



中学教材

标准学案

ZHONGXUE JIAOCAI
BIAOZHUN XUEAN

数学

高一上册

现代出版社



中学教材

标准学案

本册主编 张昌盛 徐 峰
编 者 王秀云 索文娟 徐 峰
拾景爱 邱慎海 简晓彬

60A10021

数学

高一上册

现代出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教材标准学案. 高一数学. 上/张昌盛. 徐峰主编. -北京:现代出版社, 2004
ISBN 7 - 80188 - 257 - 1

I. 中... II. ①张... ②徐... III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 033559 号

主 编 张昌盛 徐 峰
策 划 周仲明
责任编辑 傅威海 张 晶
出版发行 现代出版社
地 址 北京市安定门外安华里 504 号
邮政编码 100011
电 话 010-64267325 64240483(传真)
电子邮箱 xiandai@cnpitc.com.cn
印 刷 济南申汇印务有限责任公司
开 本 880×1230 1/16
印 张 84.75
版 次 2005 年 4 月第 1 版 2005 年 4 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 7-80188-257-1
全套定价 106.00 元

版权所有,翻印必究;未经许可,不得转载



QIAN YAN 前言

60A10021



亲爱的中学生朋友：

摆在你们面前的这本全新的教学辅导用书，是一群有实战经验的大朋友为你们在课堂上学好教材而编写的。课堂生活是你们学校生活的最基本构成，它的质量，直接影响着当下及今后你们的多方面发展和成长。请记住：选择一套好的课堂辅助用书，就如选好一个得力的学习“帮手”。

教学是由教与学两个主体的互动来完成的。传统的教辅用书，多以教师为中心，从教师的教出发去编写，忽视了学生作为学习主体的存在。为此，一本完全站在你们的角度，从你们课堂学习需要出发而设计的全新辅导用书——《中学教材标准学案》诞生了。

“学案”，顾名思义就是一种学习方案，它体现了对你们学习过程的规划、学习思路的梳理、学习方法的点拨、学习规律的总结、训练样题的设计。

“标准”，是说这套书内容的组织、材料的选择、流程的设计都是符合你们课堂学习及考试规律的。目前，你们的学习还不是完全独立的，要在教师的指导下进行，学习的内容也不是随意的，而是按照教学大纲精心选择的，课堂学习过程也是有目的、有计划、有组织进行的，不像日常生活可以任意安排。因此，我们在设计这套书时，抱定的宗旨是：与你们的课堂学习生活靠近些、再靠近些；标准些、再标准些。

在正式阅读本书正文之前，请仔细阅读下面的阅读地图！

章节标题

预习导航	以填空、例题、设问、解答等多种方式帮助你预习教材，提取教材关键信息
通解设计	对教材进行逐字逐句逐段的详细解读，讲知识、讲概念、讲思路、讲方法——或是对线索脉络的梳理，或是对概念的阐释与运用，或是对内涵本质的挖掘与联系，或是对记忆、思维技巧的培养和引导。为突出其可操作性，强调的是案例举证实、解例麻雀式的实例点评，并依据双栏双色设计，体现实例与点评之间的互动
整合全案	重组、综合、迁移教材所学知识，彰显高中学习的归纳意识、综合意识、反省意识、主干知识导学导练意识，试题编制与解析的权威意识、高考资讯的传递意识等
同步达标	高考重视同步性，A级题一看就懂，一做就会；B级题体现创新与应用，略有难度
本章综合检测	提供带有评分标准的规范考卷，进行过程性学习评价
本章习题答案	标明课本上的课后习题的页码及序号
本章高考试题精编	汇集高考名题，提供标准答案，明确考试方向，突出学习重点

考虑到学科特点，以上栏目有的略有不同。

同学们，本学案以你们课堂学习模式为标准，以你们的学习进步为己任，将不遗余力地引领你们走向成功的彼岸。

SBA 36/06

编者
2005年4月

MU LI 目录

第一章 集合与简易逻辑	1
一 集 合	1
§ 1.1 集 合	1
§ 1.2 子集、全集、补集	6
§ 1.3 交集、并集	10
§ 1.4 含绝对值的不等式解法.....	16
§ 1.5 一元二次不等式解法.....	21
二 简易逻辑	28
§ 1.6 逻辑联结词.....	28
§ 1.7 四种命题.....	34
§ 1.8 充分条件与必要条件.....	42
小结与复习	48
本章检测题	51
第二章 函 数	52
一 函 数	52
§ 2.1 函 数.....	52
§ 2.2 函数的表示法.....	60
§ 2.3 函数的单调性.....	73
§ 2.4 反函数.....	81
二 指数与指数函数	88
§ 2.5 指 数.....	88
§ 2.6 指数函数.....	92
三 对数与对数函数	99
§ 2.7 对 数.....	99
§ 2.8 对数函数	104
§ 2.9 函数的应用举例	111

小结与复习	118
本章检测题	122
第三章 数 列	124
§ 3.1 数 列	124
§ 3.2 等差数列	131
§ 3.3 等差数列的前 n 项和	138
§ 3.4 等比数列	145
§ 3.5 等比数列的前 n 项和	154
研究性学习课题: 数列在分期付款中的应用	161
小结与复习	166
本章检测题	170
参考答案	173

第一章 集合与简易逻辑

一 集合

§ 1.1 集合

③ 预习导航

● 要点扫描

1. “很大的数”“自然数”“ $\sqrt{2}$ 的近似值”“全国的小河流”各组对象可组成集合的是_____.
2. 对于集合 $(0, x)$, x 的取值范围是_____.
3. $(1, 2)$ 与 $(2, 1)$ 是否为同一集合_____ (填“是”或“否”).
4. 不含任何元素的集合叫做_____, 记作_____.
5. 常用数集的记法: 自然数集: _____; 正整数集: _____; 整数集: _____; 有理数集: _____; 实数集: _____.
6. 0.5 _____ \mathbf{N} ; 0.5 _____ \mathbf{Q} ; $\sqrt{2}$ _____ \mathbf{Z} ; $\sqrt{2}$ _____ \mathbf{R} (用 \in 或 \notin 填空).
7. 根据集合中所含元素的个数, 可将集合分为_____和_____.
8. 集合的表示方法, 常用的有_____和_____.
9. 中国的国旗颜色组成的集合, 可表示为_____.
10. 集合 { 等腰三角形 } 还可表述为_____.
11. 列举法与描述法各有优点, 应具体问题具体分析, 但无限集一般不用_____表示.
12. 为了方便集合的表示, 常用_____的拉丁字母表示集合, 如_____; 用_____的拉丁字母表示集合的元素, 如_____.
13. 集合 $\{x \in \mathbf{R} | x^2 = 1\}$ 的记法也可写成_____或_____.
14. 集合 $\{x \in \mathbf{N} | 0 \leq x < 3\}$, 用另一种方法表示为_____.

