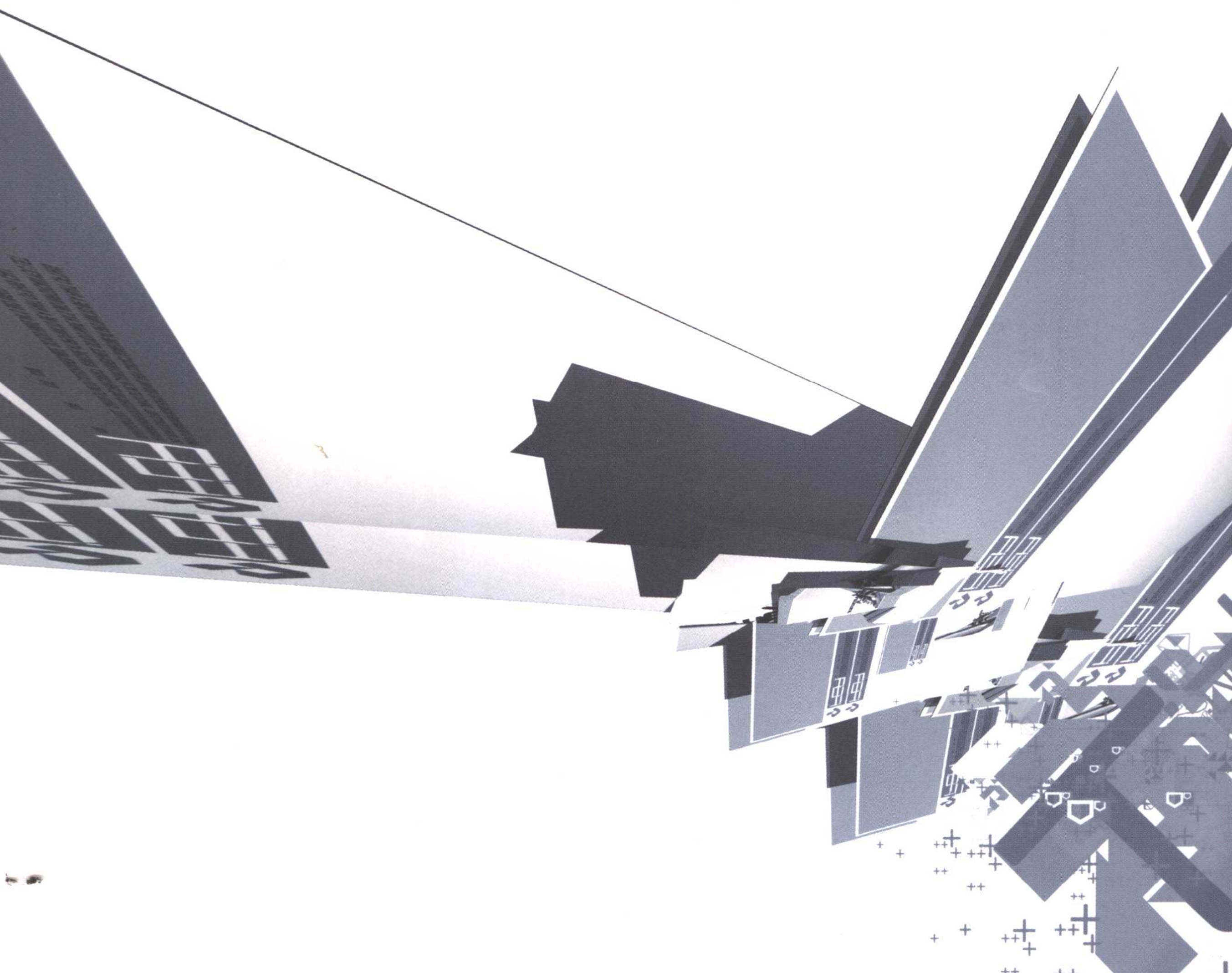
# 组合理论及其应用

李凡长 康宇 童海峰 段爱华 编著



清华大学出版社

# 组合理论及其应用

李凡长　康　宇
童海峰　段爱华　编著

清华大学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了组合理论的相关知识，全书由 13 章组成．第 1 章介绍排列、组合、二项式定理的基本知识；第 2 章介绍容斥原理与鸽巢原理；第 3 章介绍递推关系；第 4 章介绍生成函数；第 5 章介绍 Pólya 计数定理；第 6 章介绍二分图；第 7 章介绍组合矩阵；第 8 章介绍组合设计；第 9 章介绍基于有向图的网络基本理论；第 10 章介绍整数规划；第 11 章介绍组合理论在相关免疫函数中的应用；第 12 章介绍组合逻辑；第 13 章介绍组合理论在组合搜索技术中的应用．本书和同类文献相比较，新增了组合矩阵、整数规划、组合理论在相关免疫函数中的应用、组合逻辑和组合搜索等内容．

