国家技能型紧缺人才培养培训工程
高职高专软件技术专业规划教材

计算机数学

刘斌　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国家技能型紧缺人才培养培训工程
高职高专软件技术专业规划教材

计算机数学

主编　刘　斌
参编　丁　梅　车恩罡
主审　高世贵

机械工业出版社

本书是根据国家技能型紧缺人才培养培训工程的基本要求编写的。内容包括：函数与极限，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，矩阵，概率。本书内容简明扼要，层次清晰，每章前有学法指导，每节前有学习目标，每节、每章后有目标测试题。

本书为计算机应用与软件技术专业技能型紧缺人才培养培训教材，也适用于工科类其他专业，还可作为成人高校数学课程教材。

图书在版编目（CIP）数据

计算机数学/刘斌主编．—北京：机械工业出版社，2005.6

国家技能型紧缺人才培养培训工程高职高专软件技术专业规划教材

ISBN 7-111-16571-3

Ⅰ.计… Ⅱ.刘… Ⅲ.电子计算机-数学基础-技术培训-教材 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 049079 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：王玉鑫 版式设计：张世琴
责任印制：石 冉 责任校对：吴美英
三河市宏达印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2005 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16·12.75 印张·314 千字
定价：19.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
封面无防伪标均为盗版

国家技能型紧缺人才培养培训工程
软件技术专业教材编审委员会

前 言

为适应高等职业技术教育的发展，满足教育部计算机应用与软件技术专业技能型紧缺人才的培养要求，机械行业高职计算机专业教学指导委员会组成了“高职计算机专业技能型紧缺人才培养教材编写组”，编写了一套具有高职特色的计算机专业系列教材，本书也是其中之一。

本书主要内容：函数与极限，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，矩阵，概率。本书内容符合2000年教育部《应用数学基础课程基本要求》。按照“以应用为目的、以必须够用为度”的原则，以“理解基本概念、学会运算方法及应用”为教学目标，紧扣高职计算机专业技能型紧缺人才培养要求。淡化理论推导，突出解题方法与应用，简明扼要，层次清晰。在编写体例上有一定创新，每章前有学法指导，每节前有学习目标，每节后有目标测试题，每章后有A、B两组目标测试题，其中A组为基本题，B组为提高题。

本书由沈阳职业技术学院刘斌主编，并编写了第一、二、三、七章，辽宁铁岭农业职业技术学院丁梅编写了第四、五章，沈阳职业技术学院计算机学院车恩罡编写了第六章。全书由刘斌统稿，由辽宁省广播电视大学高世贵副教授主审。

作者在编写过程中，参阅了相关书籍和教材（书目详见本书参考文献），得到了机械行业高职计算机专业教学指导委员会全体委员的帮助和支持，本书编者在此向所参考书籍的作者表示衷心的感谢，向给予本书编者帮助、支持和指导的领导和同志们表示衷心的感谢，向本书的主审辽宁省广播电视大学高世贵副教授表示衷心的感谢。

因本书编者的水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请同行及读者提出批评和指正。

编者

目　录

第一章　函数与极限

1. 主要内容

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的定义及其性质
    - 函数的连续性与间断点
    - 闭区间上连续函数的性质
  - 极限
    - 定义
      - 数列的极限
      - 函数的极限
    - 无穷大与无穷小
      - 定义
      - 关系
    - 求极限的方法
      - 极限的四则运算法则
      - 两个重要极限
      - 无穷小乘有界变量

2. 学法指导

初等数学主要研究的是常量及其运算，高等数学主要研究的是变量与变量之间的依赖关系。学习本章时要注意转变观念，要从变量的角度思考问题。在研究两个变量之间的关系时形成了函数的概念，它是定性定量地研究各种变量的一个非常重要的工具。在描述变量在某个变化过程中的变化趋势时建立了极限的概念，极限是微积分中的一个基本概念，微积分中许多概念都是由极限引入的。围绕着研究对象是变量，研究方法是极限，展开本章内容的学习。