关键信息

1. 自然数
2. $x \neq 0$
3. 是
4. 空集 \emptyset
5. \mathbf{N} \mathbf{N}^+ 或 \mathbf{N}_+ \mathbf{Z}
 \mathbf{Q} \mathbf{R}
6. \in \in \in \in
7. 有限集 无限集
8. 列举法 描述法
9. { 红色, 黄色 }
10. { 两条边相等的三角形 } 或 { 两个内角相等的三角形 } ……
11. 列举法
12. 大写 A, B, \dots
小写 a, b, \dots
13. $\{x \in \mathbf{R}; x^2 = 1\}$ $\{x \in \mathbf{R}; x^2 = 1\}$
14. $\{0, 1, 2\}$

④ 重点、难点聚焦

● 重点、难点解析

1. 集合的概念

一般地, 某些指定的对象集在一起, 就成为一个集合, 简称集, 此概念也可描述为“有确定对象的集体”. 集合的唯一要素是元素, 它可以是数、式、方程、不等式, 也可以是图形等.

2. 集合中的元素具备的特征

(1) 确定性特征: 设集合 A 给定, 若有一具体对象 x , 则 x 是 A 的元素, 或者 x 不是 A 的元素, 二者必居其一, 且只居其一.

(2) 互异性特征: 设集合 A 给定, A 的元素是指含于其中的互不相同的元素, 即同一集合中同一元素不能重复出现.

(3) 无序性特征: 设集合 A 给定, A 中的元素相互交换次序, 所得集合与集合 A 相同, 即集合中的元素是不排序的. 如: 集合 $\{a, b, c\}$ 与集合 $\{b, a, c\}$ 及集合 $\{c, b, a\}$ 是指同一集合.

● 学法指导

【例1】下列各题中的对象可构成一个集合的是…………… ()

- A. 漂亮的工艺品 B. 老实人
C. 本班数学成绩及格的学生 D. 高个子男生

【分析】由集合的概念可知, 集合中的元素必须是明确的, 不允许出现模棱两可、无法断定的陈述. 诸如“漂亮”“老实”“高个子”便是不确切的描述. 故选 C.

【例2】数集 $\{1, x, x^2 - x\}$ 中的元素 x 应满足的条件是什么?

【分析】根据集合中元素具有的互异性可知, 数集中的元素应满足 $x \neq 1$ 且 $x^2 - x \neq 1$ 及 $x^2 - x \neq x$ 三个条件, 从而可得

$$\text{到 } x \neq 0, 1, 2, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

【例3】下面四个关系式:

3. 集合与元素之间的关系

集合与元素之间的关系只有“属于(\in)”或“不属于(\notin 或 $\bar{\in}$)”两种关系.如: a 是集合 A 的元素,记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A ; a 不是集合 A 的元素,记作 $a \notin A$ (或 $a \bar{\in} A$),读作 a 不属于集合 A .

集合与集合之间则不存在“属于”关系.

4. 集合的分类

集合按元素个数可以分为:有限集、无限集.特殊地,不含任何元素的集合叫做空集,记作 \emptyset .

注意: $\emptyset \neq \{0\}$,这是因为 $\{0\}$ 是以一个 0 为元素的单元元素集合,而非不含任何元素.

5. 集合的表示法

(1)列举法:是把集合中的元素一一列举出来的方法.此方法可以看清集合的元素,但一般无限集不宜采用列举法.

(2)描述法:是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.此方法可以看清集合元素的特征.用描述法表示的集合,对其元素的属性要准确理解.

例如:集合 $\{y|y=\sqrt{x}\}$ 表示正数 y 值的全体,即 $\{y|y \geq 0\}$;集合 $\{x|x=\sqrt{x}\}$ 表示自变量 x 的值的全体,即 $\{x|x \geq 0\}$;集合 $\{(x,y)|y=x\}$ 表示直线 $y=x$ 上的点的全体,是点集(一条直线);集合 $\{y=x\}$ 是用列举法表示的单元元素集,即只有一个元素(方程 $y=x$)的有限集.

除此之外,集合还常用韦恩图来表示.韦恩图是用封闭曲线内部的点来表示集合的方法(有时,也用小写字母分别定出集合中的某些元素).

6. 解集合问题的关键

解集合问题的关键:弄清集合是由哪些元素所构成的,也就是将抽象问题具体化、形象化,将描述法表示的集合用列举法来表示,或用韦恩图来表示抽象的集合,或用图形来表示集合,比如用数轴来表示集合,或是集合的元素为有序实数对时,可用平面直角坐标系中的图形表示相关的集合等.

整合与扩展

1. 集合的表示方法

集合的常用表示法有列举法、描述法、韦恩图表示法.在不问情况下,应选取适当的表示法.一般来说,当元素个数较少时,可选用列举法;当元素个数较多时,可选用描述法;韦恩图表示法形象直观,并在今后分析集合之间的关系时经常用到,但此方法不够严密!

2. 怎样判断用不同的表示法所表示的集合是否相同?

判断两集合是否相同,即看组成两集合的元素是否完全一样.列举法所表示的集合,元素逐一罗列,清晰易辨,非常容易判断;描述法体现的是集合中元素所具有的共同性质,这就要通过元素的特征性质判断集合是由哪些元素组成,进而判断两集合是否相同.

3. 如何利用已知条件,求出集合?

求集合就是要求出集合中的元素或元素所满足的较明显的特征性质.若求出集合中的所有元素,可用列举法表示集合;若找出了集合的特征性质,则可用描述法表示集合.

$0, 2 \in \mathbf{N}, 0 \notin \mathbf{N}, \sqrt{2} \notin \mathbf{Z}, 0 \in \emptyset$.

其中正确的个数是..... ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【分析】首先认清 \mathbf{N} 即为自然数集, \mathbf{Z} 即为整数集, \emptyset 为不含任何元素的空集.因而有 $0, 2 \in \mathbf{N}, 0 \in \mathbf{N}, \sqrt{2}$ 为有理数、非整数,故 $\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$ 是正确的, $0 \notin \emptyset$.所以选C.

[例4]下列表述是否正确?说明理由.

(1) $\mathbf{Z} = \{\text{全体整数}\}$;

(2) $\mathbf{R} = \{\text{实数集}\} = \{\mathbf{R}\}$.

【分析】“ $\{\}$ ”是集合符号,包含了“所有”“全体”“全部”“集”等含义,因而这些词语不能再出现在大括号里;而 $\{\mathbf{R}\}$ 表示以实数集为元素的集合,它与 \mathbf{R} 的关系是 $\mathbf{R} \in \{\mathbf{R}\}$.

故(1) $\mathbf{Z} = \{\text{整数}\}$;

(2) $\mathbf{R} = \{\text{实数}\}$.

[例5]方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集是..... ()

- A. $\{2, 1\}$ B. $\{(2, 1)\}$ C. $\{x=2, y=1\}$ D. $\{(x, y)|x=2 \text{ 或 } y=1\}$

【分析】方程组的解为有序数对,而A中为两个元素 $2, 1$ 组成的数集,不是有序数对;C中不符合集合表示法的基本模式,既不是列举法也不是描述法;D中虽是点集,但其中元素为 $(2, y)$ 或 $(x, 1)$, x, y 可以取一切实数,它表示两条直线 $x=2$ 或 $y=1$ 上所有的点的集合.故选B.

[例6]求集合 $\{x|x-1 < 0\}$ 与集合 $\{x|x > a, a \in \mathbf{R}\}$ 有公共元素时 a 的取值范围.