本书可作为计算机科学、信息科学、智能科学、自动化科学等领域的硕士生、博士生作为一学期 72 学时的教材使用，同时也可供高等院校相关教师、科研院所的相关研究人员及其他科技工作者作为参考书使用．



**图书在版编目(CIP)数据**

组合理论及其应用/李凡长等编著．—北京：清华大学出版社，2005.9
ISBN 7-302-11235-5

I. 组…　II. 李…　III. 组合数学–应用　IV. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 065382 号

**出 版 者**：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
**组稿编辑**：闫红梅
**文稿编辑**：霍志国
**印 刷 者**：北京嘉实印刷有限公司
**装 订 者**：三河市李旗庄少明装订厂
**发 行 者**：新华书店总店北京发行所
**开　　本**：185×260　**印张**：18.75　**字数**：451 千字
**版　　次**：2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
**书　　号**：ISBN 7-302-11235-5/TP·7413
**印　　数**：1～3000
**定　　价**：26.00 元

# 前 言

组合数学的基本知识在信息科学、计算机科学、智能科学、自动化科学等领域已经得到了广泛的应用．随着组合理论解决实际问题应用的深入，人们总希望有一本范围更广、内容更全的组合数学书介绍这方面的知识．为了满足读者这种需求，我们结合多年给硕士生和博士生讲授组合数学及计算机数学的教学实践，在原组合数学讲义的基础上，编写整理了此书．本书分为 13 章：第 1 章介绍排列、组合、二项式定理的基本知识；第 2 章介绍容斥原理与鸽巢原理；第 3 章介绍递推关系；第 4 章介绍生成函数；第 5 章介绍 Pólya 计数定理；第 6 章介绍二分图；第 7 章介绍组合矩阵；第 8 章介绍组合设计；第 9 章介绍基于有向图的网络基本理论；第 10 章介绍整数规划；第 11 章介绍组合理论在相关免疫函数中的应用；第 12 章介绍组合逻辑；第 13 章介绍组合理论在组合搜索技术中的应用．本书与同类书相比，增加了组合矩阵、整数规划、组合理论在相关免疫函数中的应用、组合逻辑和组合搜索等内容．

本书可供计算机科学、信息科学、智能科学、自动化科学等领域的高年级本科生、硕士生、博士生作为教材或参考书使用；同时也可供高等院校相关教师及科研院所的相关研究人员作为参考书籍．本书在编写过程中曾直接或间接地引用了大量参考文献的内容，在此对这些参考文献的作者表示真诚的感谢．感谢中国科技大学陈国良院士对本书的关心，感谢清华大学出版社闫红梅编辑及清华大学出版社的其他同志对本书的支持．

由于时间仓促，加上作者的水平有限，书中如有不妥之处，敬请广大同仁不吝赐教．

作者

2005 年 7 月

# 语　　花

如果石头组合得好，则能形成宏伟的建筑；

如果音符组合得好，则能形成美妙的乐章；

如果色彩组合得好，则能形成传世的画卷；

如果词句组合得好，则能形成不朽的诗篇；

如果原子组合得好，则能形成新奇的物质；

如果人群组合得好，则能形成无穷的力量；

如果想像组合得好，则能形成蓬勃的激情；

如果灵感组合得好，则能形成伟大的创新；

如果知识组合得好，则能形成创新的动力；

如果机器组合得好，则能形成发展的源泉；

……

如何辨识一切组合的好坏？

组合理论是评判它们的基准！

——作者

2004年元月

# 序　　言

复杂世界，协调发展；
变化万千，何序为先？
对象之间，何分主源？
整体布局，如何分布？
万物所盼，合理为安。

人类智慧，神奇无比；
研究世界，发现规律；
四千年前，《河图》已现；
著作记载，三阶幻方；
由此明示，组合萌生。
数代大师，励精图治，
刻苦探究，揭示由缘；
二十世纪，五十年代，
史料告知，自成体系，
界定科名，组合分析。
广泛应用，蓬勃生机；
纵横跨越，领域数个，
发展神速，不胜枚举。
信息科学，相互激励；
智能科学，迅速崛起。