本章的第一个特点是涉及到以往的知识较多，如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的定义、图像及其性质，三角函数中涉及到的一些公式等，要求读者要做好充分的复习。第二个特点是定义多，要求读者要在理解的基础上加以应用。

本章的主要内容是函数的概念及性质，极限的概念与求极限的方法。

第一节　函　　数

学 习 目 标

1. 理解函数的定义，掌握函数的表示法和函数的四种特性，理解函数的增量和反函数的概念。

2. 掌握基本初等函数的定义、性质和图象，理解复合函数的概念，能写出复合函数的复合过程。

一、函数的概念

1. 常量与变量

我们在研究实际问题时，经常会遇到各种不同的量，如身高、体重、温度、产量、收入等。如果一个量在某过程中是变化的，即可以取不同的数值，则称之为变量。例如一天中不同时间的气温、某人从出生到10周岁的身高，它们都在不断地变化，都是变量。变量通常用小写字母 x、y、t、u、v 等表示。如果一个量在某过程中保持不变，即取同一个值，则称之为常量。例如 $S=\pi r^2$，这里的圆周率 π 是一个不变的量；在一定的温度下水的密度 ρ 解是一个固定的值，即是一个常量。常量通常用小写字母 a、b、c 等表示。

2. 函数的概念

在某一变化过程中，往往同时存在几个变量，并且它们之间是相互影响和制约的。即一个量的变化会引起其他量的变化。下面具体研究某变化过程中只有两个变量的依赖关系。

实例1 单价为2元的福利彩票的销售额 y 元与销售量 x 张之间的依赖关系为 $y=2x$。当销售量 x 在自然数集合 $\mathbf{N}$ 中任意取一个数值时，销售额 y 都有一个确定的值与之对应。

实例2 半径为 r 的圆的面积 $S=\pi r^2$。给定一个 $r\in(0,+\infty)$，相应地得到一个实数 S。

抛开以上两个例子的实际意义，它们的共同点是：确定了两个变量之间的对应关系，这种对应关系就是函数。

定义1 设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 按照某种对应法则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数。记作 $y=f(x)$。数集 D 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**。f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则。函数符号也可用其他字母来表示，如 F、φ、g 等。

当自变量取定 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$。当 x 取遍 D 中的每一个值时，对应的函数值组成的集合称为函数的**值域**。

由函数定义可知，定义域和对应法则是函数定义的两个要素，如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么它们就是同一个函数。

例1 求下列函数的定义域。

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$　　(3) $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$

解 (1) 在分式 $\dfrac{x+1}{x-3}$ 中，分母不能为零，所以 $x-3\neq0$，解得 $x\neq3$，即定义域为 $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$。

(2) 在偶次根式中，被开方式 $x^2-4\geqslant0$，解得 $x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2$，即定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

(3) 要使函数 $f(x)$ 有定义，必须使 $\begin{cases}16-x^2\geqslant0\\ \sin x>0\end{cases}$ 成立，即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant4\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

解得　$-4\leqslant x<-\pi$ 与 $0<x<\pi$

所以函数的定义域为　$[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$。

例2 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求　$f(0)$、$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$、$f(-x)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$f(x+1)$、$f(x^2)$、$f(x_0+1)$。

解 $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$ $\quad f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$ $\quad f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1} \qquad f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{x}{-2+x}$$

$$f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad f(x_0+1)=\frac{1-(x_0+1)}{1+(x_0+1)}=\frac{x_0}{-2+x_0}$$

例 3 设有函数 $f(x)=x-1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$,它们是否为同一个函数?