【分析】集合 $\{x|x-1 < 0\}$ 即为不等式 $x-1 < 0$,即 $x < 1$ 的解集,而集合 $\{x|x > a, a \in \mathbf{R}\}$ 即为不等式 $x > a$ 的解集.若两集合有公共元素,即不等式组 $\begin{cases} x < 1 \\ x > a \end{cases}$ 有解,故 $a < 1$.

[例7]用适当的方法表示下列集合.

- (1)正奇数集;
- (2)大于1小于5的整数组成的集合;
- (3)方程 $x^2+mx-n=0$ 的解集;
- (4)平面直角坐标系中第二、四象限内的点集.

【分析】首先搞清楚组或集合的元素是什么,然后再选择适当的方法表示集合.

- 【解】(1) $\{\text{正奇数}\} = \{x|x=2k+1, k \in \mathbf{N}\}$;
- (2) $\{\text{大于1小于5的整数}\} = \{x \in \mathbf{Z}|1 < x < 5\} = \{2, 3, 4\}$;
- (3) $\{x|x^2+mx-n=0\}$;
- (4) $\{(x, y)|xy < 0\}$.

[例8]判断下列各组集合是否是同一集合.

- (1) $\{x|x=(-1)^n, n \in \mathbf{Z}\}$ 与 $\{y|y=(-1)^{n+1}, n \in \mathbf{N}^+\}$;
- (2) $\{(x, y)|y=x^2, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $\{y|y=x^2, x \in \mathbf{R}\}$.

【分析】(1)在集合 $\{x|x=(-1)^n, n \in \mathbf{Z}\}$ 中,若 n 为奇数,则 $x=-1$;若 n 为偶数,则 $x=1$.所以 $\{x|x=(-1)^n, n \in \mathbf{Z}\} =$



札记

$\{-1, 1\}$.

在集合 $\{y|y=(-1)^{n+1}, n \in \mathbf{N}^*\}$ 中, 若 n 为奇自然数, 则 $y=1$; 若 n 为偶自然数, 则 $y=-1$. 所以 $\{y|y=(-1)^{n+1}, n \in \mathbf{N}^*\} = \{-1, 1\}$.

故两集合相同.

(2) 集合 $\{(x, y)|y=x^2, x \in \mathbf{R}\}$ 可看成是二次函数 $y=x^2$ 图象上的点集, 即抛物线上的点集, 而集合 $\{y|y=x^2, x \in \mathbf{R}\}$ 是二次函数 $y=x^2$ 的所有函数值组成的集合, 由二次函数 $y=x^2$ 的图象可知: $y \geq 0$, 即集合是由大于或等于零的数所组成的数集, 故两集合不同.

[偶9] 设集合 A 中的元素为实数, 且满足:

① $1 \notin A$; ② $2 \in A$; ③ 若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$. 试求集合 A .

【分析】 此题应紧扣已知条件“若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$ ”得到集合中的一个元素, 反复利用这一条件, 便可找出集合中的其他元素, 从而求出集合 A .

【解】 \because 若 $a \in A$, 则有 $\frac{1}{1-a} \in A$, 且 $2 \in A$,

$\therefore \frac{1}{1-2} \in A$, 即 $-1 \in A$. 于是有 $\frac{1}{1-(-1)} \in A$,

即 $\frac{1}{2} \in A$. 进而由 $\frac{1}{2} \in A$, 有 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \in A$, 即 $2 \in A$.

所以集合 $A = \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$.



同步达标

A 组

一、选择题

- 下列各题中可以组或集合的是 ()
 - “相当大的实数”
 - “某中学视力比较差的全体学生”
 - “某校高一参加数学竞赛的全体学生”
 - “北京师范大学出版社中出色的编辑”
- 下列集合中, 是无限集的为 ()
 - 平方后等于自身的数
 - 不超过 $\sqrt{2}$ 的正有理数
 - $\{x \in \mathbf{Z} | 0 < x < 10\}$
 - 中国人民解放军中的十大元帅
- 下列四个集合中, 不同于另外三个集合的是 ()
 - $\{y|y=1\}$
 - $\{x|x^2-2x+1=0\}$
 - $\{x=1\}$
 - $\{1\}$
- 对于关系: (1) $\sqrt{3} \in \mathbf{R}$, (2) $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}$, (3) $0 \in \mathbf{Z}$, (4) $0 \in \emptyset$, 其中正确的个数为 ()
 - 4
 - 3
 - 2
 - 1
- 下列表示方程 $(x+1)(x-2)(x-3)=0$ 的解集不正确的是 ()
 - $\{-1, 2, 3\}$
 - $\{3, -1, 2\}$

C. $\{(-1, 2, -3)\}$

D. $\{x|(x+1)(x-2)(x-3)=0\}$

6. 已知集合 $M = \{x|\sqrt{3} < x < \sqrt{10}\}$, 则以下结论中正确的是 ()

A. $2 \in M$ 但 $3 \notin M$

B. $2 \notin M$ 但 $3 \in M$

C. $2 \in M$ 且 $3 \in M$

D. $2 \notin M$ 且 $3 \notin M$

二、填空题

7. 集合 $\{x \in \mathbf{N} | x=7-2n, n \in \mathbf{N}\}$, 用列举法表示为 _____.

8. 用不等式 $2x-3 < 4$ 在自然数集中的解构成的集合为 _____.

9. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合, 最多含有 _____ 个元素.

10. 若集合 $\{x|ax^2+x+1=0\}$ 有且只有一个元素, 则实数 a 的取值集合为 _____.

三、解答题

11. 将“被 9 除余 2 的数”组成的集合, 用适当的方法表示出来, 并指出它是有限集还是无限集.

12. 若方程组 $\begin{cases} (a^2-1)x+(a-1)y=15, \\ (5-3a)x-2a=y \end{cases}$ 的解集为 \emptyset , 求实数 a 的值.

13. 设 A 表示集合 $\{2, 3, a^2+2a-3\}$, B 表示集合 $\{|a+3|, 2\}$. 已知 $5 \in A$ 且 $5 \notin B$, 求 a 的值.

14. 若 $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2-4\}$, 求实数 a .

15. 用特征性质描述法, 表示图 1-1-1 中阴影部分的点(含边界上的点)组成的集合 M .