理论应用，孪生兄弟；

新意知识，显示威力。

内容丰富，虽然如此，

组合机理，尚未穷极。

研究对象，离散问题，

研究方法，构造枚举；

研究目标，合理安排，

研究途径，“有序”“无序”。

该书内容，排列组合；

递归方法，生成函数，

容斥原理，鸽巢原理，

区组设计，互异表式，

基本内容，他书皆是。

本书特色，显示优势，

新增内容，整数规划，

免疫函数，组合逻辑，

组合矩阵，组合搜索，

特色鲜明，合理可取。

读者对象，硕士博士，

大专院校，相关教师，

科研院所，研究人员。

课时安排，七十学时。

篇幅所限，未能叙全，
组合理论，如此多枝，
寄予后望，更希来者，
抛砖引玉，志在提示。
初学蒙友，一至八章，
基础坚实，方可全习；
谨戒朋友，重在研究，
切莫浮躁，万事忧忧；
发现有误，不吝赐友。
上述数言，适度难求。
文献作者，鼎立相助，
一腔挚诚，感谢同仁。

读者朋友，振奋精神，
进入科殿，满怀豪情，
风流人物，必将新生！

李凡长
2005.5

# 目　录

# 第 1 章　排列、组合、二项式定理

**内容提要：**

本章主要介绍加法原理、乘法原理、排列与组合、多重集合的排列与组合、二项式系数以及一些常见的组合恒等式、集合的分划与第 2 类 Stirling 数、正整数的分拆（无序分拆和有序分拆）与分配问题等.

排列和组合是人们普遍遇到的、并已被广泛使用的基本概念，只是人们没有从理论上研究它. 例如，学生集合站队问题、买水果问题等. 如果考虑的对象与秩序有关，则称之为排列问题；如果考虑的对象与秩序无关，则称之为组合问题. 除了这种具有普遍意义的排列和组合之外，还有可重复元素的排列和组合问题. 为了能深入研究这些问题，下面首先介绍两个最基本最常用的原理.

## 1.1　加法原理（原则）与乘法原理（原则）

**加法原理（原则）**　设事件 $A$ 有 $m$ 种选取方式，事件 $B$ 有 $n$ 种选取方式，选 $A$ 或 $B$ 共有 $m+n$ 种方式.

例如，每周在 $E$ 校区上 4 节课，在 $W$ 校区上 8 节课，除此之外没有别的课，则每周上 $4+8=12$ 节课. 这里事件 $A$ 指的是在 $E$ 校区上 4 节课，事件 $B$ 指的是在 $W$ 校区上 8 节课，而每周的课不是在 $E$ 校区就是在 $W$ 校区，即属于 $A$ 或 $B$.

如果用集合论的语言描述，则描述如下：

**定理 1.1.1**　设 $A$，$B$ 为有限集，$A\cap B=\Phi$，则 $|A\cup B|=|A|+|B|$.

**证明：** 当 $A$，$B$ 中有一个是空集，定理的结论是平凡的.

设 $A\neq\Phi$，$B\neq\Phi$，记

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$$
$$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$$

并做映射

$$\begin{aligned}\Psi:\ & a_i\to i\ (1\leqslant i\leqslant m)\\ & b_j\to m+j\ (1\leqslant j\leqslant n)\end{aligned}$$

因为

$$a_i\neq b_j(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$$

所以$\Psi$是从$A\bigcup B$到集合$\{1, 2, \cdots, m+n\}$上的一一映射，因而定理成立.

**推论 1.1.1** 设$n$个有限集合$S_1, S_2, \cdots, S_n$满足

$$S_i \bigcap S_j = \Phi \quad (1\leqslant i \neq j \leqslant n)$$

则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|.$$

**【例 1】** 在所有 6 位二进制数中，至少有连续 4 位是 1 的有多少个？

**解**：把所有满足要求的二进制数分成如下 3 类：

（1）恰有 4 位连续的 1．它们可能是×01111，011110，11110×，其中，“×”取 0 或 1．故在此种情况下，共有 5 个不同的 6 位二进制数.

（2）恰有 5 位连续的 1．它们可能是 011111 和 111110，共有 2 个.

（3）恰有 6 位连续的 1．即 111111，只有 1 种可能.

综合以上分析，由加法原理知共有 5+2+1=8 个满足题意要求的 6 位二进制数.