解 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$ 在 $x=-1$ 点无定义,其定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同,所以它们是两个不同的函数。

3. 函数的表示法

函数的表示法通常有三种:公式法、表格法和图形法。下面举例说明。

1) $y=2x^2+1$,这是用公式法表示的函数,当 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 区间取任意值时,由公式可以确定惟一的 y 值。

2)某商场一年中各月份的电视机销售量见表 1-1。

表 1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	204	198	150	203	190	205	300	180	192	145	210	200

这是用表格法表示的函数,当月份 x 由 1 取到 12 之间任意一个整数时,从表格中都可以查到销售量 y 的一个对应值。如 x 取 8,从表中可查到对应的 y 值是 180,即 8 月份的电视机销售量为 180 台。

3) 气象台每天用自动记录仪把一天中的气温变化情况自动描绘在记录纸上,形成如图 1-1 所示的曲线。

这是用图形法表示的函数。气温 y 与时间 x 的函数关系由曲线给出。当 x 取 0 到 24 之间的任意一个数值时,在曲线上都可以找到一个与之对应的 y 值。如 $x=12$ 时,$y=22.5$℃。

4. 分段函数

定义 2 一个函数在定义域的不同范围内取值时,对应的法则不能用同一个解析式来表示,而要用两个或两个以上的解析式来表示,这样的函数叫做**分段函数**。

分段函数在整个定义域上是一个函数,而不是几个函数。举例说明如下:

(1) 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=[0,+\infty)$,图形如图 1-2 所示。

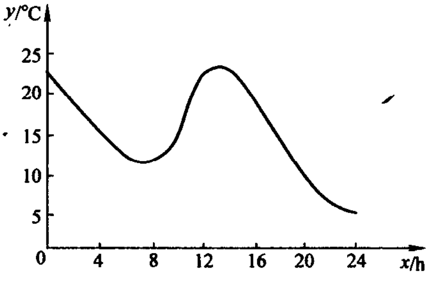

图 1-1

(2) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\{-1,0,1\}$,图形如图 1-3 所示。

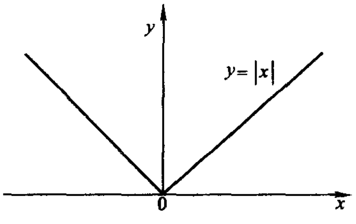

图 1-2

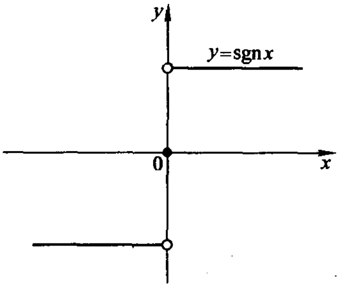

图 1-3

画分段函数的图形时,在不同的区间上要作相应的解析式的图形。求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应取值范围的解析式中进行计算。

例 4 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\leqslant x<0\\ x+1 & 0\leqslant x<1\\ 0 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,求 $f(0)$、$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$、$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$、$f(2)$,并作函数图形。

解 $f(0)=1$ $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$ $f(2)=0$

图形如图 1-4 所示。

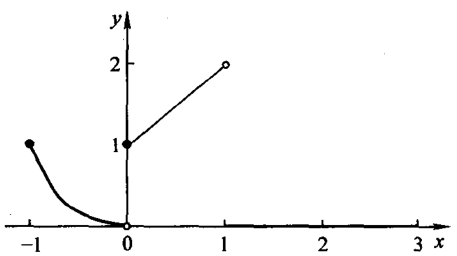

图 1-4

例 5 某市出租车起价费 7 元(3km 以内),当路程超过 3km 后,每增加 0.6km 加收 1 元钱(不足 0.6km 按0.6km 计算)。求出租车费与路程之间的函数关系。

解 设 y 为出租车费(单位:元),x 为出租车行驶的路程(单位:km),则有:

$$y=\begin{cases}7 & x\in(0,3)\\ 7+\dfrac{x-3}{0.6} & \text{当}\dfrac{x-3}{0.6}\text{恰为整数时}\\ 7+\left[\dfrac{x-3}{0.6}+1\right] & \text{当}\dfrac{x-3}{0.6}\text{为小数时}\end{cases}\ \Bigg\}\ x\in(3,+\infty)$$

二、函数的几种特性

设函数 $y=f(x)$在某区间 I 上有定义。

1. 有界性

如果存在一个正数 M,对于任意的 $x\in I$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 I 上有界。

例如,$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为 $|\sin x|\leqslant 1$,如图 1-5 所示。$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界,因为 $|\varphi(x)|\leqslant 1$;而在 $(0,1)$ 内则是无界的。如图 1-6 所示。