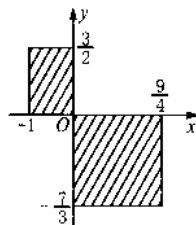


图 1-1-1

B 组

一、选择题

- 集合 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 用描述法表示应是 ()
 - $\{x \mid x \text{ 是不大于 } 9 \text{ 的非负奇数}\}$
 - $\{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 9\}$
 - $\{x \in \mathbf{Z} \mid 0 \leq x \leq 9\}$
 - $\{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 9\}$
- 集合 $M = \{(x, y) \mid xy \geq 0, x, y \in \mathbf{R}\}$ 是指 ()
 - 第一象限内的点集
 - 第三象限内的点集
 - 第一、三象限内的点集
 - 不在第二、四象限内的点集
- 已知集合 $M = \{x \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Q}\}$, 则下列元素中不属于集合 M 的元素是 ()
 - $x = 1 + \sqrt{2}\pi$
 - $x = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$
 - $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$
 - $x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$

4. 方程组 $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1 \end{cases}$ 的解集不能表示为 ()

- $\{(x, y) \mid x = 1 \text{ 且 } y = 2\}$
- $\{1, 2\}$
- $\{(1, 2)\}$
- $\{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0\}$

5. 下列结论:
- 方程 $(x-1)^2(x+5)(x+1) = 0$ 的解集为 $\{1, 1, 1, -5, -1\}$;
 - 实数集 $\{1, a, a^2 - a\}$ 中元素 a 所满足的条件为 $a \neq 0$ 或 $a \neq 1$ 或 $a \neq 2$;
 - 集合 $A = \{a, b, c\}$ 中的三个元素可构成 $\triangle ABC$ 三边长, 则 $\triangle ABC$ 一定不是等腰三角形. 其中正确的个数是 ... ()
 - 3
 - 2
 - 1
 - 0

二、填空题

- 用列举法表示中国的直辖市组成的集合 _____.
- 用描述法表示直角坐标平面内横坐标与纵坐标相等的点的集

合为 _____.

- 设 x, y, z 都是非零实数, 试用列举法将 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|}$ 的可能取值组成的集合表示出来为 _____.
- 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, 若 A 中元素至多只有一个, 则 a 的取值范围是 _____.

三、解答题

- 已知 $x^2 \in \{1, 0, x\}$, 求实数 x 的值.
- 已知 $A = \{x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbf{N}^+, x \in \mathbf{Z}\}$ 试用列举法表示集合 A .
- 已知含有三个元素的集合 $M = \{x, xy, x-y\}$, $N = \{0, |x|, y\}$, 且 $M = N$. 求 x, y 的值.

- 对于前面选择题第 3 题中的集合 M , 若 $x_1 \in M, x_2 \in M$.
 - 试问: $x_1 \cdot x_2, \frac{x_1}{x_2}$ 是否属于 M ? 为什么?
 - 若将 M 改为 $M = \{x \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}\}$, 试问: $x_1 \cdot x_2, \frac{x_1}{x_2}$ 是否属于 M ? 为什么?

 应用样板

1. 设集合 $\{x | x^2 + ax + b = 0\} = \{2\}$, 求实数 a, b 的值.
2. 已知集合 $\{$ 关于 x 的方程 $ax^2 + 2x - 3 = 0$ 的解 $\}$ 只含 1 个元素, 求 a 的值.
3. 已知集合 $A = \{-2, x^2 + x - 4, 3x^2 + 3x - 4\}$, 且 $2 \in A$, 求满足

上述条件的实数 x 组成的集合.

4. 集合 $\{x | x = 0\}, \{x = 0\}, \{(x, y) | x = 0, y \in \mathbf{R}\}$ 表示的是否为同一集合? 为什么?

● 名师解密

1. 本小题考查学生对集合含义的理解, 及对一元二次方程根的情况的掌握.

【解】 $\because \{x | x^2 + ax + b = 0\} = \{2\}$,

\therefore 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两个相等的实根 2.

故由韦达定理可知 $a = -4, b = 4$.

2. 本小题考查对用描述法表示集合的准确理解.

【解】当 $a = 0$ 时,

方程化为 $2x - 3 = 0$,

解得 $x = \frac{3}{2}$;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 4 - 12a = 0$,

解得 $a = -\frac{1}{3}$.

$\therefore a$ 的值为 0 或 $-\frac{1}{3}$.

3. 本小题考查集合中元素的互异性.

【解】 $\because 2 \in A$,

$\therefore x^2 - x - 4 = 2$ 或 $3x^2 + 3x - 4 = 2$.

若 $x^2 - x - 4 = 2$, 则 $x = -3$ 或 $x = 2$, 这时 $3x^2 + 3x - 4 = 14$ 符合题意.

若 $3x^2 + 3x - 4 = 2$, 则 $x = -2$ 或 $x = 1$, 这时 $x^2 - x - 4 = -2$, 不符合集合中元素的互异性, 故舍去.

\therefore 实数 x 组成的集合为 $\{-3, 2\}$.


4. 本小题考查对集合的表示法的正确理解.

【解】 $\{x | x = 0\}$ 中的元素是数轴上的一个点;

$\{x = 0\}$ 表示是以方程 $x = 0$ 为元素的集合;

$\{(x, y) | x = 0, y \in \mathbf{R}\}$ 中的元素是直角坐标平面内 y 轴上的所有点.

所以, 这是三个不同的集合.

 拓展阅读

阅读赏析

“集合”是数学王国中最抽象的概念之一, 因为我们很难给它一个严密的定义, 但从另一个角度来看, “集合”也体现了数学中最直观的事物——一组指定的对象. 集合也是“数学大厦”的根基之一, 在这一直观概念上构建了极丰富而严密的理论.

用集合解决现实生活中的实际问题是很有效的. 请看如下的例子:

如果已知一个班有 30 人, 其中 5 人有兄弟, 5 人有姐妹, 你能判断这个班有多少人是独生子女吗? 如果不能判断, 你能说出还需哪些条件才能对这一问题作出判断吗?

事实上, 如果注意到“有兄弟的人也可能有姐妹”, 我们就知道, 上面给出的条件不足以判断这个班独生子女的人数. 为了解决这个问题, 我们还必须知道“有兄弟且有姐妹的同学的人数”. 从逻辑上完全搞清这一问题并非易事, 但如果应用集合的知识, 我们就能清晰地描述并解决上述问题了.

下面的问题体现了逻辑推理的奇妙——

一位英国探险家到非洲探险, 一天夜里, 营地失窃. 在追捕小偷时抓住了两个嫌疑犯, 并且已知两人中有一个是小偷而另一个则是清白的(有且只有一个是小偷——数学语言). 探险家问其中一个嫌疑犯: “你是小偷吗?” 他回答说: “枯姆.” (上语) 另一个嫌疑犯会讲英语, 解释说: “他说‘不是’.”

请你判断谁是小偷.

首先, 让我们假设小偷一定说谎, 而清白者一定讲实话. 如果第一个回答探险家问题的疑犯是小偷, 他将回答“不是”, 如果他不是小偷, 他更应理直气壮地回答“不是”. 因此, 不论第一位疑犯是不是小偷, 他都将回答“不是”. 而第二个的回答说明他自己没有说谎, 由此判定, 第一个回答探险家问题的嫌疑犯是小偷.

在上面的分析中, 我们已在不知不觉中运用了逻辑推理和数学中的一些基本思考方式.