**乘法原理（原则）** 设事件$A$有$m$种选取方式，事件$B$有$n$种选取方式，则选取$A$以后再选取$B$共有$m\times n$种方式.

用集合论的语言可叙述如下：

**定理 1.1.2** 设$A$，$B$是两个有限集合，$|A| = m$，$|B| = n$，则$|A\times B| = |A|\times|B| = m\times n$.

**证明**：若$m = 0$或$n = 0$，则等式两边均为 0，故等式成立.

设$m > 0$，$n > 0$，并且记

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\},$$

定义映射

$$\Psi:\ (a_i, b_j) \rightarrow (i-1)n + j\ (1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n),$$

则$\Psi$是$A\times B$到集合$\{1, 2, \cdots, mn-1, mn\}$上的一一映射，所以等式成立.

**推论 1.1.2** 设$S_1, S_2, \cdots, S_n$为$n$个有限集合，则

$$|S_1\times S_2\times\cdots\times S_n| = |S_1|\times|S_2|\times\cdots\times|S_n|.$$

**【例 2】** 比 5400 大的 4 位数中，数字 2，9 不出现，且各位数字不同的数有多少个？

**解**：比 5400 大的 4 位数可以分为 4 类：

（1）千位比 5 大的符合题意的整数有$3\times 7\times 6\times 5$个.

（2）千位是 5，百位比 4 大的符合题意的整数有$3\times 6\times 5$个.

（3）前 2 位是 54，十位不为 0 且符合题意的整数有$5\times 5$个.

（4）前 3 位是 540，个位不为 0 且符合题意的整数有 5 个.

故共有$3\times 7\times 6\times 5 + 3\times 6\times 5 + 5\times 5 + 5 = 750$个符合条件的整数.

**【例 3】** 在 1000 到 9999 之间有多少个各位数字不同的奇数？

**解**：**方法 1**　如图 1.1 所示，第 4 位必须是奇数，可取 1，3，5，7，9，共 5 种选择．第 1 位不能取 0，也不能取第 4 位已选定的数字，所以在第 4 位选定后第 1 位有 8 种选择．类似地，第 2 位有 8 种选择，第 3 位有 7 种选择．从而，满足题意的数字共有 $5\times 8\times 8\times 7=2240$ 个．

| × | × | × | × |
|---|---|---|---|
| 第 1 位 | 第 2 位 | 第 3 位 | 第 4 位 |

图　1.1

**方法 2**　把满足题意的数分为两类：

（1）4 位数中没有 0 出现．类似方法 1 的分析，第 4 位有 5 种选择，第 3 位有 8 种选择，第 2 位有 7 种选择，第 1 位有 6 种选择，此类数共有 $6\times 7\times 8\times 5=1680$ 个．

（2）4 位数中有 0 出现，这里，0 只能出现在第 2 位或第 3 位上．假设 0 在第 2 位上，则第 4 位有 5 种选择，第 3 位有 8 种选择，第 1 位有 7 种选择，共有 $7\times 8\times 5=280$ 个数．同理，若 0 出现在第 3 位上，也有 280 个数．

由加法原则知，合乎题意的数共有 $1680+280\times 2=2240$ 个．

## 1.2　排列与组合

本节将探讨一些基本的排列与组合问题．同时，也会做一些延伸，比如圆排列问题．

### 1.2.1　集合的排列

$n$ 元集合 $S$ 的一个 $r$ 排列是指先从 $S$ 中选出 $r$ 个元素，然后将其按次序排列．一般用 $P(n,r)$ 或 $P_n^r$ 表示 $n$ 元集合 $S$ 的 $r$ 排列数．

例如，设 $S=\{a,b,c\}$，则

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$$

是 $S$ 的所有 6 个 2 排列，所以 $P(3,2)=6$．当 $r=n$ 时，称 $n$ 元集合 $S$ 的 $n$ 排列为 $S$ 的全排列，即 $P(n,n)=n!$，相应的数称为 $n$ 元集合 $S$ 的全排列数，如 $S=\{a,b,c\}$，则

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba$$

是 $S$ 的所有 6 个全排列，所以 $P(3,3)=6$．

显然，有

（1）$P(n,r)=0\qquad (r>n)$;

（2）$P(n,1)=n\qquad (n\geqslant 1)$.