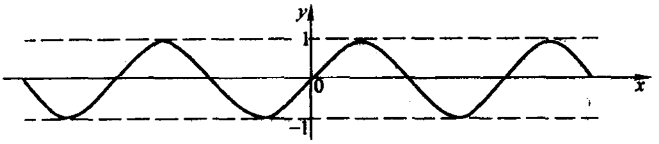

图 1-5

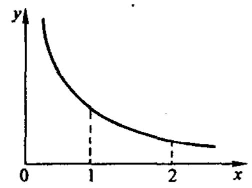

图 1-6

2. 单调性

如果对于区间 I 内的任意两点 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上为单调增加函数,区间 I 为单调增加 区间;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上为单调减少函数,区间 I 为单调减少区间。单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数。

如图 1-7 所示,$y=f(x)$ 在 (a,b) 是单调增加函数。如图 1-8 所示,$y=\varphi(x)$ 在 (a,b) 是单调减少函数。

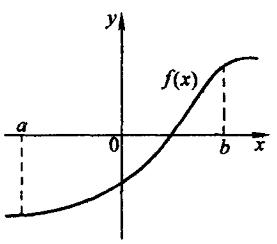

图 1-7

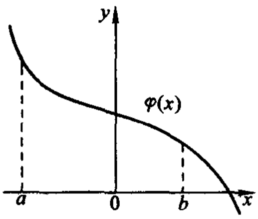

图 1-8

3. 奇偶性

设 I 为关于原点的对称区间,若对于任意 $x\in I$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的;奇函数的图形是关于原点中心对称的。

如图 1-9 所示,$y=f(x)$ 在 $(-a,a)$ 是偶函数。如图 1-10 所示,$y=\varphi(x)$ 在 $(-a,a)$ 是奇函数。

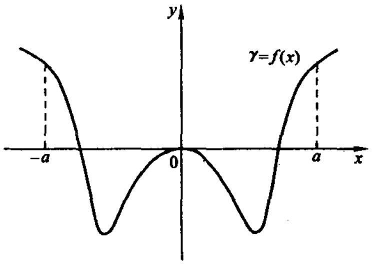

图 1-9

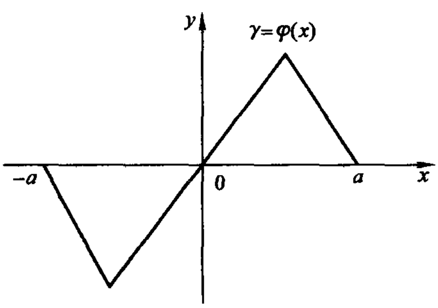

图 1-10

4. 周期性

若存在一个不为零的实数 T,使得对于任意的 $x\in I$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数。通常把满足这个等式的最小正数称为函数的周期。

例如,$y=\sin x$ 是周期函数,其周期为 2π。

三、反函数

在函数中,自变量与因变量的地位是相对的,任意一个变量都可以根据需要作为自变量。例如,某水性笔单价 2 元,卖出 x 支,则销售收入 y 是销量 x 的函数 $y=2x$。这时 x 是自变量,y 是 x 的函数。若已知销售收入 y,反过来求销量 x,则有 $x=\frac{y}{2}$,这时 y 是自变量,x 变成了 y 的函数。上面的例子反映了同一过程中两个变量之间地位的相对性,称他们互为反函数。

定义 3 设 $y=f(x)$的定义域为 D,其值域为 M。如果对于每一数值 $y\in M$,都有惟一确定且满足 $y=f(x)$的数值 $x\in D$ 与之对应,那么称定义在 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$叫做函数 $y=f(x)$的反函数,其对应法则记作 f^{-1}。

$y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数。由定义可知,单调函数一定有反函数。习惯上,我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以通常把 $x=f^{-1}(y)$写成 $y=f^{-1}(x)$。如果把 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形画在同一平面直角坐标系内,那么这两个图形关于直线 $y=x$ 对称。例如 $y=\tan x$ 与 $y=\arctan x$,如图 1-11 所示;$y=2x$ 与 $y=\frac{x}{2}$,如图 1-12 所示。