§ 1.2 子集、全集、补集

预习导航

● 要点扫描

1. 集合与集合之间,存在着“_____”与“_____”的关系.
2. 一般地,对于两个集合 A 和 B ,如果集合 A 的_____一个元素都是集合 B 的元素,就说集合 A _____集合 B (或集合 B _____集合 A),记作 A _____ B (或 B _____ A),这时,也说集合 A 是集合 B 的_____.
3. 集合 A 不包含于集合 B (或集合 B 不包含集合 A),记作 A _____ B (或 B _____ A).
4. 对于两个集合 A 与 B ,如果 A _____ B ,并且 A _____ B ,就说集合 A 是集合 B 的真子集,记作 A _____ B (或 B _____ A).
5. 空集是任何集合的_____,记作 \emptyset _____ A ;空集又是任何_____集合的_____.
6. 一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的_____一个元素都是集合 B 的元素,同时,集合 B 的_____一个元素都是集合 A 的元素,就说集合 A _____集合 B ,记作_____.
7. 对于集合 A, B, C ,如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$,那么_____.
8. 对于集合 A, B ,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,那么_____.
9. 一般地,设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集,由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的_____ (或_____),记作_____,即_____.
10. 如果集合 S 含有所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个_____,通常用_____表示.
11. 集合 $\{a\}$ 的子集为_____;真子集为_____.
12. 如果全集 $U = \mathbb{R}, A = \{\text{无理数}\}$,那么 $C_U A =$ _____.

关键信息

1. 包含 相等
2. 任何
包含于 包含
 $\subseteq \supseteq$ 子集
3. \emptyset
 \subseteq
4. $\subseteq \neq$
 $\subsetneq \supsetneq$
5. 子集 \subsetneq 非空
真子集
6. 任何
任何
等于 $A=B$
7. $A \subseteq C$
8. $A=B$
9. 补集 余集 $C_S A$
 $C_S A = \{x | x \in S, \text{且 } x \notin A\}$
10. 全集 U
11. $\emptyset, \{a\}, \emptyset$
12. 有理数集 \mathbb{Q}

重点、难点聚焦

● 重点、难点解析

1. 子集

(1) 子集:如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则 A 是 B 的子集,也说 A 包含于 B ,或 B 包含 A ,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).

(2) 规定:空集是任何集合的子集. $\emptyset \subseteq A$.

(3) 两集合相等:如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则 A 等于 B ,记作 $A=B$. (注意:任何一个集合是它本身的子集)

(4) 真子集:如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,则 A 是 B 的真子集,记作: $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$). 空集是任何非空集合的真子集.

(5) 有限集合的子集个数: n 个元素的集合有 2^n 个子集;有 $2^n - 1$ 个非空子集;有 $2^n - 1$ 个真子集;有 $2^n - 2$ 个非空真子集.

2. 补集

如果 $A \subseteq S$,由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集(或余集),记作 $C_S A$,即 $C_S A = \{x | x \in S, \text{且}$

● 学法指导

[例1] 已知集合 M 满足: $\emptyset \subsetneq M \subseteq \{a, b, c\}$,求所有满足条件的集合 M .

【分析】由 $\emptyset \subsetneq M$ 可知, M 必为非空集合,又由 $M \subseteq \{a, b, c\}$ 知,此题即为求集合 $\{a, b, c\}$ 的所有非空子集.

【解】 $\because \emptyset \subsetneq M, \therefore M$ 为非空集合.

又 $\because M \subseteq \{a, b, c\}, \therefore$ 满足条件的集合 M 有 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$,共七个.

【说明】此题经过分析,经过利用有限集合的非空子集的公式 $2^n - 1$ 来求,得 $2^3 - 1 = 7$ 个非空子集,再逐一写出.

[例2] 设 $U = \{x | x \text{ 是至少有两个角相等的三角形}\}, A = \{x | x \text{ 是等边三角形}\}$,求 $C_U A$.

【分析】“至少有两个角相等”包含两种情况.“只有两个角相等且不等于 60° ”和“三个角都相等,即各角均为 60° 的等边三角形”.

$x \notin A$).

图 1-2-1 的阴影部分表示 A 在 S 中的补集 $C_S A$.

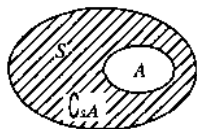


图 1-2-1

显然, $C_S \emptyset = S, C_S S = \emptyset, C_S(C_S A) = A$.

3. 区分容易混淆的符号

(1) \in 与 \subseteq 的区别: \in 表示元素与集合之间的关系, 如: $1 \in \mathbf{N}, -1 \notin \mathbf{N}; \subseteq$ 表示集合与集合之间的关系, 如: $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}, \emptyset \subseteq \mathbf{R}$ 等.

(2) a 与 $\{a\}$ 的区别: 一般地, a 表示一个元素, 而 $\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合, 例如: $1 \in \{1, 2\}, 0 \in \{0\}, \{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ 等, 不能写成 $0 = \{0\}, \{1\} \in \{1, 2, 3\}, 1 \subseteq \{1, 2\}$.

(3) $\{0\}$ 与 \emptyset 的区别: $\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合, \emptyset 是不含任何元素的集合, 因此, $\emptyset \subseteq \{0\}$, 不能写成 $\emptyset = \{0\}, \emptyset \in \{0\}$.

【解】 $C_U A = \{x | x \text{ 是底角不为 } 60^\circ \text{ 的等腰三角形}\}$.

[例3] 给出下列六个关系式, 其中正确的是_____.

- (1) $0 \in \mathbf{N}$ (2) $0 \in \mathbf{Z}$ (3) $0 \subseteq \{0, 1\}$ (4) $\emptyset \in \{0\}$
 (5) $\emptyset \subseteq \{0\}$ (6) $\{0\} \subseteq \{0\}$

【分析】 0 是自然数, 又是整数, 而且元素与集合之间用“ \in ”联结, 故(1)、(2)正确, (3)错误; 集合与集合之间用“ \subseteq ”联结, 故(4)错误; 空集是任何非空集合的真子集, 故(5)正确; 任何一个集合是它本身的子集, 故(6)也正确.

【解】 正确的是(1)、(2)、(5)、(6).

[例4] 下列命题中, 正确的是_____ ()

- A. $C_U(C_U A) = \{A\}$
 B. 若 $A \cap B = B$, 则 $A \subseteq B$
 C. 若 $A = \{1, \emptyset, \{2\}\}$, 则 $\{2\} \subseteq A$
 D. 若 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x | x \subseteq A\}$, 则 $A \in B$

【分析】 由补集定义可知 $C_U(C_U A) = A$, 而非 $\{A\}$, 故 A 错误. B 中 $A \cap B = B$, 可存在 $A = B$ 的情况, 故应为 $A \subseteq B$. C 中 $\{2\}$ 作为集合 A 的一个元素, 应为 $\{2\} \in A$, 故 C 也错误. D 项中, B 中的元素 $x \subseteq A$, 即 x 是集合 A 的子集, 而 A 的子集有 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$, 而 B 是由所有这些子集组成的集合, 集合 A 恰是其中的某一个元素, $\therefore A \in B$, 故 D 正确.

【解】 选 D.

整合与扩展

有关子集综合问题的解法

1. 在解子集的综合问题时, 首先要注意集合自身的转换, 能够用列举法表述的, 尽可能用列举法, 这样使得集合中的元素清晰、明确, 使问题简单化. 其次, 解决这类问题常用到分类讨论的方法. 如 $A \subseteq B$ 即可分两类讨论: (1) $A = B$, (2) $A \subsetneq B$, 而对于 (2) $A \subsetneq B$ 又可分两类讨论: ① $A \neq \emptyset$ 和 ② $A = \emptyset$, 从而使问题得到解决. 需注意 $A = \emptyset$ 这种情况易被遗漏. 注意培养学生缜密的思维品质.

