三级跳丛书

高二数学

发散思维训练
综合能力立意
最新同步习题
三级层次跃进

北京考试题库研究中心
北京教育出版社


丛书
高三数学

三级跳

高二数学

北京考试题库研究中心

北京教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

三级跳丛书．高二数学／北京考试题库研究中心编著．北京：北京教育出版社，1999.12

ISBN 7-5303-1997-3

Ⅰ．三… Ⅱ．北… Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 52658 号

三级跳丛书

高二数学

GAOER SHUXUE

北京考试题库研究中心

*

北京教育出版社出版

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码：100011

北京出版社出版集团总发行

新华书店经销

北京宏伟胶印厂印刷

*

850×1168 毫米 大 32 开本 10.5 印张 20 000 字

2000 年 2 月第 1 版 2000 年 2 月第 1 次印刷

印数 1-10 000

ISBN 7-5303-1997-3

G·1971 定价：12.00 元

《三级跳丛书》

主 编 单 位：北京考试题库研究中心
北京教育出版社
语文学科主编：高石曾
数学学科主编：傅敬良
英语学科主编：李俊和（高中部分）
李 黎（初中部分）
物理学科主编：樊 福
化学学科主编：王美文
本 册 编 者：邹 斌
白 雪
傅 娟
吕晓琳
傅敬良
吴铁庆

前　言

为了减轻学生课业负担，加强素质教育，注重能力培养，体现新世纪教育要求，适应应试教育向素质教育转轨的新形势，我们特邀北京考试题库研究中心的专家精心为大家编写了《三级跳丛书》。

这套丛书按年级编写，每年级一科一本，共包括语文、数学、英语、物理、化学五科。它特点鲜明、容量精当、适应教改要求，是最新推出的换代产品。

符合学生实际　本书的编写以教育部的最新教学大纲为依据，与课本配套；以章（单元）为序，理科同步到节，文科同步到课。在内容设置上包含例题精解和能力训练三级跳两大部分，讲练结合、层层提高。所有例题均经专家们反复筛选后确定，标准化程度高，科学性强；每道例题均安排了思路分析与讲解、说明，逐一为广大学生指明了各类题目的解题要领，重在把学习方法教给你。

训练方法先进　本书在“能力训练三级跳”中采用阶梯跃进的方法，分为能力训练一级跳、能力训练二级跳、能力训练三级跳三个层次，由浅入深、由易到难，不但可以满足不同学生的实际需要，而且可以避免滑落题海，无功而返。三级跳这一阶梯跃进训练法，既是为了适应教学

要求设定的不同标准，又是为了方便学生根据自己的能力加强主动学习的积极性。

突出能力立意 针对教育改革特别是考试改革的要求，本书在编写中特别注重突出能力立意的特点，通过“能力训练三级跳”的形式，以综合性、应用性的能力训练为主，从多角度、多侧面、多情境、多层次等不同方面展开训练，不但可以综合考察自己的知识能力应用水平，而且可以有效地帮助你灵活掌握学习方法和规律。

参考答案详细 本书的又一个特点是参考答案详细。过去学生经常发愁的是，做了题却不知究竟对不对，即便答案相符，也对解题思路一知半解，很难获得真正的收获。本书则有别于以往的教学辅导书，在参考答案上力求详尽提示，讲明步骤，准确无误，不仅要让你学会，还要帮助你会学。

为使本书能更好地为读者服务，在每本书的后面，我们均安排了意见反馈表，并特别设置了如下奖励措施：凡是发现书内差错5个以上的，我们将奖励您下一年级同科目书一册（高三学生奖励当年《十月》杂志一册），并在此书再版时，您将作为本书特聘监督员登录在册，希望读者积极参与（注：相同差错的取前20名）。由于时间紧，水平有限，书中难免会有不足之处，恳请读者批评指正。

目 录

第一部分 代数

第二部分 解析几何

第一部分　代数

第五章

不 等 式

第一单元 不等式的概念、性质、证明

例题精解

例 1 已知 $a>0$，$b>0$，求证：$a+b+4<(a+2)(b+2)$.

证法一 $(a+b+4)-(a+2)(b+2)$

$=a+b+4-ab-2a-2b-4$

$=-ab-a-b$

$=-(ab+a+b)<0$.

$\therefore a+b+4<(a+2)(b+2)$.

证法二 $\because a>0,b>0$,

$\therefore a+b+4>0,(a+2)(b+2)>0$.

又 $\dfrac{a+b+4}{(a+2)(b+2)}=\dfrac{(a+2)+(b+2)}{(a+2)(b+2)}=\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{a+2}$

$<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

$\therefore \dfrac{a+b+4}{(a+2)(b+2)}<1$.

$\therefore a+b+4<(a+2)(b+2)$.