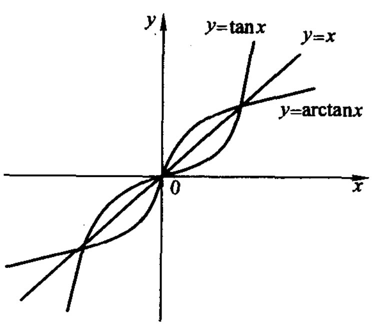

图 1-11

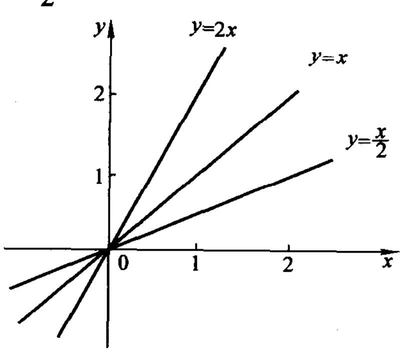

图 1-12

四、初等函数

1. 基本初等函数

下面六种函数统称为基本初等函数,他们是微积分中所研究对象的基础。

(1) 常数函数 $y=C$(C 为常数);

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数);

(3) 指数函数 $y=a^x$(a 为常数,且 $a>0,a\neq1$);

(4) 对数函数 $y=\log_a x$(a 为常数,且 $a>0,a\neq1$);

(5) 三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$;

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$。

以上这些函数的定义域、值域、图形以及性质参见本书附录Ⅰ。

2. 基本初等函数

定义 4 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成并在其定义域上可用一

个解析式表示的函数，叫做初等函数。

例如，函数 $y=2x^3+5$，$y=2\sin x$，$y=\ln(4-\cos^2 x)$，$y=\operatorname{arccot}\dfrac{x}{4}$，$y=(x^3+1)\log_5 x$ 等都是初等函数。而函数 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x_3}+\cdots$，不满足有限次四则运算的条件；函数 $y=\operatorname{sgn}x$，不能用一个解析表达式表示，所以这两个函数都不是初等函数。

五、复合函数

设 $y=2^u$，$u=\sin x$，求变量 y 与 x 之间的对应法则可用代入法来实现。$y=2^{\sin x}$ 是由函数 $y=2^u$ 及 $u=\sin x$ 复合而成，这样的函数就是复合函数。

定义 5 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$。若 $u=\varphi(x)$ 的值域或其中一部分包含于 $y=f(u)$ 的定义域中，则称 y 是通过中间变量 u 构成的 x 的函数，即 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变量，u 是中间变量。

并不是任何两个函数都可以构成一个复合函数的，构成复合函数的关键是中间变量的函数的定义域或其中的一部分必须包含于最终函数的定义域中。例如 $y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 就不能构成复合函数，因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 的值定义是 $u<0$，而 $y=\ln u$ 的定义域是 $u>0$。

复合函数可以有一个或多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的。

例 6 (1) 已知 $y=e^u$，$u=\operatorname{arccot}x$；

(2) 已知 $y=\ln u$，$u=4-v^2$，$v=\cos x$。

请将 y 表示成 x 的函数。

解 (1) 将 $u=\operatorname{arccot}x$ 代入 $y=e^u$，可得 $y=e^{\operatorname{arccot}x}$。

(2) 将 $v=\cos x$ 代入 $u=4-v^2$，得 $u=4-\cos^2 x$；再将 $u=4-\cos^2 x$ 代入 $y=\ln u$，得 $y=\ln(4-\cos^2 x)$。

例 7 写出下列函数的复合过程。

(1) $y=\sin 2^x$　　　　(2) $y=e^{\operatorname{arccot}\frac{x}{4}}$

解 (1) $y=\sin 2^x$ 是由 $y=\sin u$，$u=2^x$ 复合而成的。

(2) $y=e^{\operatorname{arccot}\frac{x}{4}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\operatorname{arccot}v$ 和 $v=\dfrac{x}{4}$ 复合而成的。