2. 解决子集问题的又一常用方法是数形结合. 首先还是集合的自身转换, 根据题意, 用最合适的方法来描述集合, 进行转换, 然后利用数轴来体现子集的含义, 即集合间的包含关系, 再由图示找出相应的关系式, 从而使问题得到解决.

[例5] 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x | x^2 - ax + 2 = 0\}$, 若满足 $B \subseteq A$, 求实数 a .

【分析】 由于集合 A 可用列举法表示为 $\{1, 2\}$, 故 B 可为 $A = \{1, 2\}$, 或 \emptyset , 或 $B \subsetneq A$, 即 $\{1\}, \{2\}$, 从而求出 a 的范围.

【解】 $\because A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$, 且 $B \subseteq A$, \therefore (1) 当 $A = B$ 时, $B = \{1, 2\}$, 由此可知, $1, 2$ 是方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ 的两根, 由韦达定理知 $a = 1 + 2 = 3$;

(2) 当 $B \subsetneq A$ 时,

① $B \neq \emptyset$ 时, 即 $B = \{1\}$ 或 $B = \{2\}$, $\Delta = a^2 - 8 = 0$, 解得 $a = \pm 2\sqrt{2}$. 此时 $B = \{\sqrt{2}\}$ 或 $B = \{-\sqrt{2}\}$ 不符合题意, 舍去.

② $B = \emptyset$ 时, $\Delta = a^2 - 8 < 0$, 解得 $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$.

综合(1)、(2)知, 所求实数 a 的值为 $a = 3$ 或 $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$.

[例6] 若不等式 $|x| < 2$ 成立, 不等式 $(x-a)[x-(a+4)] < 0$ 也成立, 求 a 的值.

【分析】 若设不等式 $|x| < 2$ 的解集为 A ,

不等式 $(x-a)[x-(a+4)] < 0$ 的解集为 B ,

则有 $x \in A$ 时, $x \in B$, 即 A 是 B 的子集, 可用集合间的包含关系求 a .

【解】 $A = \{x | |x| < 2\} = \{x | -2 < x < 2\}$,

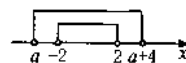


图 1-2-2

$B = \{x | (x-a)[x-(a+4)] < 0\} = \{x | a < x < a+4\}$.

依题意, 有 $A \subseteq B$, 在数轴上作出包含关系图形,

如图 1-2-2, 有 $\begin{cases} a \leq -2 \\ a+4 \geq 2 \end{cases}$ 解得 $a = -2$.

同步达标

A 组

一、选择题

1. 已知全集为实数集 \mathbf{R} , $A = \{x | x + 3 \geq 0\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}A$ 为 ()
 A. $\{x | x > -3\}$ B. $\{x | x \geq -3\}$
 C. $\{x | x < -3\}$ D. $\{x | x \leq -3\}$
2. 若 $A \subseteq B, A \subseteq C$, 且 $B = \{0, 1, 2, 3\}, C = \{0, 3, 4, 5\}$, 则满足上述条件的集合 A 可能为 ()
 A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 3\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{0, 2\}$
3. 集合 $\{a, b, c\}$ 的子集共有 _____ 个. ()
 A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
4. 下列结论中, 不正确的是 ()
 A. $\complement_M M = \emptyset$ B. $\complement_M \emptyset = M$
 C. $\complement_M (\complement_M A) = A$ D. $\complement_A A = \{0\}$
5. 非空集合 $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且若 $a \in A$, 则 $6 - a \in A$, 那么 A 的个数是 ()
 A. 4 B. 5 C. 7 D. 31
6. 已知集合 $U = \{x | 0 < x < 8\}, A = \{x | 1 < x \leq a\}$, 若 $A \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $a < 8$ B. $1 < a < 8$ C. $a \geq 8$ D. $1 < a \leq 8$
7. 设集合 $M = \{(x, y) | x + y > 0\}, N = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$, 则 M 与 N 之间的关系是 ()
 A. $N \subseteq M$ B. $M \subseteq N$ C. $M = N$ D. $N \in M$
8. 在下列各组中, 两集合 P 与 Q 不相等的一组是 ()
 A. $P = \{2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}, Q = \{4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$
 B. $P = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}, Q = \{y | y = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$
 C. $P = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}, Q = \{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$
 D. $P = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}, Q = \{x | k = \frac{x}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
9. 已知 $U = \mathbf{R}, A = \{x | x > 3\}, a = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, 则 ()
 A. $a \subseteq \complement_U A$ B. $a \notin \complement_U A$ C. $\{a\} \in A$ D. $\{a\} \subseteq A$
10. 已知集合 $M = \{a \in \mathbf{Z} | \frac{4}{a} \in \mathbf{N}\}$, 若 $\emptyset \subseteq B \subseteq M$, 则符合条件的集合 B 的个数是 ()
 A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

二、填空题

11. 已知全集为 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 且 $\complement_U A = \{0, 2\}$, 则集合 $A =$ _____.

12. 已知全集为 \mathbf{R} , 不等式组 $\begin{cases} x < 1, \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ 的解集为 A , 则 $\complement_{\mathbf{R}}A =$ _____.
 13. 已知集合 $A = \{x, y\}, B = \{2, 2y\}$, 若 $A = B$, 则 $x + y =$ _____.
 14. 若全集 $A = \{x | x \geq a\}, B = \{x | -1 \leq x < 3\}$, 要使 $\complement_A B$ 不是空集, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 三、解答题
15. 已知集合 A 是由不大于 10 的质数和 6 的正约数组成, 若全集 $S = \{x \in \mathbf{N}^+ | x \leq 10\}$, 求 $\complement_S A$.

16. 写出满足 $\{0, 1\} \subseteq A \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 的所有集合 A .
17. 已知全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, 若 $A = \{|a + 7|, 2\}, \complement_U A = \{5\}$, 求实数 a .

18. 设方程 $x^2 - ax - b = 0$ 的解集为 A , 方程 $ax^2 - bx - 1 = 0$ 的解集为 B , 又知方程组 $\begin{cases} x^2 - ax - b = 0 \\ ax^2 - bx - 1 = 0 \end{cases}$ 的解集为 $\{1\}$. 求 A 中所有元素与 B 中所有元素组成的集合.

B 组

一、选择题

1. 若集合 $M = \{x | x \leq 3\}, a = \sqrt{7}$, 则下面结论中正确的是 ()
 A. $\{a\} \subseteq M$ B. $a \subseteq M$ C. $\{a\} \in M$ D. $a \in M$
2. 设全集 $U = \{2, 3, 5\}, A = \{2, |a - 5|\}, \complement_U A = \{5\}$, 则 a 的值是 _____.

