训练思维、提高解题能力很有助益.

此次《高中数学精编》经过重新修订，为了使它更加实用、方便，我们按照"小单元"进行编写，与教材的同步性得到了更加充分的体现，也为教师在教学过程中的选题提供了更多的便利.

本书中所选的题目以A组题、B组题为主，其中A组题属基本要求，B组题略有提高，或有一定的综合性，C组题数量较少，难度较大，可供学有余力的学生选用.

编　者

1997年3月

目　　录

第一章　直线和平面

一、平面、空间两条直线

（一）平　面

【典型题型和解题技巧】

1. 公理 1 的作用

公理 1　如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

公理 1 的作用有以下两点：

(1) 证明点在平面内；

(2) 证明直线在平面内.

2. 公理 2 的作用

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

公理 2 的作用有：

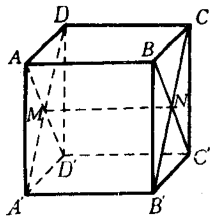
(1) 确定两个平面的交线；

(2) 证明三点共线或证明点在直线上；

(3) 确定直线和平面交点的位置.

例 1　在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，画出平面 $ABC'D'$ 和平面 $A'B'CD$ 的交线.

解:连接 AD' 和 $A'D$ 交于 M,连接 BC' 和 $B'C$ 交于 N.



(例 1)

∵ $M\in$ 直线 AD',

$AD'\subset$ 平面 $ABC'D'$,

∴ $M\in$ 平面 $ABC'D'$;

又 $M\in$ 直线 $A'D$,

$A'D\subset$ 平面 $A'B'CD$,

∴ $M\in$ 平面 $A'B'CD$.

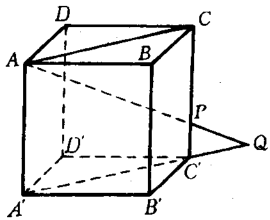
因此,点 M 是平面 $ABC'D'$ 和平面 $A'B'CD$ 的公共点. 同理,点 N 也是平面 $ABC'D'$ 和平面 $A'B'CD$ 的公共点. 连接 MN,根据公理 2,可知直线 MN 就是平面 $ABC'D'$ 和平面 $A'B'CD$ 的交线.

注意 (1) 不要把两个平面的公共点说成是两个平面的交点;

(2) 要确定两个平面的交线,关键在于确定两个平面的两个公共点,这两个公共点的连线就是这两个平面的交线.

例 2 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,点 P 在棱 CC' 上,画出直线 AP 和平面 $A'B'C'D'$ 的交点.

解:连接 AC,$A'C'$. 显然,$A'C'$ 是平面 $AA'C'C$ 和平面 $A'B'C'D'$ 的交线. 设点 Q 是直线 AP 和平面 $A'B'C'D'$ 的交点,



(例 2)

则 $Q\in$ 平面 $A'B'C'D'$,

而 $Q\in AP$,$AP\subset$ 平面 $AA'C'C$,

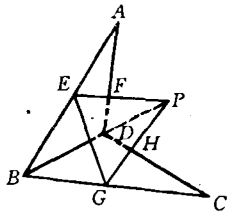
∴ $Q\in$ 平面 $AA'C'C$,故点 Q 是平面 $A'B'C'D'$ 和平面 $AA'C'C$ 的公共

点. 根据公理 2，点 Q 一定在这两个平面的交线 $A'C'$ 上.

延长 AP 交 $A'C'$ 的延长线于点 Q，点 Q 即直线 AP 和平面 $A'B'C'D'$ 的交点.

注意 要确定直线 l 和平面 α 的交点，关键在于确定直线 l 所在的平面和平面 α 的交线 m，而直线 l 与 m 的交点即为所求.

例 3 已知 E,F,G,H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB,AD,CB,CD 上的点，且直线 EF 和 HG 交于点 P(如图)，求证：点 B,D,P 在同一条直线上.



(例 3)

证明：$\because$ 直线 $EF\cap$直线 $HG=P$，

$\therefore$ $P\in$直线 EF，

而 $EF\subset$平面 ABD，

$\therefore$ $P\in$平面 ABD.

同理，$P\in$平面 CBD，即点 P 是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点. 显然，点 B,D 也是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点，由公理 2 知，点 B,D,P 都在平面 ABD 和平面 CBD 的交线上，即点 B,D,P 在一条直线上.

注意 (1) 要证明三点在同一条直线上，只需证明这三点都是两个平面的公共点；

(2) 要证明一点在一条直线上，只需证明这个点是两个平面的公共点，这条直线是两个平面的交线.

3. 公理 3 及其推论的作用

公理 3 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 1 经过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 2 经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线,有且只有一个平面.

公理 3 及其推论的作用有:

(1) 作辅助平面;

(2) 证明平面的唯一性,即证明两个平面重合.

作辅助平面和平面几何中作辅助直线的作用是一样的,可以为解题开拓思路、随着立体几何内容的深入,辅助面将被频繁应用.

【训练题】

(A)

1. 已知点 P 在直线 l 上,l 在平面 α 内,则 P,l,α 之间的关系是(　　)

(A) $P\in l\in\alpha$.　　(B) $P\in l\subset\alpha$.