> **定理 1.2.1**　对于满足 $r\leqslant n$ 的正整数 $n$ 和 $r$，有
> $$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=n!/(n-r)!.$$

**证明**：要构造 $n$ 元集合的一个 $r$ 排列，可以在 $n$ 元集合中任取一个作为第 1 项，有 $n$ 种取法；在取定第 1 项后，第 2 项可以从剩下的 $n-1$ 个元素中任选一个作为第 2 项，有 $n-1$ 种取法；同理，在前 $r-1$ 项取定后，第 $r$ 项有 $n-r+1$ 种取法．由乘法原理知：

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=n!/(n-r)!$$

由定理 1.2.1，$n$ 元集合的全排列数 $P(n, n)= n!$. 规定：$0! = 1$.

**【例 4】** 有 4 盏颜色不同的灯：

（1）把它们按不同的次序全部挂在灯杆上表示信号，共有多少种不同的信号？

（2）每次使用 1 盏、2 盏、3 盏或 4 盏灯按一定的次序挂在灯杆上表示信号，共有多少种不同的信号？

**解**：（1）$P(4, 4) = 24$.

（2）$P(4, 1) + P(4, 2) + P(4, 3) + P(4, 4) = 64$.

**【例 5】** 将 $a, b, c, d, e, f$ 进行排列. 问：

（1）使得字母 $b$ 正好在字母 $e$ 的左邻的排列有多少种？

（2）使得字母 $b$ 在字母 $e$ 的左边的排列有多少种？

**解**：（1）$b$ 正好是 $e$ 的左邻，那么把 $be$ 看作一个字母 $E$，则原问题就变成求集合$\{a, c, E, d, f\}$的全排列数，共有 5！种排列.

（2）将$\{a, b, c, d, e, f\}$的所有全排列分成如下两类：

$A = \{\times\times\cdots\times \mid$ 其中 $b$ 在 $e$ 的左边$\}$,

$B = \{\times\times\cdots\times \mid$ 其中 $b$ 在 $e$ 的右边$\}$.

显然有 $A \cap B = \Phi$，$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$的全体全排列，$|A \cup B| = 6!$.

定义映射　　$f: A \to B$,

使　　$f(\cdots b \cdots e \cdots) = (\cdots e \cdots b \cdots)$.

即 $f$ 将 $A$ 中的任一排列的 $b$ 与 $e$ 的位置互换，保持其余字母位置不变，得到 $B$ 中的一个排列. 显然，$f$ 是一一映射，所以　$|A| = |B| = 1/2 \times 6!$.

**【例 6】** 现在把例 5 改一下. 从 $a, b, c, d, e, f$ 中选出 3 个字母进行排列，且 $b$ 与 $e$ 不相邻的排法有多少种？

**解**：**方法 1**　从 6 个字母选出 3 个的排列共有 $P(6,3)$个，将其分为以下 3 类：

（1）$b$ 和 $e$ 挨在一起，且 $b$ 是 $e$ 的左邻.

（2）$b$ 和 $e$ 挨在一起，且 $b$ 是 $e$ 的右邻.

（3）$b$ 和 $e$ 不挨在一起（包括不出现 $b$ 和 $e$).

从例 5 的第 2 问知道，第 1 类和第 2 类的排法是同样多的. 现在分析第 1 种情况. 选定了 $b$，$e$，那么只需从 $a$，$c$，$d$，$f$ 中再选出 1 个，与代表 $b$ 是 $e$ 的左邻的 $E$ 进行排列；所以第 1 种情况共 $P(4, 1) \times P(2, 2)$种排法. 第 2 种情况也有 $P(4, 1) \times P(2, 2)$种排法. 显然，这里没有其他的可能情况. 因此，要求的第 3 类排法的个数为

$$P(6, 3) - 2 \times P(4, 1) \times P(2, 2) = 104.$$

**方法 2**　直接计算. 满足题意的排列可分为如下 4 类：

（1）排列中 $b$，$e$ 均不出现，即为 4 元集合$\{a, c, d, f\}$的 3 排列，共有 $P(4, 3)$种.

（2）排列中只出现 $b$，不出现 $e$. 那么先从 4 元集合$\{a, c, d, f\}$中选出 2 个进行排列，然后把 $b$ 放在它们之间或两端，故此类排法共有 $3 \times P(4, 2)$种.

（3）排列中只出现 $e$，不出现 $b$. 同（2），此类排法共有 $3 \times P(4, 2)$种.

（4）排列中出现 $e$ 和 $b$，但不相邻. 显然，需要从集合$\{a, c, d, f\}$中选出 1 个，然后把 $b$ 和 $e$ 放在它两边. 那么此类排法有 $2 \times P(4, 1)$种.

所以，共可以得到