- A. 2 B. 8 C. 2 或 8 D. -2 或 8
3. 集合 $\{a, b, c\}$ 的真子集的个数为 ()
 A. 8 B. 7 C. 6 D. 5
4. 集合 $M = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{Z}\}, N = \{x | x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$. M 与 N 之间的关系是 ()

- A. $M \subsetneq N$ B. $M \supsetneq N$
 C. $M = N$ D. $M \in N$ 或 $M \supseteq N$
5. 同时满足 $\{1\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是 ()
 A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
6. 已知集合 $M = \{x \in \mathbf{N} \mid m = x - 8, m \in \mathbf{N}\}$, 则集合 $\complement_U M$ 中的元素个数为 ()
 A. 7 B. 8 C. 9 D. 10
7. 已知全集 $U = \{1, 2\}$, $A = \{x \mid x^2 - px + 2 = 0\}$, $\complement_U A = \emptyset$, 则 p 等于 ()
 A. 4 B. 3 C. 2 D. 不存在
8. 若 $A = \{x \mid x = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 4n - 3, n \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x \mid x = 8n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 A, B, C 的关系是 ()
 A. $A \supseteq B \supseteq C$ B. $A \subseteq B \subseteq C$
 C. $A = B \supseteq C$ D. $A = B = C$
9. 设 $S = \mathbf{Z}$, $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \geq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x > 1\}$, 则有 ()
 A. $\complement_S A = \complement_S B$ B. $\complement_S A \subseteq \complement_S B$
 C. $\complement_S A \supseteq \complement_S B$ D. 以上都不正确
10. 全集 $U = \mathbf{R}$, $C = \{x \mid x = a + b\sqrt{7}, a, b \in \mathbf{Q}, \text{且 } b \neq 0\}$, 则下面结论正确的是 ()
 A. $C \subseteq \complement_U \mathbf{Q}$ B. $\complement_U \mathbf{Q} \subseteq C$ C. $\mathbf{Q} \subseteq C$ D. $C \subseteq \mathbf{Q}$

二、填空题

11. 已知集合 $\{(1, 2), (-3, 4)\}$, 则它的所有的真子集为 _____.
12. 已知全集 $U = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$, $A = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
13. 若全集 $S = \{x \mid x \text{ 是有一个内角不小于 } 90^\circ \text{ 的三角形}\}$,

$A = \{x \mid x \text{ 是直角三角形}\}$, 则 $\complement_S A =$ _____.

14. 已知全集 U, M, N 是 U 的非空子集, 若 $\complement_U M \supseteq N$, 则 M 和 $\complement_U N$ 的关系为 _____.

15. 设全集 $S = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $\complement_S A = \{x \mid ax - 1 = 0\}$, 则由实数 a 组成的集合为 _____.

三、解答题

16. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{x \mid x^2 - 5x + p = 0 \text{ 有实根}\}$, 求 $\complement_U A$ 及对应 p 的值.

17. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 且 $A = \{x \mid x^2 - mx + n = 0, x \in U\}$, 若 $\complement_U A = \{2, 3\}$, 求 m, n 的值.

18. 已知集合 $A = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \mid a - 1 \leq x \leq a + 1\}$, 若满足 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

19. 设全集 $S = \{3, 4, 3 - a^2\}$, $A = \{3, a^2 - a + 2\}$, $\complement_S A = \{-1\}$, 求实数 a 组成的集合.

应用样板

1. (2000 · 广东) 已知集合 $\{1, 2, 3, 4\}$, 那么它的真子集的个数是 ()
 A. 15 B. 16 C. 3 D. 4
2. (2001 · 北京市朝阳区) 已知集合 $A = \{a, a + b, a + 2b\}$, $B = \{a, ac, ac^2\}$, 若 $A = B$, 求 c 的值.
3. (2002 · 郑州) 已知全集 $I = \{2, 0, 3 - a^2\}$, 子集 $P = \{2,$

$a^2 - a - 2\}$, $\complement_I P = \{-1\}$, 求实数 a .

4. (2002 · 全国) 设集合 $M = \{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 ()
 A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$ C. $M \supseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

名师解密

1. 本小题考查真子集的概念, 注意空集 \emptyset 是任何非空集合的真子集, 集合不是自身的真子集.

根据真子集的计算, 应有 $2^4 - 1 = 15$ 个. 故选 A.

2. 本小题考查两集合相等及集合中元素的互异性.

【解】(1) 若 $a + b = ac$ 且 $a + 2b = ac^2$, 消去 b , 得 $a + ac^2 - 2ac = 0$.

$\because a = 0$ 时, 集合 B 中的三个元素均为零, 根据集合中元素的互异性, 舍去 $a = 0$,

$\therefore c^2 - 2c + 1 = 0$ 即 $c = 1$. 但 $c = 1$ 时, 集合 B 中的三个

元素也相同, 舍去 $c = 1$, 此时无解.

(2) 若 $a + b = ac^2$ 且 $a + 2b = ac$, 消去 b , 得 $2ac^2 - ac - a = 0$.

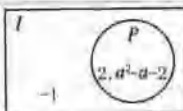
$\because a \neq 0, \therefore 2c^2 - c - 1 = 0$,

即 $(c - 1)(2c + 1) = 0$.

又 $\because c \neq 1, \therefore c = -\frac{1}{2}$.

3. 本小题考查补集的概念, 及如何运用图形语言解决问题更方便、快捷. 同时考查了学生的数形结合能力和分析问题的能力.

【解】依题意有 $\begin{cases} a^2 - a - 2 = 0, \\ 3 - a^2 = -1. \end{cases}$ 解得 $a = 2$.



4. 本小题考查了集合与子集的概念和关系, 加大了对集合语言的考查力度. 1-2-3

【解法一】利用特殊值法, 令 $k = -2, -1, 0, 1, 2$ 可得

$$M = \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\}, N = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}.$$

$$\therefore M \subseteq N.$$

【解法二】集合 M 的元素为 $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4} (k \in \mathbb{Z})$,

集合 N 的元素为 $x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{4} (k \in \mathbb{Z})$,

由于 $2k+1$ 是奇数, $k+2$ 是整数,

因此 $M \subseteq N$, 故选 B.

拓展阅读

无限集

在 19 世纪末, 德国数学家康托系统地描绘了一个能够为全部数学提供基础的通用数学框架. 他创立的这个学科一直是我们数学发展的根植地. 这个学科就叫做集合论. 它的概念和方法已经有效地渗透到所有的现代数学中. 尽管我们生存的世界是有限的, 但是, 为了研究它, 我们却总是要涉及无限. 所有自然数的集合就是一个无限集, 圆周率的精确值表示需要无限多位小数, 等等. 对于无限集, 可以得到一些意想不到的结论. 例如, 设集合 A 是所有正整数的集合, 集合 B 是所有正偶数的集合, 直观地, B 中的元素个数恰好是 A 中元素个数的一半. 但是, 根据集合论的观点, 它们的个数是一样的. 这可以用“配对”的方法来验证:

1	2	3	4	5	6	7	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
2	4	6	8	10	12	14	...