(C) $P\subset l\in\alpha$.　　(D) $P\subset l\subset\alpha$.

2. 用集合符号表示"点 P 在直线 l 外,l 在平面 α 内",正确的是(　　)

(A) $P\notin l, l\in\alpha$.　　(B) $P\notin l, l\subset\alpha$.

(C) $P\not\subset l, l\in\alpha$.　　(D) $P\not\subset l, l\subset\alpha$.

3. 下列四个条件中,能确定一个平面的是(　　)

(A) 空间任意三点.　　(B) 空间两条直线.

(C) 两条平行直线.　　(D) 一条直线和一个点.

4. 已知空间中四点,如果其中任意三点都不共线,则经过其中三个点的平面共有(　　)

(A) 一个或两个.　　(B) 一个或三个.

(C) 两个或三个.　　(D) 一个或四个.

5. 过一条直线和这条直线外不共线的三点，最多可确定(　　)

(A) 三个平面.　　(B) 四个平面.

(C) 五个平面.　　(D) 六个平面.

6. 若三条直线两两相交，则最多可以确定平面的个数是(　　)

(A) 1个.　(B) 2个.　(C) 3个.　(D) 4个.

7. (1) 若共面的三条直线两两相交，则交点的个数是______；

(2) 四条直线过同一点，过每两条直线作一个平面，则可以作______个不同的平面；

(3) 互相平行的四条直线，每两条确定一个平面，最多可确定____个平面，最少可确定____个平面.

(B)

8. 已知平面 α 与平面 β，平面 γ 都相交，则这三个平面可能的交线有(　　)

(A) 1条或2条.　　(B) 2条或3条.

(C) 1条或3条.　　(D) 1条，或2条，或3条.

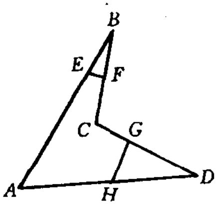
9. 已知点 E,F,G,H 分别为空间四边形 $ABCD$(即四个顶点不共面的四边形)的边 AB,BC,CD,DA 上的点，且直线 $EF\cap$ 直线 $GH=P$(如图)，则点 P 在(　　)

(A) 平面 ABD 内.

(B) 直线 AC 上.

(C) 直线 AD 上.

(D) 直线 BD 上.



(第9题)

10. 已知平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，点 $M\in\alpha$，$N\in\beta$，且 $P\notin l$，又 $MN\cap l=R$，过 M，

N, P 三点所确定的平面记为 γ，则 $\beta \cap \gamma$ 等于(　　)

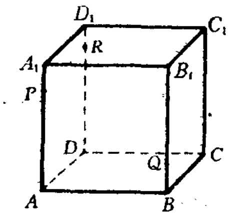
(A) 直线 MP.　　　(B) 直线 NP.

(C) 直线 PR.　　　(D) 直线 MR.

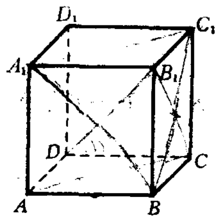
11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P, Q, R 分别是棱 AA_1，BB_1，DD_1 上的点(如图).

(1) 画出过 P 和 Q 两点的直线与底面 $ABCD$ 的交点；

(2) 画出过 R 和 Q 两点的直线与底面 $ABCD$ 的交点.



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，根据给出的条件，分别画出有关图形(如图)：

(1) 过 B, A_1, C_1 三点的截面；

(2) 过 B_1, A, C 三点的截面；

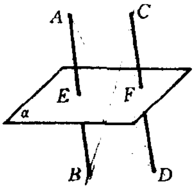
(3) 上述两截面的交线.

13. (1) 已知线段 $AB /\!/ CD$，且 $AB \cap \alpha = E$，$CD \cap \alpha = F$(如图)，画出线段 AD, BC 与平面 α 的交点；

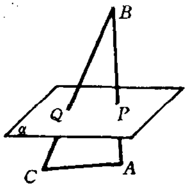
(2) 已知 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 与平面 α 分别交于 P, Q 两点(如图)，画出直线 AC 与平面 α 的交点 R，并说明理由；

(3) 在四面体 $ABCD$ 中，已知点 M, N, P 分别在棱 AD，BD, CD 上，点 S 在面 ABC 内(如图)，画出线段 SD

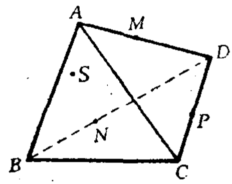
与过点 M,N,P 的截面的交点.



(第 13(1)题)



(第 13(2)题)

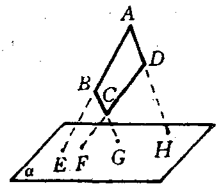


(第 13(3)题)

14. (1) 两个平面把空间分成几个部分？画图表示各种情况；

(2) 三个平面把空间分成几个部分？画图表示各种情况.

15. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB // CD$，AB、BC，AD、DC(或延长线)分别与平面 α 相交于点 E,G,H,F(如图). 求证：E,F,G,H 必在同一条直线上.