目标测试 1-1

一、填空题

1. $y=\dfrac{5x}{x^2-3x+2}$ 的定义域为__________。

2. $y=\begin{cases}2x+3 & -1\leqslant x<1\\ 0 & 1\leqslant x<2\\ -x^2 & x\geqslant 2\end{cases}$ 的定义域为__________。

3. $y=x^2-3\cos 2x$ 是__________(奇函数，偶函数，非奇非偶函数)。

4. $f(x)=2x^2-3x+7$，则 $f(0)=$____；$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$____；$f(a)=$____；$f(x+1)=$____。

5. 设 $f(x)=ax+b$，若 $f(0)=-2$，$f(3)=5$，则 $a=$____，$b=$____。

二、选择题

1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，则 $f[f(x)]=($ $)$。

(A) $\dfrac{x}{1-x}$ (B) $\dfrac{1}{1-x}$ (C) $\dfrac{x}{1-2x}$ (D) $\dfrac{1}{1-2x}$

2. 判定 $y=5^x+5^{-x}$ 为( )。

(A)奇函数 (B)偶函数 (C)非奇非偶函数

3. 判定 $f(x)=\sin x, g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 是否为相同的函数。

(A)是相同函数 (B)不是相同函数

4. $y=3^x+1$ 的反函数是( )。

(A) 3^x-1 (B) 3^{x-1} (C) $\log_3 x$ (D) $\log_3 x-1$

三、解答题

1. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+5}$ (2) $y=\ln(x+4)$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-2x-6}}$ (4) $f(x)=\ln(x-3)+\sqrt{6-x}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & -\infty<x\leqslant 0\\ 2^x & 0<x<+\infty\end{cases}$，求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$。

3. 写出下列函数组成的复合函数(将 y 表示成 x 的函数)。

(1) $y=\arcsin u, u=1-x^2$

(2) $y=\sqrt{u}, u=2+v^2, v=\cos x$

(3) $y=u^2, u=\tan x$

4. 试说明下列函数由哪些简单函数复合而成。

(1) $y=\sqrt{1-x}$ (2) $y=\cos\sqrt[3]{x^2+5}$

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ (4) $y=\ln\cos^3(2x+1)$

5. 设 $f(x)=x^3, g(x)=2^x$，求 $f[g(x)], g[f(x)]$。

第二节 函数的极限

学 习 目 标

1. 理解数列极限和函数极限的概念。
2. 能判定分段函数 $f(x)$ 在分段点处的极限是否存在。

一、数列的极限

把下面几个数列的前 n 项分别在数轴上表示出来，观察其变化趋势。

(1) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(3) $\frac{1}{2},-\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},-\frac{1}{2^4},\cdots,\frac{(-1)^{n+1}}{2^n},\cdots$

(4) $-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$

(5) $-1,2,-3,4,\cdots,(-1)^n n,\cdots$

(6) $2,2,2,2,\cdots$

当 n 趋于无穷大时,如图 1-13 所示,以上几个数列的变化趋势是不同的。数列(1)的点从 $x=0$ 的右侧逐渐靠近 0 点,当 n 趋于无穷大时,x_n 无限趋近 0。数列(2)的点从 $x=1$ 的左侧逐渐靠近 1 点,当 n 趋于无穷大时,x_n 无限趋近 1。数列(3)的点从 $x=0$ 的左右两侧逐渐靠近 0 点,当 n 趋于无穷大时,x_n 无限趋近 0。数列(4)当 n 趋于无穷大时,x_n 不趋近于同一个数,即 n 为偶数时,x_n 趋近于 1,n 为奇数时,x_n 趋近于 -1。数列(5)当 n 趋于无穷大时,$|x_n|$ 无限增大,不趋近于某个确定的数。数列(6)是常数数列,当 n 趋于无穷大时,x_n 仍等于 2。