这里没有矛盾——如果有的话也只是出于我们的成见. 对此的阐释最好莫过于“希尔伯特旅馆”, 这个理想化的建筑物有无限多个房间, 以所有正整数 $1, 2, 3, \dots$ 来编号. 一天晚上, 碰巧所有房间都住满了 (在这个故事中人数也是无限多). 这时新来了一个客人, 正在老板无法安置的时候, 一个聪明的服务员想出了一个办法, 她提出将 1 号房的客人安排到 2 号房, 2 号房的客人安排到 3 号房, 3 号房的客人安排到 4 号房, 由此类推……这样就腾出了 1 号房供新客人使用. 而且即使来了不止一个客人, 也可以同样妥善安置, 比如说来了新客人 10 个, 她说: “只需将 1 号房的客人安排到 11 号房, 2 号房的客人安排到 12 号房, 3 号房的客人安排到 13 号房, 由此类推……这样就腾出了前十个空房供新客人使用.” 这时, 有人提出新的问题, 如果后来的客人有无数个怎么办呢? 这难不倒我们的这位服务员, 她提出将 1 号房的客人安排到 2 号房, 2 号房的客人安排到 4 号房, 3 号房的客人安排到 6 号房, 由此类推……这样不就腾出了 1 号, 3 号, 5 号……无数个房间了吗!

§ 1.3 交集、并集

预习导航

要点扫描

- 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$.
- 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$.
- 用集合表示下面两个图的阴影部分.

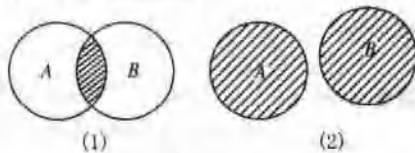


图 1-3-1

关键信息

- 交集 A 交 B $\{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$
- 或 $A \cup B$ A 并 B $\{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$
- $A \cap B$ $A \cup B$

关键信息

4. $\{1,3\}$ $\{1,2,3,4,5\}$
 5. \emptyset
 ($x|x$ 是斜三角形)
 6. $A \cap B \cap A$
 7. $A \cap A \cup A$
 8. 偶数
 偶数集 奇数
 奇数集
 9. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} \cap \{\text{偶数}\}$

10. $\supseteq B \cap A$
 $\subseteq A \cap B$
 $= A(B) \cap A(B)$

4. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.
 5. 设 $A = \{x|x \text{ 是锐角三角形}\}$, $B = \{x|x \text{ 是钝角三角形}\}$, 则 $A \cap B =$ _____,
 $A \cup B =$ _____.
 6. $A \cap A =$ _____; $A \cap \emptyset =$ _____; $A \cap B =$ _____.
 7. $A \cup A =$ _____; $A \cup \emptyset =$ _____; $A \cup B =$ _____.
 8. 形如 $2n (n \in \mathbb{Z})$ 的整数叫做 _____, 由全体这样的数构成的集合, 简称 _____; 形如 $2n+1 (n \in \mathbb{Z})$ 的整数叫做 _____, 由全体这样的数构成的集合, 简称 _____.
 9. $\{\text{偶数}\} \cup \{\text{奇数}\} =$ _____, $\{\text{奇数}\} \cup \mathbb{Z} =$ _____, $\{\text{偶数}\} \cap \mathbb{Z} =$ _____.
 10. 用集合的语言描述下面几个图:

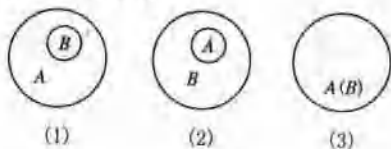


图 1-3-2

- (1) A _____ B , 且 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.
 (2) A _____ B , 且 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.
 (3) A _____ B , 且 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

重点、难点聚焦

重点、难点解析

1. 交集

(1) 交集定义: 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 表示为 $A \cap B = \{x|x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

注意: 此定义包含了两层含义: 一层含义为凡是 $A \cap B$ 中的元素都是两集合 A, B 的公共元素; 另一层含义是集合 A 与 B 中的所有公共元素都在 $A \cap B$ 中. 另外, 当两集合 A 与 B 没有公共元素时, 不能说集合 A 与 B 没有交集, 而是 $A \cap B = \emptyset$.

(2) 交集的运算性质: 对于任何两个集合 A, B 都有

$$A \cap A = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2. 并集

(1) 并集定义: 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 表示为 $A \cup B = \{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

注意: $x \in A$ 或 $x \in B$ 包含了三种情况: $x \in A$ 但 $x \notin B$; $x \notin A$ 但 $x \in B$; $x \in A$ 且 $x \in B$. 此外, $A \cup B$ 可以理解为由集合 A 中所有元素与集合 B 中所有元素, 但原两个集合中的公共元素只能出现一次, 所构成的集合.

(2) 并集的运算性质: 对于任何两个集合 A, B 都有

$$A \cup A = A \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

3. 交集、并集、补集的重要结论

$$(A \cap B) \subseteq A \quad (A \cap B) \subseteq B$$

$$A \cap \complement_U A = \emptyset \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

学法指导

【例1】已知集合 $A = \{x|x^2 - mx + m^2 - 19 = 0\}$, $B = \{y|y^2 - 5y + 6 = 0\}$, $C = \{z|z^2 + 2z - 8 = 0\}$, 若满足 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求实数 m 的值.

【分析】集合 B, C 可用列举法得出, 但 A 不可直接求解. 又 $A \cap C = \emptyset$ 说明 C 中元素不在 A 中, 而 $A \cap B \neq \emptyset$ 说明 B 中必有元素在 A 中, 由此可求出 m 的值. 注意将所求结果进行检验.

【解】 $\because B = \{y|y^2 - 5y + 6 = 0\} = \{2, 3\}$,

$C = \{z|z^2 + 2z - 8 = 0\} = \{-4, 2\}$.

又 $A \cap C = \emptyset$, $\therefore 2 \notin A$ 且 $-4 \notin A$.

又 $\because A \cap B \neq \emptyset$,

$\therefore 3 \in A$. 把 $x=3$ 代入 $x^2 - mx + m^2 - 19 = 0$ 中, 得 $m=5$ 或 -2 .

当 $m=5$ 时, $A = \{2, 3\}$, 这与 $A \cap C = \emptyset$ 矛盾, 故舍去.

当 $m=-2$ 时, $A = \{-5, 3\}$, 符合题意. $\therefore m=-2$.

【例2】设 $A = \{2, -1, x^2 - x + 1\}$, $B = \{2y, -4, x + 4\}$, $C = \{-1, 7\}$, 且 $A \cap B = C$, 求 x, y 的值.

【分析】由 $A \cap B = C$, 说明 C 中元素既在 A 中又在 B 中, 从而推导出 x, y 应满足的条件.

【解】 $\because A \cap B = C$, 且 $C = \{-1, 7\}$, \therefore 显然 $-1 \in A$ 且 $7 \in A$, $-1 \in B$ 且 $7 \in B$. \therefore 必有 $x^2 - x + 1 = 7$, 解得 $x = -2$ 或 3 .
 当 $x = -2$ 时, $x + 4 = 2$, 而 $2 \in A$, 故有 $2 \in A \cap B$. 但 $2 \notin C$, $\therefore x = -2$ 不合题意.

当 $x = 3$ 时, $x + 4 = 7$, 故有 $2y = -1$. 解得 $y = -\frac{1}{2}$.

综上所述, $x=3, y=-\frac{1}{2}$.

【例3】已知集合 $A = \{y|y = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y|x^2 = -y + 2$,