(第 15 题)

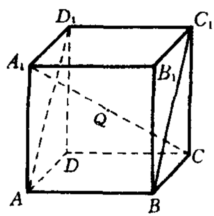
16. 求证：

(1) 空间不共点且两两相交的四条直线在同一平面内；

(2) 相交于一点的一组直线如果与不过该公共点的一条直线都相交，那么这组直线在同一平面内.

17. 已知一条直线和四条平行直线都相交，求证：这五条直线在同一平面内.

18. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，记 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于点 Q(如图)，求证：点 B,Q,D_1 共线.



(第 18 题)

（二）空间两条直线

【典型题型和解题技巧】

1. 异面直线所成角的计算

两条异面直线所成角的求解，既是本单元学习的重点，也是难点.

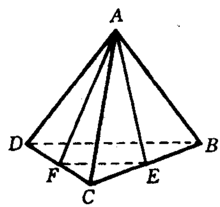
求两条异面直线所成的角，主要有两种方法.

(1) 平移. 所谓平移，就是平移两条异面直线中的一条，使之转化为两条相交直线所夹的角.

例 1 在正四面体 $ABCD$(四个面是全等的等边三角形的四面体)中，已知 E 是棱 BC 的中点，求异面直线 AE 和 BD 所成角的余弦值.

解:取 CD 的中点 F，连接 EF，则 $EF \parallel BD$，于是$\angle AEF$(或其补角)就是异面直线 AE 和 BD 所成的角.

连接 AF，在$\triangle AEF$ 中，令 $AB=2$，则 $AE=AF=\sqrt{3}$，$EF=1$，于是由余弦定理可得，$\cos\angle AEF=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，



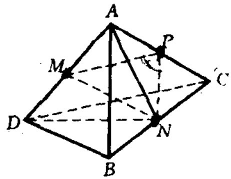
(例 1)

故异面直线 AE 和 BD 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

例 2 已知正四面体 $ABCD$，求异面直线 AB 和 CD 所成角的大小.

解:分别取 AC，AD，BC 的中点 P，M，N，连接 PM，PN. 由三角形中位线性质得，$PN \parallel AB$，$PM \parallel CD$，于是$\angle MPN$(或其

补角)就是异面直线 AB 和 CD 所成的角.



(例 2)

连接 MN,DN. 设 $AB=2$,

则 $PM=PN=1$,

而 $AN=DN=\sqrt{3}$,

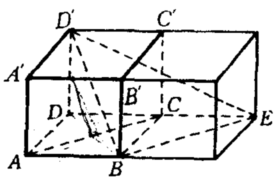
由 $MN\perp AD$,$AM=1$.

得 $MN=\sqrt{2}$,故 $\angle MPN=90°$,即异面直线 AB 和 CD 成 $90°$角.

(2) 补形.

例 3 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,已知 $AB=a$,$BC=b$,$AA'=c$ $(a>b)$,求异面直线 $D'B$ 和 AC 所成角的余弦值.

解:在长方体的一旁,补上一个全等的长方体(如图),则 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} AC$,$\angle D'BE$(或其补角)即 $D'B$ 和 AC 所成的角.



(例 3)

$\because$ $D'B=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,

$BE=\sqrt{a^2+b^2}$,

$D'E=\sqrt{4a^2+c^2}$,

$$\therefore\ \cos\angle D'BE=\frac{D'B^2+BE^2-D'E^2}{2\cdot D'B\cdot BE}$$

$$=\frac{-a^2+b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}<0,$$

$\therefore$ $D'B$ 与 AC 所成角的余弦值为

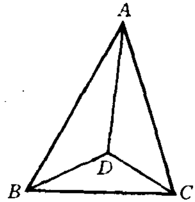
$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}.$$

注意 本例也可用“平移”的方法求解(平移 $D'B$ 或平移 AC),读者不妨试一试.

2. 异面直线的证明

例 4 求证：空间四边形的两条对角线是异面直线.

证明：如图，假设空间四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 不是异面直线，则 AC，BD 共面于 α，因此点 A，B，C，D 均在平面 α 内，这与已知"$ABCD$ 是空间四边形（四个顶点不在同一平面内）"相矛盾.



（例 4）

故假设错误，因此 AC，BD 是异面直线.

注意 （1）证明两条直线是异面直线，通常采用反证法. 例如：要证明直线 AB，CD 异面，首先可假设 AB，CD 不异面，则 AB，CD 共面于 α，……. 也可作如下假设：假设 AB，CD 不异面，则 $AB /\!/ CD$ 或 AB，CD 相交. 若 $AB /\!/ CD$，则……；若 AB，CD 相交，则……. 必须指出，后一方法往往不如前一方法优越；

（2）反证法是间接证法的一种，它在立体几何证题中经常用到. 在运用反证法时，一定要严格按照步骤分层次进行：

第一步，作出和结论相反的假设；

第二步，从假设出发，推导出一个与已知或某一公理、定理，或某一已获证的命题相抵触的结论，从而得到一对逻辑矛盾；

第三步，推翻假设，肯定题中的结论.

当然，同一法也非常重要，对某些问题的证明，用同一法则更为简便.