从上面的讨论可以看到,当 n 趋于无穷大时,前 3 个数列的 x_n 无限趋近某个确定的常数,这样的数列称为有限数列。

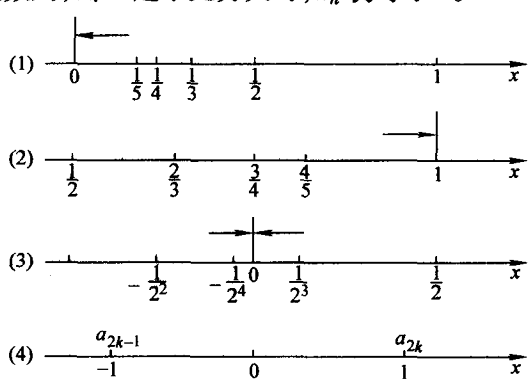

图 1-13

定义 1 对于数列 $\{x_n\}$,若当 n 无限增大时,x_n 趋近某个确定的常数 A,则 A 叫做这个数列 $\{x_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A\ (n\to\infty)$。如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限,则称 $\{x_n\}$ 是发散的。规定常数数列的极限是它本身。

由数列极限定义可知,数列(1)的极限为 0,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;数列(2)的极限为 1,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$;数列(3)的极限为 0,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}=0$;数列(6)的极限为 2,即 $\lim\limits_{n\to\infty}2=2$。数列(4)、(5)的极限不存在。

二、函数的极限

数列极限是一种特殊的函数极限,因为数列的变量是整变量。下面研究一般的函数极限。

1. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限

设 $f(x)=\frac{1}{x}$,观察 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 值的变化趋势,如图 1-14 所示。

当 $|x|$ 无限增大时,即 $x\to+\infty$ 且 $x\to-\infty$ 时,$f(x)$ 的值无限趋近于 0,此时称 0 为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限。

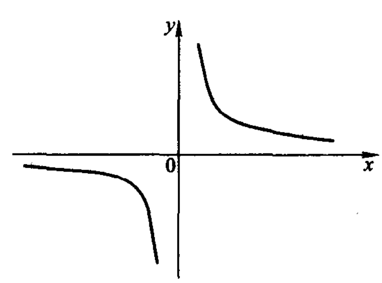

图 1-14

定义 2 若 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近某一常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$。

上述函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限为 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

若定义中限定 x 只取正值或只取负值趋于无穷时，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

如指数函数 $y=\mathrm{e}^x$，如图 1-15 所示，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x$ 不存在，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$。

再如反正切函数 $y=\arctan x$，如图 1-16 所示，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。

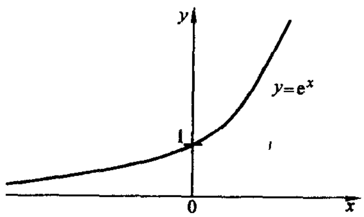

图 1-15

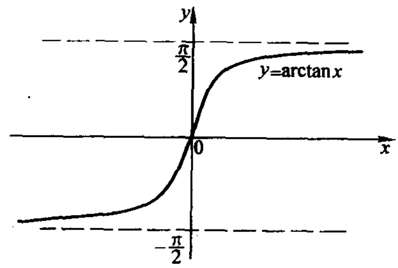

图 1-16

从图 1-14 可以得出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，而且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

由定理 1 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 的极限都不存在。

2. 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，通过列表和作函数图形讨论 $x\to1$ 时 $f(x)$ 的变化趋势。

表 1-2

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	$\cdots\to1\leftarrow\cdots$	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots\to2\leftarrow\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1

由表 1-2 和图 1-17 得，当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值无限趋近 2。

由此得出，当 $x\to x_0$ 时函数的极限有定义。

定义 3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁有定义（x_0 点可以除外），若当 $x\to x_0(x\neq x_0)$ 时，对应的 $f(x)$ 无限地趋近某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$。

由此定义得，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处没有定义，但是当 $x\to1$ 时，其函数的极限是存在的。

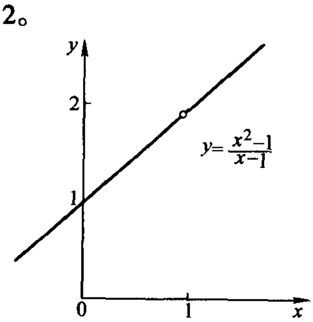

图 1-17