小结 本题根据结构特点分析，适合用比较法证明．比较法常

用的有作差比较法与作商比较法两种．证法一用的是作差法，从证明过程中可知，此方法分三步：①作差，②判断差的符号，③下结论．证法二用的是作商法．作商法证明不等式的依据是：若 $ab>0$，$\frac{a}{b}>1$，则当 $b>0$ 时，$a>b$；当 $b<0$ 时，$a<b$．要注意利用作商法比较同号两式大小时，商是与 1 而不是 0 比大小．

例 2　证明：$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ $(a\geqslant 3)$．

分析　已知条件很简单(仅有 $a\geqslant 3$)，而要证明的无理不等式较复杂，遵循化繁为简的原则，容易想到用分析法求证．

证法一　要证 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$，

只要证　$\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}$，

只要证　$(\sqrt{a}+\sqrt{a-3})^2<(\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2})^2$，

即　$\sqrt{a(a-3)}<\sqrt{(a-1)(a-2)}$．

即证　$a(a-3)<(a-1)(a-2)$，

即证　$0<2$，显然成立．

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ $(a\geqslant 3)$．

证法二　要证　$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ $(a\geqslant 3)$，

只要证
$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}<\frac{(\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3})(\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3})}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}},$$

即证
$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}<\frac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}}.$$

$\because \sqrt{a}+\sqrt{a-1}>\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}>0$，　$\therefore$ 上式成立．

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ $(a\geqslant 3)$．

小结　分析法是寻求结论成立的充分条件，而不是从结论出发推证已知条件，所以在证明过程中一定要注意格式，“要证”、“只要证”等词必不可少．在解决有关根式的问题时，“分子有理化”

也是常用的技巧，如证法二.

例3　已知 $a>2$，求证：$\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$.

分析　由 $a>2$ 易得 $\log_a(a-1)<1$，$\log_a(a+1)>1$，但 $\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)$ 与1的大小关系仍不能确定．注意到两者的算术平均数便于与1比大小，联想到均值不等式.

证法一　$\because \log_a(a-1)\neq\log_a(a+1)$，

$\therefore \log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<\dfrac{\log_a^2(a-1)+\log_a^2(a+1)}{2}$，

$\therefore 2\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)$

$<\dfrac{[\log_a(a-1)+\log_a(a+1)]^2}{2}$

$=\dfrac{\log_a^2(a^2-1)}{2}<\dfrac{\log_a^2a^2}{2}=\dfrac{4}{2}=2.$

$\therefore \log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1.$

证法二　$\because a>2$，　$\therefore \log_a(a-1)>0,\log_a(a+1)>0$.

又 $\because \log_a(a-1)\neq\log_a(a+1)$，

$\therefore \sqrt{\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)}$

$<\dfrac{\log_a(a-1)+\log_a(a+1)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\log_a(a^2-1)<\dfrac{1}{2}\log_a a^2=1.$

$\therefore \log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$

小结　在证明过程中，对 $\log_a(a^2+1)$ 的值作了适当的放大，这样根据不等式的传递性可以证明结论．放缩法是证明不等式的一种重要方法.

例4　已知：a、$b\in R^+$，且 $a+b>2$，求证：$\dfrac{1+a}{b}$ 与 $\dfrac{1+b}{a}$ 中

至少有一个小于2.

分析　从正面直接证明较困难，考虑用反证法.

证明　设$\frac{1+a}{b}$与$\frac{1+b}{a}$均不小于2，即：$\frac{1+a}{b}\geqslant 2$，$\frac{1+b}{a}\geqslant 2$，

$\therefore 1+a\geqslant 2b$，$1+b\geqslant 2a$，

$\therefore 2+a+b\geqslant 2(a+b)$，

$\therefore a+b\leqslant 2$，与已知条件矛盾.

$\therefore \frac{1+a}{b}$与$\frac{1+b}{a}$中至少有一个小于2.

小结　在证明一些难以从已知条件出发根据公理、定理、性质等直接证明的问题时，可以考虑用反证法——通过否定结论，推出与定理或临时假设矛盾的结果，从而证明问题.

例5　求证：$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

分析　含绝对值不等式的证明，除了不等式的基本性质、定理外，绝对值的性质及定理：$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$等也常用到，根据不等式的结构特点选择合适的方法是证明的基础.

证法一　$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{1}{\frac{1}{|a+b|}+1}\leqslant\frac{1}{\frac{1}{|a|+|b|}+1}$

$=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

证法二　由性质：a、b、$m\in R^{+}$，$a\leqslant b$ 则$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+m}{b+m}$，

$\therefore \frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a+b|+(|a|+|b|-|a+b|)}{1+|a+b|+(|a|+|b|-|a+b|)}$

$=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

证法三　$\because f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$在$[0,+\infty)$上是增函数，

又$\because 0\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$，

$\therefore f(|a+b|) \leqslant f(|a|+|b|)$,

即 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

小结 本题证法多种多样，无论是利用不等式的性质、变形放缩，还是构造函数来利用函数的单调性证明，关键是充分分析不等式的特点，与已知的知识综合运用.

能力训练一级跳

一、选择题

1. 已知 $a>b$，则下列结论正确的是 ( )

A. $a^2>b^2$　　B. $ac^2>bc^2$

C. $a(1-b)>b(1-a)$　　D. $\sqrt{a}>\sqrt{b}$

2. 若 $a \geqslant b$，则 ( )

A. $(ac)^2 \geqslant (bc)^2$　　B. $\dfrac{a}{c^2}>\dfrac{b}{c^2}$

C. $ac^2 \geqslant bc^2$　　D. $\dfrac{c^2}{a}>\dfrac{c^2}{b}$

3. 如果 $a<b<0$，下列不等式中不能成立的是 ( )

A. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B. $\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

4. 已知 $x<a<0$，则下列不等式中一定成立的是 ( )

A. $x^2<ax<0$　　B. $x^2>ax>a^2$

C. $x^2<a^2<0$　　D. $x^2>a^2>ax$

5. 若 $a>0$，$a+b<0$，则 a、b、$-a$、$-b$ 的大小关系是

$|a|<|b|$ ( )

A. $-b<-a<a<b$　　B. $-a<a<-b<b$

C. $-a<-b<a<b$　　D. $b<-a<a<-b$